MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

B. I–II–III.
VEKTORANALÍZIS

TÉRGÖRBÉK ÉS FELÜLETEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA
SKALÁR-, VEKTOR- ÉS TENZORMEZŐK

ÍRTA:
DR. FAZEKAS FERENC

NEGYEDIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika (Negyedik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Második kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Második kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Harmadik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Második kiadás)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Második kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Második kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Harmadik kiadás)
A. X. A logarléc (Negyedik kiadás)

B.

B. I—II—III. Vektoranalízis. Térgörbék és felületek differenciálgeometriája Skalár-, vektor- és tenzormezők (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok
B. VII. Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Harmadik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálóegyenletek (Második rész)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás
C. III. Integrálóegyenletek
C. IV. Matrixszámítás (Harmadik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Második kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.

B. I—II—III.

VEKTORANALÍZIS

ÍRTA:

DR. FAZEKAS FERENC

EGYETEMI DOCENS

NEGYEDIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1967

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

KIADÁSÁT A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTER RENDELTE EL

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

DR. EGERVÁRY JENŐ †
AKADÉMIKUS, EGYETEMI TANÁR

DR. ROSIVALL FERENC
EGYETEMI DOCENS

DR. KOLLÁR LAJOS
OKL. MÉRNÖK

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott, műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

*Munkánk A. és B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt,* megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból,* sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kollégа érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről,* mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak,* különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek,* amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplínáját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958, szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A.I. és A.X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és emiatt mind inkább keresetté vált kötetekkel, mint az A.IX., B.IV., B. I-II-III., B.VII.

Az utóbbi második kiadások egy éven belüli elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével, a héjelmélet modern, tenzorszámítási tárgyalásmódjával kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítés helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumokon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi, nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni, és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, továbbra is kérve ehhez a Minisztérium, a Kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk áldozatkész, buzdító támogatását.

Budapest, 1964. júl. 15.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

Sorozatunk eme újabb kötete több irányú rendeltetéssel indul a magyar műegyetemi oktatás és műszaki gyakorlat szolgálatára.

Először: hiányt kell pótolnia, mert e tárgykörből nem áll rendelkezésre magyar nyelvű és a hazai műszaki igényeknek megfelelő gyakorlati könyv. Megjegyzendő, hogy *Szent-Mártony* rokon, bár szűkebb tárgykörű és inkább elméleti érdekű kis könyve is elfogyott.

Másodszor: elő kell segítenie e tárgykör oktatásának fejlesztését műegyetemeinken. Ennek megfelelően könyvünk — erősen tagolt elméleti összefoglalókban, bő példa- és feladatanyaggal — feldolgozza az egész műegyetemi vektoranalitikus tananyagot.

Harmadszor: tekintettel kell lennie az igényesebb, a tárgykörben jobban elmélyedni kívánó olvasókra. Nekik szántuk a 3. § *c)*-t, a 4. §-t és a szemináriumi tárgykörök egy részét. Itt már el lehetett tekinteni a példaanyagtól; erre egyébként a terjedelem korlátozottsága is kényszerített.

Negyedszer: ízelítőt kell adnia a vektoranalízis sokoldalú és széles körű műszaki alkalmazásából. E célt szolgálják a §-ok végén a kinematikai, dinamikai, hőtani, talajmechanikai, hidrodinamikai, elektrodinamikai, rugalmasságtani stb. vonatkozású feldolgozott, illetve szemináriumi feldolgozásra szánt tárgykörök.

E célkitűzések jegyében dolgozni elég nehéz feladatnak bizonyult. Ráadásul a befejező munkálatokat az október—novemberi események zavarták meg. Mégis úgy érzem, a műszaki olvasótábor méltányolni fogja a vázolt célok megvalósítására kifejtett erőfeszítéseimet.

Jelentősen támogattak a nehézségek leküzdésében bírálóim. Közülük elsősorban *Egerváry* akadémikusnak tartozom köszönettel nemcsak sok értékes megjegyzéséért, hanem a mellette töltött évtized alatt tőle tanult józan előadási elvekért, elegáns tárgyalási módokért is. *Rosivall Ferenc* docens és *Kollár Lajos* adjunktus nagyszámú műszaki és didaktikai észrevételeiért fogadja hálámat.

Gyurcsy mérnököt az ábrák gondos elkészítéséért illeti elismerés. *Feleségemnek* a nagyméretű segédmunkálatokért mondok hálás köszönetet.

A források közül főleg *Egerváry, Hajós, Кочин, Lagally, Budó, Simonyi, Reuss* idézett műveit és több tanszékünk gyakorlati példaanyagát kell kiemelnem; utalhatok egyes saját vizsgálataimra is.

Végezetül hálásan emlékezem meg a *Művelődésügyi Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó Vállalat* e súlyos időkben is töretlen áldozatkészségéről és nem utolsósorban az *Egyetemi Nyomda* magas színvonalú munkájáról.

Budapest, 1956. december 15. A SZERZŐ

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Kötetünk első kiadása 1957 nyarán jelent meg és 1962 tavaszán már hiánylistára került. Maga e tény is eléggé szemlélteti a vektoranalízis jelentőségét a műszaki felsőoktatás és tudományok szempontjából. Szükségessé vált tehát a kötet jelen, második kiadása, amely — a sorozat fejlesztési programjának keretében — apróbb javításokon túlmenőleg, függelékként új, 5. §-sal bővült.

Az első négy § lényegében változatlan, és az első kiadás matricájáról nyomtatták. Az említett apróbb javítások csupán néhány észrevett sajtóhiba kiigazítását, valamint egy terminus technikus korszerűsítését célozták. Itt a „skalártér, vektortér, tenzortér" elnevezésekre gondolok, ami ugyan műszaki felsőoktatásunkban régóta használatos és műszaki elnevezésekkel (pl. elektromos, mágneses térrel stb.) is összhangban van, mégis — legalább a címekben — szükségesnek tartottam „skalármező, vektormező, tenzormező" elnevezésekkel helyettesíteni (az orosz „polja", a német „Feld" elnevezéseknek megfelelően), mert pl. a vektortér elnevezést a matematikában mindinkább a lineáris algebra foglalja le, mégpedig az ún. lineáris tér vagy affin tér újabb megjelölésére. A műszakiak idegenkedése a „mező" elnevezéstől részben abból adódhatott, hogy a „mező" szóhoz önkéntelenül kétdimenziós képzetek fűződnek. Oktatásnál tehát gondolnunk kell e képzetek leküzdésére. Egyébként a fenti szempontokra több lábjegyzetben is utalok.

Ami az új, 5. §-t illeti, ez az általános tenzorelméletbe kívánja az érdeklődő olvasót bevezetni. Ezt főleg a modern elméleti műszaki (pl. rugalmasságtani, héjelméleti, elektrodinamikai) és fizikai (pl. relativitáselméleti) irodalom egyre erőteljesebb igényei teszik indokolttá, amelyek gyakran követnek görbült (két-, három-, sőt olykor magasabb dimenziós) térbeli vizsgálatot, skalár-, vektor- és tenzormennyiségekkel egyaránt. Az általános térszemlélet mellett a korszerűbb szimbolikából is ízelítőt kíván adni e függelék, annál is inkább, mert annak előbb-utóbb nálunk is be kell vonulnia a teljes differenciálgeometriai és vektoranalitikai tananyagba. Megjegyzendő, hogy térelméleti szempontból hasznos előkészítés e § tanulmányozásához a Vektoralgebra stb. c. (A. IX. számú) kötetünk 2. kiadásának függeléke, az *n*-dimenziós lineáris és euklideszi térről. A műszaki alkalmazások tekintetében, az adott keretek közt a héjak alakváltozási tenzorának tárgyalására voltam kénytelen szorítkozni, és csupán rövid utalásokkal elintézni az általános tenzorelmélet számos más, modern alkalmazását.

Ennek ellenére úgy érzem, hogy sorozatunk egyre szélesedő olvasó tábora méltányolni fogja a kötet (s általa az egész sorozat) fejlesztésére, korszerűsítésére, gazdagítására irányuló törekvésemet.

Végezetül szíves köszönetet mondok *Seitz Károly* kollégának a függelék kéziratának gondos átnézéséért, *Feleségemnek* a nagy figyelmet igénylő segédmunkálatokért, és nem utolsósorban a *Tankönyvkiadó Vállalatnak* áldozatkészségéért, az *Egyetemi Nyomdának* pedig színvonalas munkájáért.

Budapest, 1963. jan. 15. A SZERZŐ

ELŐSZÓ A KÖTET HARMADIK ÉS NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A Kiadó és magam nem kis meglepetésére a második kiadás egy, a harmadik kiadás két éven belül elfogyott. E tény jóleső érzés a szerzőnek, és kézzel fogható bizonyíték a téma műszaki jelentősége mellett.

A további fejlesztési tervek egy része (az *n*-dimenziós vektoranalízis bevezetése) időközben a Matematikai programozás c. kötet új kiadásában terelődött a megoldás útjára. A többit illetőleg célszerű megvárni a két budapesti műszaki egyetem egyesítése során felmerülő új igényeket.

Budapest, 1966. nov. 15. A SZERZŐ

E KÖTET

TARTALOMJEGYZÉKE

Bevezetés

B. I–II.

TÉRGÖRBÉK ÉS FELÜLETEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

1. §. EGY SKALÁRVÁLTOZÓ VEKTORFÜGGVÉNYE (TÉRGÖRBÉK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA)

a) A függvény analízise. A térgörbe

b) Térgörbék differenciálgeometriája

c) Műszaki alkalmazások

d) Szemináriumi tárgykörök

2. §. KÉT SKALÁRVÁLTOZÓ VEKTORFÜGGVÉNYE (FELÜLETEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA)

a) A függvény analízise. A felület

b) Felületi görbék differenciálgeometriája

c) Szemináriumi tárgykörök

B. III.

SKALÁR-, VEKTOR- ÉS TENZORMEZŐK

3. §. VEKTORVÁLTOZÓ (HÁROM SKALÁRVÁLTOZÓ) SKALÁR- ÉS VEKTORFÜGGVÉNYE (SKALÁR- ÉS VEKTORMEZŐK)

a) A vektorváltozós függvények (a mezők) alapfogalmai

b) Skalár- és vektormezők lokális és regionális jellemzése

c) Potenciálelméleti problémák

c) Általános tenzoranalízis

d) Műszaki alkalmazások

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

Bevezetés

A sorozat A. I. — A. VIII. kötetében megismerkedtünk a *skalármennyiségek* analízisével. Az A. IX. kötetben vizsgálatainkba bevontuk a *vektormennyiségeket,* és megismerkedtünk a mennyiségek így kibővített körének algebrájával. Jelen kötetben e tágabb kör analízisét fogjuk tanulmányozni, sőt a *tenzormennyiségek*kel még tovább szélesített kör algebrájára és analízisére is kitérünk.

A skaláranalízisben egy és két skalárváltozó skalárfüggvényével foglalkoztunk; a vektoranalízisben

egy skalárváltozó vektorfüggvénye: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),$

két skalárváltozó vektorfüggvénye $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),$

vektorváltozó skalárfüggvénye: $u = u(\boldsymbol{r}),$

vektorváltozó vektorfüggvénye: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}),$

vektorváltozó tenzorfüggvénye: $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}),$

illetve ezek geometriai megfelelője,

a térgörbe, a felület, a skalár-, vektor- és tenzormező

lesz vizsgálataink tárgya.

A vektoranalízisben a skaláranalízis több fogalmát, tételét látjuk majd újra — általánosított alakban; ugyanakkor számos fontos új fogalommal és tétellel is meg kell ismerkednünk. Észlelni fogjuk a vektoros tárgyalás előnyeit elyi vizsgálat során és a koordinátás tárgyalás szükségességét numerikus számításnál.

Felhívjuk a figyelmet a vektoranalízis rendkívül sokoldalú műszaki alkalmazására.

* * *

B. I—II.

TÉRGÖRBÉK ÉS FELÜLETEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA

1. §. EGY SKALÁRVÁLTOZÓ VEKTORFÜGGVÉNYE
(TÉRGÖRBÉK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA)

a) A függvény analízise. A térgörbe

α) A függvény és határértéke, folytonossága, deriváltja

I°. A f ü g g v é n y f o g a l m a. 1'. ***Definíció.*** *Az* $\boldsymbol{r}$ *vektorváltozót a t skalárváltozó f ü g g v é n y-ének mondjuk a* $t_1 \leqq t \leqq t_2$ *közön, ha a t ezen értékeihez meghatározott* $\boldsymbol{r}$ *vektorokat rendelünk hozzá valamilyen (rendszerint képlet formájában megadott) utasítással.* Jelekkel:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2. \tag{1}$$

Itt csak *egyértékű* függvényekre szorítkozunk, amelyeknél minden t értékhez csak egy-egy $\boldsymbol{r}$ vektor tartozik.

Az origóból felrakott $\boldsymbol{r}(t)$ vektorok végpontjai — általános esetben — *térbeli ponthalmaz*t képeznek.

2'. Az $\boldsymbol{r}$ vektorral együtt ennek az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ derékszögű jobbrendszerbeli x, y, z *koordinátája* is t függvénye. Egyeztetve az (1) bal és jobb oldalának megfelelő koordinátáit, írhatjuk, hogy

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \tag{2}$$

eszerint *az (1) vektor-skalár függvény egyenértékű a (2) skalár-skalár függvényrendszerrel.*

II°. H a t á r é r t é k. F o l y t o n o s s á g.* A t é r g ö r b e. 1'. ***Definíciók.*** *A* $\boldsymbol{r}_0 \neq \infty$ *vektort az* $\boldsymbol{r}(t)$ *függvény* $t_0 \neq \infty$ *helyi h a t á r é r t é k-ének nevezzük* és

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 \tag{3a}$$

módon jelöljük, *ha tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan pozitív δ(ε), hogy*

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0| < \varepsilon, \quad \text{midőn} \quad |t - t_0| < \delta(\varepsilon). \tag{3b}$$

Ha az $\boldsymbol{r}(t)$ *függvény* $t_0 \neq \infty$ *helyi határértéke megegyezik az ottani véges függvényértékkel,* azaz

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0), \tag{4a}$$

tehát

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)| < \varepsilon, \quad \text{midőn} \quad |\Delta t| = |t - t_0| < \delta\,(t_0, \varepsilon); \tag{4b}$$

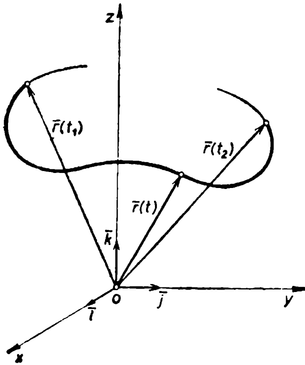
akkor az $\boldsymbol{r}(t)$ *függvényt a* t_0 *helyen f o l y t o n o s-nak nevezzük.*

* A határérték és folytonosság fogalmának bővebb tárgyalását l. pl. a sorozat A. II. és B. IV. kötetében.

2'. Ha a (4a) követelmény a $t_1 \leqq t \leqq t_2$ köz minden t értékére teljesül, tehát

$$|\boldsymbol{r}(t_*) - \boldsymbol{r}(t)| < \varepsilon, \quad \text{midőn} \quad |t_* - t| < \delta(t, \varepsilon), \tag{5}$$

akkor az adott *szakaszon folytonos függvény*ről, sőt ha a t helytől függetlenül





1. ábra

$$|\boldsymbol{r}(t_*) - \boldsymbol{r}(t)| < \varepsilon, \quad \text{midőn} \quad |t_* - t| < \Delta(\varepsilon), \tag{6}$$

akkor az adott *szakaszon egyenletesen folytonos* függvényről beszélünk.

Megemlítjük a következő **tételt***: *Ha az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény a $t_1 \leqq t \leqq t_2$ zárt szakaszon közönségesen folytonos, akkor ott egyenletesen is folytonos.*

A továbbiakban az adott szakaszon folytonos függvényekkel foglalkozunk.

Az origóból felrakott $\boldsymbol{r}(t)$ vektorok végpontjainak geometriai helye, *az $\boldsymbol{r}(t)$ vektorok* ún. *hodográfja — az adott szakaszon folytonos függvény esetén — (folytonos) **térgörbe**.* (1. ábra).

III°. A függvény deriváltja. Az érintővektor. 1'. ***Definíció.*** *Az $\boldsymbol{r}(t)$ függvényt a $t_0 \neq \infty$ helyen differenciálhatónak, az $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ vektort pedig a függvény e helyen vett derivált-jának nevezzük, ha létezik a*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0) \tag{7}$$

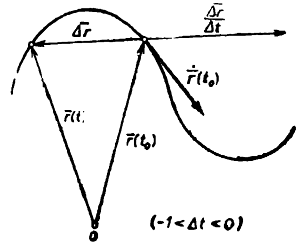
véges határérték.

A t_0 helyen differenciálható függvény Δt szakaszra vonatkozó *növekménye* előállítható

$$\Delta \boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\, \Delta t + \bar{\varepsilon}(t_0, \Delta t)\, \Delta t, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(t_0, \Delta t) = 0 \tag{8}$$

alakban, vagyis $\Delta t = dt \approx 0$ esetén a $d\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\, dt$ differenciál a $\Delta \boldsymbol{r}$ *főrésze*, az $\bar{\varepsilon}(t_0, dt)\, dt$ pedig *elenyésző része.*

A függvény t_0 helyi differenciálhatósága nyilván feltételezi a függvény ottani folytonosságát.



2. ábra

Geometriailag $\Delta \boldsymbol{r}$ az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ vektoregyenletű térgörbe t_0 paraméterű pontjából $t = t_0 + \Delta t$ paraméterű pontjába vont húrvektort, $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ a hasonló irányú és magasabb paraméterű térgörbe-pontok felé mutató szelővektort, végül $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ *a határhelyzetű szelővektort, az ún. **érintővektor**-t jelenti* (2. ábra).

* Igazolását l. pl. *Hajós* (M. 2.).

*A differenciálási szabályok** hasonló (módon és) alakban nyerhetők, mint a skalár-analízisben:

$$(\boldsymbol{r}_0)^{\cdot} = 0,\ (\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2)^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \pm \dot{\boldsymbol{r}}_2,\ (u\boldsymbol{r})^{\cdot} = \dot{u}\boldsymbol{r} + u\dot{\boldsymbol{r}},$$

$$(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2)^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \dot{\boldsymbol{r}}_2,\ (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{r}}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \dot{\boldsymbol{r}}_2,$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}\,[s(t)]}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \qquad (9a-f)$$

Ezek alapján pl.

$$\dot{\boldsymbol{r}} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})^{\cdot} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}.$$

2'. Megjegyezendő, hogy a skaláris *differenciálszámítási középértéktétel* a vektoranalízisben nem érvényes; egy térgörbe-ívhez nem mindig húzható húrjával párhuzamos érintő (pl. a csavarvonalnak nincs az alkotó irányú húrral párhuzamos érintője; 3. ábra).

3. ábra

A következő gyengébb **tétel** igaz a térben**: *Ha a* (t_1, t_2) *közbeli (s az origóból felrakott)* $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ *vektorok végpontjai egy térbeli K konvex tartományba esnek*, azaz

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \subset K,\ \text{midőn}\ t_1 \leqq t \leqq t_2, \qquad (10a)$$

akkor ugyanez áll az adott közbeli összes differenciahányados (szintén az origóból felrakott) vektorára, vagyis

$$\frac{\boldsymbol{r}(\tau_2) - \boldsymbol{r}(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \subset K,\ \text{midőn}\ t_1 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq t_2. \qquad (10b)$$

Igaz továbbá az alábbi **tétel** s ez egyúttal az említett síkbeli differenciálszámítás középértéktétel térbeli általánosításának tekinthető: *Folytonos, sima térgörbe bármely két szomszédos szakaszához húzható legalább egy-egy, a húrok síkjával párhuzamos érintő* (4. ábra.)***, tehát

$$\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_1) \times \dot{\boldsymbol{r}}(\tau_2) \,\|\, [\boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0)] \times [\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_0)],$$
$$t_0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2. \qquad (11)$$

$\bar{v} = [\bar{r}(t_1) - \bar{r}(t_0)] \times [\bar{r}(t_2) - \bar{r}(t_0)]$

4. ábra

Bizonyításul elegendő belátni, hogy az említett térgörbeszakaszoknak van legalább egy-egy, a húrsíkhoz képest lokálisan extremális távolságú pontjuk, s az ottani érintők nyilván párhuzamosak a húrsíkkal.

3'. Ha nem létezik a (7) határérték, de ugyanakkor létezik (és egymással nem egyenlő) a

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\boldsymbol{r}}_b(t_0),$$

$$\lim_{t \to t_0 + 0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\boldsymbol{r}}_j(t_0) \qquad (12)$$

* L. bővebben pl. Кочин. (M. 8.) II. 9. §. 3–4.
** Igazolását l. pl. *Hajós* (M. 2.) 8–9. o.
*** L. *Egerváry* műegyetemi előadásairól készült jegyzeteket.

bal, illetve jobboldali határérték, akkor csupán *bal-*, illetve *jobboldali deriváltról*, geometriailag pedig *bal-*, illetve *jobboldali érintővektorról* beszélhetünk.

Végül az I'-beli közönséges (gyenge) derivált mellett definiálhatunk ún. *erős deriváltat*, mégpedig így:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \lim_{\substack{t_1 \to t_0 \\ t_2 \to t_0}} \frac{\boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_2)}{t_1 - t_2}, \tag{13}$$

ahol t_1 és t_2 tetszőlegesen tart t_0-hoz.

A (gyenge) derivált ennek azon speciális esete, midőn $t_2 = t_0$.

Igazolható*, hogy *a t_0 helyi erős derivált létezése egyenértékű az ottani (gyenge) derivált folytonosságával.*

Az erős derivált geometriailag ún. *erős érintővektort* jelent, szemben a közönséges (gyenge) deriváltnak megfelelő (gyenge) érintővektorral. Az erős érintő létezése egyenértékű a (gyenge) érintő folytonosságával.

4'. Az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény *második, harmadik* stb. *deriváltját* így értelmezzük:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) - \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)}{t - t_0}, \quad \dddot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(t) - \ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)}{t - t_0}, \ldots \tag{14}$$

Megjegyzendő, hogy a folytonos $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ függvény meghatározta térgörbét csak akkor vizsgálhatjuk a b) pontbeli differenciálgeometriai apparátussal, ha függvényünk $1 \leqq \varrho$-szor *differenciálható*; pl. csavarodási vizsgálatnál $\varrho = 3$.

Példák és feladatok

1. Vizsgáljuk az alábbi vektor-skalár függvényeket értelmezés, egyértékűség, az egyenértékű skalár-skalár függvényrendszer és a megfelelő geometriai alakzat szempontjából:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\frac{\sin t}{t} + \boldsymbol{j}\frac{1}{t-2} + \boldsymbol{k}\, e^{\frac{1}{t+1}}$; B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\sqrt{t} + \boldsymbol{j} \operatorname{Arc\,tg} t + \boldsymbol{k}$;

C) $\boldsymbol{r}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{i}\,t + \boldsymbol{j}\,t^2 + \boldsymbol{k}\,t^3, & \text{ha t racionális} \\ -\boldsymbol{i}\,t - \boldsymbol{j}\,t^2 - \boldsymbol{k}\,t^3, & \text{ha } t \text{ rracionális} \end{cases}$.

Megoldás. **A)** E függvény nincs értelmezve a $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = -1$ helyeken. Ez külön utasítással pótolható; pl. $\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r}(t_2) = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}(t_3) = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

B) E függvény többértékű. Egyértékűvé tehető pl. a $\sqrt{t}$ gyök $+\sqrt{t}$ értékének és az Arc tg t függvény $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} t < \pi/2$ főértékének kiválasztásával.

C) E függvénynek megfelelő geometriai alakzat nem térgörbe, hanem csak térbeli ponthalmaz. E vektor-skalár függvénnyel egyenértékű skalár-skalár függvényrendszer:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} t \\ -t \end{Bmatrix}, \quad y(t) = \begin{Bmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{Bmatrix}, \quad z(t) = \begin{Bmatrix} t^3 \\ -t^3 \end{Bmatrix}, \quad \text{ha } t \begin{Bmatrix} \text{racionális} \\ \text{irracionális} \end{Bmatrix}.$$

* L. *Hajós* (M. 2.) 9–11. o.

2. Vizsgáljuk az alábbi függvényeket határérték és folytonosság szempontjából:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}t + \boldsymbol{j}\sin\frac{1}{t} + \boldsymbol{k}t^2$; B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}e^{\frac{1}{t-3}} + \boldsymbol{j}t^3 + \boldsymbol{k}t$;

C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}e^t + \boldsymbol{j}t + \boldsymbol{k}\frac{1}{(t-1)^3}$;

Megoldás. A) A $\lim\limits_{t\to 0} \boldsymbol{r}(t)$ határérték nem létezik, de még a $\lim\limits_{t\to +0} \boldsymbol{r}(t)$ jobboldali és a $\lim\limits_{t\to -0} \boldsymbol{r}(t)$ baloldali határérték sem, minthogy a $t \to +0$ és a $t \to -0$ határátmenetkor a $\sin\frac{1}{t}$ függvény értéke -1 és $+1$ között oszcillál végtelen sokszor, anélkül, hogy valamilyen rögzített értékhez tartana. A $t = 0$ helyen — értelmezés és határérték hiányában — folytonosságról nem lehet szó.

B) A $\lim\limits_{t\to 3} \boldsymbol{r}(t)$ határérték ugyan nem létezik, de létezik a

$$\lim_{t\to 3+0} (\boldsymbol{i}e^{\frac{1}{t-3}} + \boldsymbol{j}t^3 + \boldsymbol{k}t) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{t\to 3-0} (\boldsymbol{i}e^{\frac{1}{t-3}} + \boldsymbol{j}t^3 + \boldsymbol{k}t) = 27\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

jobboldali (végtelen), illetve baloldali (véges) határérték. A $t = 3$ helyen folytonosságról ismét nem lehet szó.

C) A $\lim\limits_{t\to 1} \boldsymbol{r}(t)$ határérték létezik és végtelen, tehát függvényünk a $t = 1$ helyen nem lehet folytonos.

D) A $\lim\limits_{t\to 0} \boldsymbol{r}(t)$ határérték létezik és véges, mégpedig

$$\lim_{t\to 0} \left(\boldsymbol{i}t^2 + \boldsymbol{j}\frac{\sin t}{t} + \boldsymbol{k}\right) = \boldsymbol{j}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Függvényünk a $t = 0$ helyen — értelmezés hiányában — nem folytonos. Ha azonban az értelmezést

$$\boldsymbol{r}(0) = \lim_{t\to 0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

módon kiegészítjük, ezzel a függvényt a $t = 1$ helyen folytonossá tesszük.

3. Állítsuk elő a definíció szerint az

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}t^2 + \boldsymbol{j}\sin t + \boldsymbol{k}e^t$; B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}t^3 + \boldsymbol{j}\cos at + \boldsymbol{k}e^{bt}$

függvények deriváltját.

Megoldás. A) A (7) definiáló formula értelmében

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta(t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\boldsymbol{i}\frac{t^2 + 2t\,\Delta t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t} + \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{j}\frac{\sin t\cos\Delta t + \cos t\sin\Delta t - \sin t}{\Delta t} + \boldsymbol{k}\frac{e^t e^{\Delta t} - e^t}{\Delta t}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\boldsymbol{i}(2t + \Delta t) + \boldsymbol{j}\left(\sin t\frac{\cos\Delta t - 1}{\Delta t} + \cos t\frac{\sin\Delta t}{\Delta t}\right) + \boldsymbol{k}e^t\frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t}\right] =$$

$$= 2\boldsymbol{i}t + \boldsymbol{j}\cos t + \boldsymbol{k}e^t,$$

lévén
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos\Delta t-1}{\Delta t}=0,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta t}{\Delta t}=1,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\Delta t}-1}{\Delta t}=1.$$

B) Hasonló módon nyerhető, hogy
$$\dot{\boldsymbol r}(t)=3\boldsymbol i t^2-\boldsymbol j\, a\sin at+\boldsymbol k\, be^{bt}.$$

4. Differenciáljuk az alábbi függvényeket a megfelelő szabály szerint:

A) $u(t)=(\boldsymbol i t^2-\boldsymbol k\cos t)\,(\boldsymbol j e^t+5\boldsymbol k)$;

B) $\boldsymbol r(s)=\boldsymbol i\, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\boldsymbol j\, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad s=t\sqrt{a^2+b^2}.$

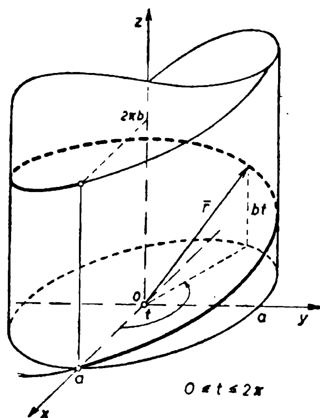
Megoldás. **A)** A skaláris szorzat (9d) differenciálási szabálya szerint
$$\dot u(t)=(2\boldsymbol i\, t+\boldsymbol k\sin t)\,(\boldsymbol j e^t+5\boldsymbol k)+(\boldsymbol i t^2-\boldsymbol k\cos t)\cdot\boldsymbol j\, e^t=5\sin t.$$

[Ellenőrzés: $u(t)=-5\cos t$, $\dot u(t)=5\sin t$.]

B) Az összetett függvény (97) differenciálási szabálya szerint
$$\frac{d\boldsymbol r}{dt}=\frac{d\boldsymbol r}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\boldsymbol i\, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\boldsymbol j\, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\right.$$
$$\left.+\boldsymbol k\, b\right)\cdot\sqrt{a^2+b^2}=-\boldsymbol i\, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\boldsymbol j\, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}+\boldsymbol k\, b.$$

[Ellenőrzés: $\boldsymbol r(t)=\boldsymbol i\, a\cos t+\boldsymbol j\, a\sin t+\boldsymbol k\, bt$, $\dot{\boldsymbol r}(t)=-\boldsymbol i\, a\sin t+\boldsymbol j\, a\cos t+\boldsymbol k\, b$; $t=s/\sqrt{a^2+b^2}$.]

5. Írjuk fel néhány térgörbe egyenletét; állapítsuk meg a t paraméter geometriai jelentését és ábrázoljuk axonometrikusan e térgörbéket:



5. ábra

A) $\boldsymbol r(t)=\boldsymbol i\, a\cos t+\boldsymbol j\, a\sin t+\boldsymbol k\, bt$ (közönséges csavarvonal);

B) $\boldsymbol r(t)=\boldsymbol i\, a_1\cos t+\boldsymbol j\, a_2\sin t+\boldsymbol k\, bt$ (elliptikus csavarvonal);

C) $\boldsymbol r(t)=\boldsymbol i\, f(t)\cos g(t)+\boldsymbol j\, f(t)\sin g(t)+\boldsymbol k\, c f(t)$ (kúpos csavarvonal);

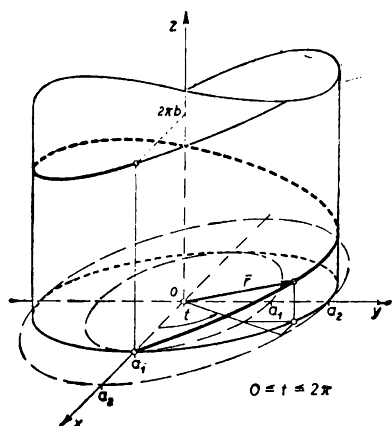
D) $\boldsymbol r(t)=\pm\boldsymbol i\,\mathrm{ch}\, t+\boldsymbol j\,\mathrm{sh}\, t+\boldsymbol k\, t$ (hiperbolikus csavarvonal);

E) $\boldsymbol r(t)=\boldsymbol i\, a\cos^2 t\pm\boldsymbol j\, a\sin t\cos t+\boldsymbol k\, a\sin t$ (*Viviani*-görbepár);

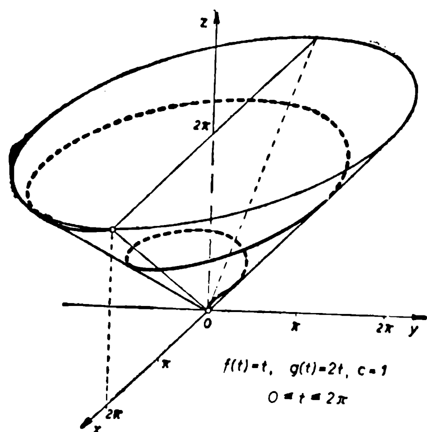
F) $\boldsymbol r(t)=\boldsymbol i\, a\cos t\cos\left[\ln\mathrm{tg}\left|\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right|\right]+$
$+\boldsymbol j\, a\cos t\sin\left[\ln\mathrm{tg}\left|\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right|\right]+\boldsymbol k\, a\sin t$
(gömbi loxodrom).

Megoldás. **A)** $t=\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}=\varphi$; 5. ábra.

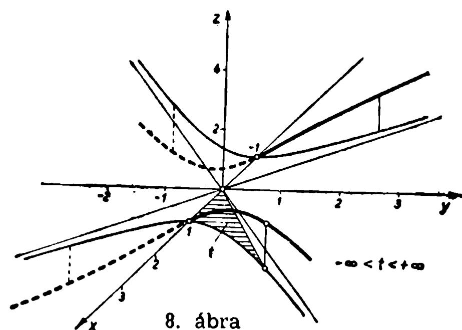
B) $t = \operatorname{arc\,tg} \frac{a_1 y}{a_2 x}$; 6. ábra.



6. ábra

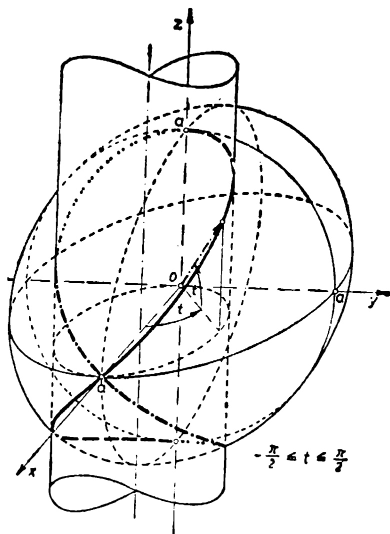


7. ábra



8. ábra

C) $g(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \varphi$; 7. ábra.



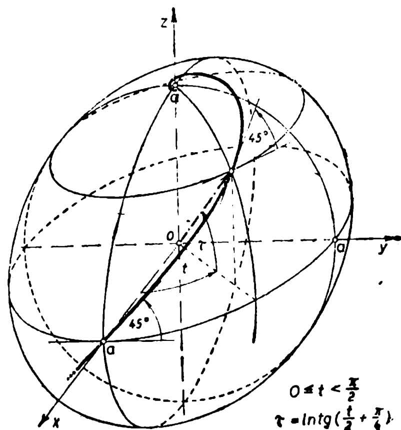
9. ábra

D) $t = \pm \operatorname{ar\,th} \frac{y}{x}$; 8. ábra.

E) $t = \pm \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} =$

$$= \pm \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\varrho} = \vartheta$$

$(\varrho = \sqrt{x^2 + y^2})$; 9. ábra.



10. ábra*

* A rajzban a t és τ jelölés felcserélendő (a feliratban nem)!

F) $t = \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\varrho} = \vartheta$, $\tau = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \varphi$; 10. ábra.

6. Igazoljuk, hogy az alábbi térgörbék a mellékelt felületen helyezkednek el:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \sin t + \boldsymbol{k}\, bt$ (közönséges csavarvonal), $x^2 + y^2 = a^2$ (körhenger);

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, t^2 \cos t + \boldsymbol{j}\, t^2 \sin t + \boldsymbol{k}\, t^2$ (kúpos csavarvonal), $x^2 + y^2 = z^2$ (körkúp);

C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, a \operatorname{tg} t + \boldsymbol{j}\, b \cos t + \boldsymbol{k}\, b \sin t$, $z = xy/a$ (hiperbolikus paraboloid);

D) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, at \sin t + \boldsymbol{j}\, bt \cos t + \boldsymbol{k}\, ct^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ (elliptikus paraboloid);

E) $\boldsymbol{r}(t) = 2\,\boldsymbol{i}\, t^2 + \boldsymbol{j}\,(3\,t^2 + t + 1) + \boldsymbol{k}\,(2t - 5)$, $3x - 2y + z + 7 = 0$ (sík).

Útmutatás. Igazolásul elegendő megmutatni, hogy $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ azonosan (vagyis minden szóba jöhető t-re) kielégíti a felület egyenletét. Pl. a C) esetben

$$z(t) = b \sin t = \frac{x(t)\, y(t)}{a} = \frac{a \operatorname{tg} t \cdot b \cos t}{a} = b \sin t, \quad \text{q. e. d.}$$

7. Igazoljuk, hogy az alábbi térgörbék a mellékelt felületpár metszésvonalaként nyerhetők:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} \cos^2 t + \boldsymbol{j} \sin t \cos t + \boldsymbol{k} \sin t$ (VIVIANI-görbe), $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (gömb), $x^2 + y^2 - x = 0$ (körhenger).

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} \cos t \cos \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \boldsymbol{j} \cos t \sin \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \boldsymbol{k} \sin t$ (gömbi loxodrom), $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (gömb), $\varrho = \left|\cos \left(2 \operatorname{arc\,tg} e^{\varphi} - \frac{\pi}{2}\right)\right|$ $\left(\text{henger, } \varrho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right)$;

C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} \cos t + \boldsymbol{j} \sin t + \boldsymbol{k} \cos 2t$, $z = x^2 - y^2$ (hiperbolikus paraboloid), $x^2 + y^2 = 1$ körhenger.

Útmutatás. Igazolásul elegendő megmutatni, hogy $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ azonosan kielégíti mindkét felület egyenletét. Pl. az A) esetben (9. ábra).

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = \cos^4 t + \sin^2 t \cos^2 t + \sin^2 t = \cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) +$$
$$+ \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$
$$x^2(t) + y^2(t) = \cos^4 t + \sin^2 t \cos^2 t = \cos^2 t = x(t), \quad \text{q. e. d.}$$

8. Állítsuk elő az alábbi térgörbék megadott pontjához tartozó érintővektort:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t-3) + \boldsymbol{j}(t^2+1) + \boldsymbol{k}\,t^2, \quad t = 2;$

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\sin t + \boldsymbol{j}\cos t + \boldsymbol{k}\dfrac{1}{\cos t}, \quad t = 0;$

C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\dfrac{t}{1+t} + \boldsymbol{j}\dfrac{1+t}{t} + \boldsymbol{k}\,t^2, \quad t = 1.$

Megoldás. A deriváltvektor veendő a megadott helyen.

A) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}\,t + 2\,\boldsymbol{k}\,t, \ \dot{\boldsymbol{r}}\,(2) = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}\,;$

B) $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{i}\,;$ C) $\dot{\boldsymbol{r}}(1) = \dfrac{1}{4}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\,.$

9. Keresendők az alábbi térgörbék azon (t_0 paraméterű) pontjai, ahol az érintővektor a kívánt tulajdonságú:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t - e^t) - \boldsymbol{j}\cos t + \boldsymbol{k}\dfrac{t^2}{2}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \boldsymbol{0}$ (nincs érintő);

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(\sin t - t\cos t) + \boldsymbol{j}(\cos t + t\sin t) + \boldsymbol{k}(t+1), \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ párhuzamos az y, z síkkal.

C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\dfrac{t^4}{4} + \boldsymbol{j}\dfrac{t^3}{3} + \boldsymbol{k}\dfrac{t^2}{2}; \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t)_0$ párhuzamos az $x + 3y + 2z = 0$ síkkal.

Megoldás. Felírandó $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ és vizsgálandó, hogy mely t_0 paraméterű pontokban teljesül A) az $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = 0$, B) az $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\,\boldsymbol{i} = \dot{x}(t_0) = 0$ C) az $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\,\boldsymbol{n} = 0$ feltétel.

A) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i}(1 - e^t) + \boldsymbol{j}\sin t + \boldsymbol{k}\,t, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{0},$ tehát $t_0 = 0;$

B) $\dot{x}(t) = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t, \quad \dot{x}(t_0) = t_0\sin t_0 = 0,$ tehát $t_{0k} = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$

C) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i}\,t^3 + \boldsymbol{j}\,t^2 + \boldsymbol{k}\,t, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\,\boldsymbol{n} = t_0^3 + 3\,t_0^2 + 2\,t_0 = t_0\,(t_0 + 1)\,(t_0 + 2) = 0,$ tehát $t_{01} = 0, \ t_{02} = -1, \ t_{03} = -2.$

10. Vizsgáljuk az alábbi térgörbék és hordozó felületük megadott jellegzetes görbéi hajlásszögét; nevezetesen

A) az $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,a\cos t + \boldsymbol{j}\,a\sin t + \boldsymbol{k}\,bt$ csavarvonal és az $x^2 + y^2 = a^2$ körhenger alkotói,

B) az $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,t\cos(3\ln t) + \boldsymbol{j}\,t\sin(3\ln t) + 2\,\boldsymbol{k}\,t$ kúpos csavarvonal és az $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0$ körkúp alkotói,

C) az $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,a\cos t\cos\left[\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right] + \boldsymbol{j}\,a\cos t\sin\left[\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right] +$ $+ \boldsymbol{k}\,a\sin t$ gömbi loxodrom és az $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ gömb délkörei hajlásszögét.

Megoldás. A keresett hajlásszögek cosinusát a metszéspontokban vett érintő egységvektorok skaláris szorzata szolgáltatja.

A) A hengeralkotók egyenlete $\bar{\varrho}(\tau) = \boldsymbol{k}\,\tau$, érintő egységvektora $\dot{\bar{\varrho}} = \boldsymbol{k}$. A csavarvonal érintővektora $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = -\,\boldsymbol{i}\,a \sin t + \boldsymbol{j}\,a \cos t + kb$, ennek hossza $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Végül

$$\cos(\boldsymbol{r}, \dot{\bar{\varrho}}) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\,\boldsymbol{k}}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|} = \frac{\dot{z}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{const.}$$

A csavarvonal tehát állandó szög alatt metszi a henger alkotóit.

B) A kúpalkotók maguk a kúpos csavarvonal helyzetvektorai, tehát $\bar{\varrho}(\tau) = \boldsymbol{r}(\tau) = \boldsymbol{i}\,\tau \cos(3 \ln \tau) + \boldsymbol{j}\,\tau \sin(3 \ln \tau) + 2k\,\tau$. A kúpos csavarvonal érintővektora $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i}\,[\cos(3 \ln t) - 3 \sin(3 \ln t)] + \boldsymbol{j}\,[\sin(3 \ln t) + 3 \cos(3 \ln t)] + 2\boldsymbol{k}$. Végül $t = \tau$ mellett [$\cos(3 \ln t) = c$, $\sin(3 \ln t) = s$ jelöléssel]

$$\cos(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\,\boldsymbol{r}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,|\boldsymbol{r}(t)|} = \frac{tc\,(c - 3s) + ts\,(s + 3c) + 4t}{t\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{5}{14}}\,.$$

Eszerint a kúpos csavarvonal is állandó szög alatt metszi a kúp alkotóit.

C) A gömb $\varphi_0 = \text{const}$ szögű délkörének egyenlete $\bar{\varrho}(\tau) = \boldsymbol{i}\,a \cos\tau \cos\varphi_0 + \boldsymbol{j}\,a \cos\tau \sin\varphi_0 + \boldsymbol{k}\,a \sin\tau$, érintővektora $\dot{\bar{\varrho}}(\tau) = \boldsymbol{i}\,a \sin\tau \cos\varphi_0 - \boldsymbol{j}\,a \sin\tau \sin\varphi_0 + \boldsymbol{k}\,a \cos\tau$. A gömbi loxodrom érintővektora — a $\varphi = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ függvény

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos t}$$

deriváltjának figyelembevételével —

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i}\,a\,(-\sin t \cos\varphi - \sin\varphi) + \boldsymbol{j}\,a\,(-\sin t \sin\varphi + \cos\varphi) + \boldsymbol{k}\,a \cos t.$$

Végül $\tau = t$, $\varphi_0 = \varphi = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ mellett

$$\cos(\dot{\bar{r}}, \dot{\bar{\varrho}}) = \frac{\dot{\bar{r}}(t)\,\dot{\bar{\varrho}}(t)}{|\dot{\bar{r}}(t)|\,|\dot{\bar{\varrho}}(t)|} =$$

$$= \frac{a^2[(-\sin t \cos\varphi - \sin\varphi)(-a \sin t \cos\varphi) + (-\sin t \sin\varphi + \cos\varphi)(-\sin t \sin\varphi) + \cos^2 t]}{a\sqrt{(-\sin t \cos\varphi - \sin\varphi)^2 + (-\sin t \sin\varphi + \cos\varphi)^2 + \cos^2 t}\cdot a\sqrt{\sin^2 t \cos^2\varphi + \sin^2 t \sin^2\varphi + \cos^2 t}} =$$

$$= \frac{\sin^2 t \cos^2\varphi + \sin^2 t \sin^2\varphi + \cos^2 t}{\sqrt{\sin^2 t + 1 + \cos^2 t}\cdot\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ily módon a gömbi loxodrom is állandó (esetünkben 45°-os) szög alatt metszi a gömb délköreit.

β) Taylor-sor. Integrál. Differenciálegyenlet

I°. A függvény Taylor-sora. 1'. Ha az $(\boldsymbol{r}t)$ függvény a t_0 környezetben $n+1$-szer differenciálható, akkor — a skaláranalízis mintájára — előállítható

$$\boldsymbol{r}(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k+\frac{\boldsymbol{m}_{n+1}(\tau)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}=\boldsymbol{T}_n(t)+\boldsymbol{R}_n(t) \qquad (1)$$

alakban, vagyis egy n-edfokú $\boldsymbol{T}_n(t)$ Taylor-*polinom* és egy $n+1$-edfokú $\boldsymbol{R}_n(t)$ *maradéktag* összegeként, ahol azonban általában $m_{n+1}(\tau)=\boldsymbol{r}^{(n+1)}(\tau)+\boldsymbol{e}_{n+1}$, összhangban az α) III° 2'-cel, valamint a b) α) I° 3'-cel.

2'. Ha a $\boldsymbol{r}(t)$ függvény a t_0 helyen akárhányszor differenciálható, továbbá

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{R}_n(t)=0, \quad |t-t_0|<r,$$

akkor a függvény — a skaláranalízis mintájára — előállítható

$$\boldsymbol{r}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k, \quad |t-t_0|<r, \qquad (2)$$

alakban, más szóval a t_0 bizonyos r környezetében végtelen konvergens Taylor-*sor*ba fejthető.

Az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény Taylor-sorát — speciális paraméter és koordináta-rendszer mellett — a b) α) V°-ben felhasználjuk majd a térgörbe közelítő egyenletének előállítására.

II°. A függvény különféle integráljai. 1'. A b) β) I°-ben részletesen tárgyaljuk majd a szakonként sima térgörbe *ívhossz-számításá*ra alkalmas

$$s=\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_i|\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)|\,\Delta t_i=\int_{t_1}^{t_2}|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \qquad (3)$$

integrált (11*a*. ábra).

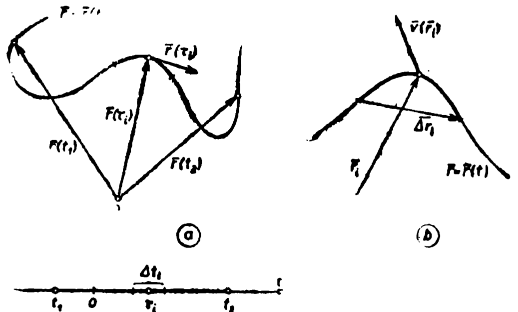
2'. *Az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény t szerinti integrálját*

$$\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_i\boldsymbol{r}(\tau_i)\,\Delta t_i=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{r}(t)\,dt \qquad (4)$$

módon értelmezzük; elégséges követelmény $\boldsymbol{r}(t)$ folytonossága.

Ilyen integrálok szerepelnek pl. a görbe menti, $\varrho(s)$ sűrűségű tömegeloszlás súlyponti vektorának kiszámításánál:

$$\boldsymbol{r}_0=\frac{\int_{s_1}^{s_2}\boldsymbol{r}(s)\,\varrho(s)\,ds}{\int_{s_1}^{s_2}\varrho(s)\,ds}.$$



11. ábra

3'. *A $v(\boldsymbol{r})$ függvény $G[\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ t_1\leqq t\leqq t_2]$ görbe menti (skaláris) integrálját*

$$I=\lim_{\max|\Delta\boldsymbol{r}_i|\to 0}\sum_i v(\boldsymbol{r}_i)\Delta\boldsymbol{r}_i=\int_{(G)}v(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}=\int_{t_1}^{t_2}v[\boldsymbol{r}(t)]\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt \qquad (5)$$

módon értelmezzük (11*b*. ábra); követelmény, hogy $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ folytonos, G szakaszonként sima* legyen.

Ilyen integrállal számítható pl. a $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ erővektor munkája a G, a $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ sebességvektor cirkulációja a (zárt) C görbe mentén:

$$L = \int_{(G)} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}, \qquad \Gamma = \oint_{(C)} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}.$$

Megjegyzendő, hogy a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény G görbe menti integrálja általában függ a G alakjától és végpontjaitól. Mint a 3. § a) α) III°-ban látni fogjuk, bizonyos speciális tulajdonságú $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény esetén az integrál független a G alakjától.

4'. *Az $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény G görbe menti (vektoriális) integrálját*

$$\lim_{\max|\Delta \boldsymbol{r}_i| \to 0} \sum_i \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_i) \times \Delta \boldsymbol{r}_i = \int_{(G)} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}[\boldsymbol{r}(t)] \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt \tag{6}$$

módon értelmezzük; követelmény $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ folytonossága és G szakaszonkénti simasága.

Ilyen integrállal számítható pl. a térgörbén mozgó pont helyzetvektora által súrolt terület vektora**:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{r}(t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt;$$

síkgörbe esetén e formula az ismert,

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{k}}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt$$

alakú LEIBNIZ-féle szektorképletbe megy át.

III°. Néhány differenciálegyenlet-típus. 1'. E helyen csupán néhány, a műszaki alkalmazásokban előforduló vektor-differenciálegyenlet megemlítésére szorítkozunk. Ilyenek pl.

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{r}} - p\boldsymbol{r} = 0, \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{p}(t), \quad \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

E differenciálegyenletek általános, illetve bizonyos feltételeknek megfelelő partikuláris megoldását a 7. és 8. példában állítjuk elő.

Példák és feladatok

1. Állítsuk elő az alábbi vektor-skalár függvényeknek a megadott hely környezetére érvényes TAYLOR-sorát:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}t^3 - 2\boldsymbol{j}t^2 + 4\boldsymbol{k}t,\ t_0 = 1$; B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\sin t + \boldsymbol{j}\cos t + \boldsymbol{k}e^t,\ t_0 = 0$.

* L. a b) α) I°-ben!
** Vö. a c) α) II° 3'-vel!

Megoldás. Előállítandók az $\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)$, $k = 0, 1, 2 \dots$ deriváltak, majd ezek felhasználásával — a (2) formula szerint — felírható a TAYLOR-sor.

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}t^3 - 2\boldsymbol{j}t^2 + 4\boldsymbol{k}t, \quad \boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k},$

$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = 3\boldsymbol{i}t^2 - 4\boldsymbol{j}t + 4\boldsymbol{k}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(1) = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k},$

$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = 6\boldsymbol{i}t - 4\boldsymbol{j}, \quad \ddot{\boldsymbol{r}}(1) = 6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j},$

$\dddot{\boldsymbol{r}}(t) = 6\boldsymbol{i} \quad \dddot{\boldsymbol{r}}(1) = 6\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{r}^{(4)}(t) = \boldsymbol{r}^{(5)}(t) = \dots = 0, \quad \boldsymbol{r}^{(4)}(1) = \boldsymbol{r}^{(5)}(1) = \dots = 0.$

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{r}^{(k)}(1)}{k!}(t-1)^k = (\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) + (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})(t-1) +$$

$$+ (6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})\frac{(t-1)^2}{2!} + 6\boldsymbol{i}\,\frac{(t-1)^3}{3!}.$$

Látható, hogy a t^k, $k = 0, 1, 2 \dots, n$ hatványokból felépülő $\boldsymbol{r}(t)$ függvény TAYLOR-sora n-ed fokú polinom, és bármely t-re pontosan adja az $\boldsymbol{r}(t)$ értékét. Más felépítésű $\boldsymbol{r}(t)$ függvényeknél a TAYLOR-polinom csak közelítőleg adja meg az $\boldsymbol{r}(t)$ értékét, s azt is csak a t_0 hely kis környezetében.

B) A $\sin t$, $\cos t$ és e^t TAYLOR-sorának ismeretében közvetlenül felírhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{r}(t) = (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})\,t + (-\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\frac{t^2}{2!} + (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})\frac{t^3}{3!} + \dots.$$

2. Kiszámítandó az alábbi térgörbe-darabok ívhossza:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,t\cos(3\ln t) + \boldsymbol{j}\,t\sin(3\ln t) + 2\boldsymbol{k}\,t, \quad 0 \leqq t \leqq \tau;$

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,at + \boldsymbol{j}\sqrt{3ab}\,t^2 + 2\boldsymbol{k}\,bt^3, \quad 0 \leqq t \leqq 1;$

C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t+3) + \boldsymbol{j}\frac{t^2}{2} + \boldsymbol{k}\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \quad -1 \leqq t \leqq 1;$

D) $\boldsymbol{r}(t)\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - 1\right| + \boldsymbol{j}(t+1) + \boldsymbol{k}\frac{t^2}{2} \quad 0 \leqq t \leqq \frac{3}{8};$

E) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}t^2 + 2\boldsymbol{j}t^6 + 3\boldsymbol{k}t^4, \quad -1 \leqq t \leqq 2;$

F) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\frac{\cos t}{\operatorname{ch} t} + \boldsymbol{j}\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} + \boldsymbol{k}(t - \operatorname{th} t), \quad 0 \leqq t \leqq 10.$

Megoldás. A (3) alatti

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$$

formulát alkalmazzuk.

A) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i}\,[\cos(3\ln t) - 3\sin(3\ln t)] + \boldsymbol{j}\,[\sin(3\ln t) + 3\cos(3\ln t)] + 2\boldsymbol{k},$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}, \quad s = \int_0^{\tau} \sqrt{14}\,dt = \tau\sqrt{14}.$$

B) $\dot{r}(t) = i\,a + j\,2\sqrt{3ab}\,t + 6kbt^2, \quad |\dot{r}(t)| = \sqrt{a^2 + 4\cdot 3\,abt^2 + 36\,b^2 t^4} =$

$$= \sqrt{(a + 6\,bt^2)^2} = a + 6\,bt^2, \quad s = \int_0^1 (a + 6\,bt^2)\,dt = \left[at + 2\,bt^3\right]_0^1 = a + 2b.$$

C) $\dot{r}(t) = i + j\,t + k\sqrt{2t}, \quad |\dot{r}(t)| = \sqrt{1 + t^2 + 2t} = 1 + t,$

$$s = \int_{-1}^{1} (1 + t)\,dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2.$$

D) $\dot{r}(t) = i\sqrt{3}\,t + j + k\,t, \quad |\dot{r}(t)| = \sqrt{3t^2 + 1 + t^2} = \sqrt{1 + 4t^2},$

$$s = \int_0^{3/8} \sqrt{1 + 4t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsh} 3/4} \operatorname{ch}^2 u\,du = \frac{1}{4}\left[\operatorname{sh} u\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} + u\right]_0^{\operatorname{arsh} 3/4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}\sqrt{1 + \frac{9}{16}} + \operatorname{arsh}\frac{3}{4}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{15}{16} + \ln\left(\frac{3}{4} + \sqrt{1 + \frac{9}{16}}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{15}{16} + \ln 2\right].$$

E) $s = 129.$ F) $s = 10.$

3. Meghatározandó az

A) $r(t) = i\,at\cos t + j\,at\sin t + k\,ct, \quad 0 \leqq t \leqq 2n\pi \quad (n = 1, 2 \ldots)$

B) $r(t) = i\,at + k\,ct, \quad 0 \leqq t \leqq \tau$

térgörbe menti $\varrho(s) = |r(s)|$ sűrűségű anyageloszlás tömege.

Megoldás. A kérdezett tömeg

$$m = \int_{s_1}^{s_2} \varrho(s)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} |r(t)|\,|\dot{r}(t)|\,dt$$

módon számítható.

A) $|r(t)| = \sqrt{a^2t^2 + c^2t^2} = bt, \quad |\dot{r}(t)| = \sqrt{a^2 + a^2t^2 + c^2} = \sqrt{a^2t^2 + b^2},$
ahol $b = \sqrt{a^2 + c^2}$;

$$m = \int_0^{2n\pi} bt\cdot\sqrt{a^2t^2 + b^2}\,dt = \frac{b}{2a^2}\int_{b^2}^{d_n^2}\sqrt{u}\,du = \frac{b}{3a^2}\left[u^{3/2}\right]_{b^2}^{d_n^2} =$$

$$= \frac{b}{3a^2}(d_n^3 - b^3), \quad \text{ahol} \quad d_n = \sqrt{b^2 + 4a^2\pi^2n^2}.$$

B) $|r(t)| = t\sqrt{a^2 + c^2} = bt, \quad |\dot{r}(t)| = \sqrt{a^2 + c^2} = b;$

$$m = \int_0^{\tau} bt\cdot b\,dt = b^2\int_0^{\tau} t\,dt = \frac{b^2\tau^2}{2}.$$

4. Meghatározandó az

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \sin t + \boldsymbol{k}\, bt, \quad 0 \leqq t \leqq \pi;$

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\, t, \quad -a \leqq t \leqq a$

térgörbe menti, egyenletes sűrűségű tömegeloszlás súlypontja.

Megoldás. A kérdezett súlypont

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\int\limits_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{r}(s)\, \varrho_0\, ds}{\int\limits_{s_1}^{s_2} \varrho_0\, ds} = \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{r}(t)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt}{\int\limits_{t_1}^{t_2} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt}$$

módon számítható.

A) $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \int\limits_0^\pi |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt = \int\limits_0^\pi \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \pi \sqrt{a^2 + b^2},$

$$\int\limits_0^\pi \boldsymbol{r}(t)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt = \int\limits_0^\pi (\boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \sin t + \boldsymbol{k}\, bt) \cdot \sqrt{a^2 + b^2}\, dt =$$

$$= \boldsymbol{i}\, a \sqrt{a^2 + b^2} \int\limits_0^\pi \cos t\, dt + \boldsymbol{j}\, a \sqrt{a^2 + b^2} \int\limits_0^\pi \sin t\, dt + \boldsymbol{k}\, b \sqrt{a^2 + b^2} \int\limits_0^\pi t\, dt =$$

$$= 0 + \boldsymbol{j}\, a \sqrt{a^2 + b^2} \cdot 2 + \boldsymbol{k}\, b \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{\pi^2}{2},$$

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\int\limits_0^\pi \boldsymbol{r}(t)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt}{\int\limits_0^\pi \boldsymbol{r}|(t)|\, dt} = \frac{2\boldsymbol{j}\, a \sqrt{a^2 + b^2} + \boldsymbol{k}\, \frac{b\pi^2}{2} \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi \sqrt{a^2 + b^2}} = 2\boldsymbol{j}\, \frac{a}{\pi} + \boldsymbol{k}\, \frac{b\pi}{2}.$$

B) $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}.$

5. Kiszámítandó az alábbi függvényeknek a megadott görbe menti integrálja:

A) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}(x^2 - 5y + 3yz) + \boldsymbol{j}(5x - 3xz - 2) + \boldsymbol{k}(xy - 4z);$
$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \sin t + \boldsymbol{k}\, ct, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi;$

B) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}(z - y) + \boldsymbol{j}(x - x) + \boldsymbol{k}(y - x), \quad \boldsymbol{r}_1(t) = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\, t, \quad 0 \leqq t \leqq 1;$
$\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{i} \sin t + \boldsymbol{j}(1 - \cos t) + \boldsymbol{k}\, \frac{2t}{\pi}, \quad 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2};$

C) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -2\boldsymbol{i}\, y + \boldsymbol{j}(1 + 3z^2) - 2\boldsymbol{k}\, y, \quad \boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \sin t, \quad 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2};$
$\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{j}(a - t) + \boldsymbol{k}\, t, \quad 0 \leqq t \leqq a; \quad \boldsymbol{r}_3(t) = \boldsymbol{i}\, a \sin t + \boldsymbol{k}\, a \cos t, \quad 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2};$

D) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}(y^2 - x^2) + 2\boldsymbol{j}\, yz - \boldsymbol{k}\, x^2;$
$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, t + \boldsymbol{j}\, t^2 + \boldsymbol{k}\, t^3, \quad 0 \leqq t \leqq 1;$

E) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}\, y + \boldsymbol{j}\, z + \boldsymbol{k}\, x, \quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \sin t + \boldsymbol{k}\, bt, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi.$

Megoldás. A 3'-ben tanult

$$I = \int_{(G)} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}[\mathbf{r}(t)]\, \dot{\mathbf{r}}(t)\, dt$$

formula alkalmazandó.

A) $\mathbf{v}[\mathbf{r}(t)] = \mathbf{i}(a^2\cos^2 t - 5a\sin t + 3act\sin t) + \mathbf{j}(5a\cos t - 3act\cos t - 2) + \mathbf{k}(a^2\sin t\cos t - 4ct)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\mathbf{i}\,a\sin t + \mathbf{j}\,a\cos t + \mathbf{k}\,bt$;

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^3\cos^2 t\sin t + 5a^2\sin^2 t - 3a^2 ct\sin^2 t + 5a^2\cos^2 t - 3a^2 ct\cos^2 t - 2a\cos t + a^2 c\cos t\sin t - 4c^2 t)\, dt = \left[\frac{1}{3}a^3\cos^3 t + \frac{5}{2}a^2 t - \frac{5}{4}a^2\sin 2t - \frac{3}{4}a^2 ct^2 + \frac{5}{2}a^2 t + \frac{5}{4}a^2\sin 2t - \frac{3}{4}a^2 ct^2 - 2a\sin t - \frac{1}{4}a^2 c\cos 2t - 2c^2 t^2\right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2(5 - 3\pi c) - 8\pi^2 c^2,$$

$$\lim_{c\to 0} I = 10\pi a^2.$$

B) $\mathbf{v}[\mathbf{r}_1(t)] = \mathbf{i}(t - t) + \mathbf{j}(t - t) + \mathbf{k}(t - t) = 0$, $I_1 = 0$;

$$\mathbf{v}[\mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{i}\left(\frac{2t}{\pi} - 1 + \cos t\right) + \mathbf{j}\left(\sin t\,\frac{2t}{\pi}\right) + \mathbf{k}(1 - \cos t - \sin t),$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}\frac{2}{\pi},$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{\pi}t\cos t - \frac{2}{\pi}t\sin t - \frac{2}{\pi}\cos t - \cos t - \frac{2}{\pi}\sin t + 1 + \frac{2}{\pi}\right) dt = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \approx 0{,}0243.$$

C) $$I_1 = \int_0^{\pi/2}(2a^2\sin^2 t + a\cos t)\, dt = \frac{\pi}{2}a^2 + a,$$

$$I_2 = \int_0^{a}(-1 - 3t^2 - 2a + 2t)\, dt = -a - a^2 - a^3, \quad I_3 = 0;$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \oint_{(G)} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \left(\frac{\pi}{2} - 1 - a\right)a^2 \approx (0{,}5703 - a)\, a^2.$$

D) $I = \dfrac{1}{35}$. **E)** $I = -\pi a^2$.

6. Integráljuk az alábbi függvényeket a feltüntetett görbe mentén:

A) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}(y^2 - x^2 - 2yz) - 2\boldsymbol{j}\,xz + 2\boldsymbol{k}\,xz$, G: a 12*a*. ábrán, (G_1: $y = x$ egyenes, G_2: $z = (x-1)^2$, $y = 1$ parabola, G_3: tetszőleges);

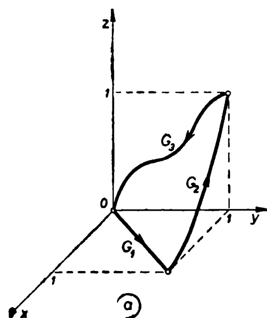
B) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -2\boldsymbol{i}\,yz - 2\boldsymbol{j}\,xz + 4\boldsymbol{k}\,xy$, G: a 12*b*. ábrán, (G_1: csavarvonal, G_2: egyenes);

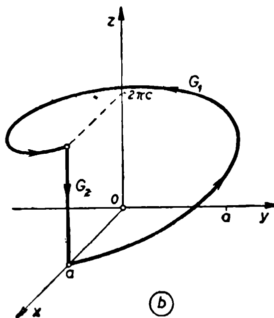
C) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}\,x(y^2 - z^2) + \boldsymbol{j}\,y(z^2 - x^2) + \boldsymbol{k}z(x^2 - y^2)$, G: a 12*c*. ábrán, (G_1: egyenes, G_2: egyenes, G_3: kör, G_4: egyenes).

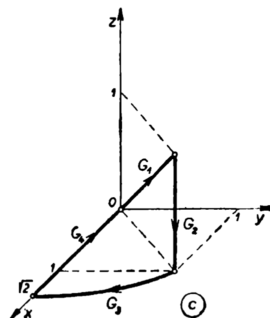
Útmutatás. A) G_1: $z = 0$, $x = y$, $\boldsymbol{v} = 0$, $I_1 = 0$;

$$I_2 = \int_{x=1}^{0} [1 - x^2 - 2(x-1)^2 + 2x(x-1)^2 + 2(x-1)]\,dx = 0{,}2;$$

$$G_3\colon x = dx = 0, \quad I_3 = 0; \quad I = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = I_1 + I_2 + I_3 = 0{,}2.$$







12. ábra

B) $$I_1 = 2c\,a^2 \int_0^{2\pi} (-t\cos 2t + \sin 2t)\,dt = 0;$$

$$G_2\colon x = a,\ dx = 0, \quad y = dy = 0, \quad I_2 = 0; \quad I = \oint_{G} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = I_1 + I_2 = 0.$$

(Ez nem minden zárt görbére igaz!)

C) G_1: $x = y = z$, $I_1 = 0$; G_2: $x = y = 1$, $I_2 = 0$;

$$G_3\colon \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\sqrt{2}\cos t + \boldsymbol{j}\sqrt{2}\sin t, \quad \frac{\pi}{4} \geqq t \geqq 0, \quad I_3 = -4\int_{\pi/4}^{0} \sin t \cos t\,dt = 1;$$

$$G_4\colon y = z = 0, \quad I_4 = 0; \quad I = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{4} I_k = 1.$$

7. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket (a megadott feltételek mellett):

A) $\ddot{\boldsymbol{r}} = 0$; B) $\dot{\boldsymbol{r}} - p\boldsymbol{r} = 0$, $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$;

C) $\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega^2 \boldsymbol{r} = 0$, $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0$, $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{v}_0$.

Megoldás. A) Kétszeri határozatlan integrálással az általános megoldás $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}\,t + \boldsymbol{b}$.

B) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}\,e^{\lambda t}$ megoldási feltevés helyettesítésével nyerjük, hogy

$$\boldsymbol{c}\,e^{\lambda t}\,(\lambda - p) = 0, \quad \lambda - p = 0, \quad \lambda = p.$$

Ezek szerint az általános megoldás $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}\,e^{pt}$, a keresett partikuláris megoldás pedig $[\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}_0$ értelmében$]$ $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0\,e^{pt}$.

C) Az előbbi $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}\,e^{\lambda t}$ feltevéssel nyerhető, hogy

$$\boldsymbol{c}\,e^{\lambda t}\,(\lambda^2 + \omega^2) = 0, \quad \lambda^2 + \varphi^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\, i\,\omega.$$

Az általános megoldás tehát

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{c}_1\,e^{i\omega t} + \boldsymbol{c}_2\,e^{-i\omega t} = \boldsymbol{a}\cos\omega\,t + \boldsymbol{b}\sin\omega\,t,^{*}$$

a keresett partikuláris megoldás pedig — az

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_0, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \omega\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}_0$$

felhasználásával —

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0\cos\omega\,t + \frac{\boldsymbol{v}_0}{\omega}\sin\omega\,t.$$

8. Állítsuk elő az alábbi differenciálegyenletek egy-egy első integrálját:

A) $\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{p}(t)$; B) $\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$.

Megoldás. A) Mindkét oldalt skalárisan szorozzuk $\dot{\boldsymbol{r}}$-ral, majd t szerint integráljuk, a jobb oldalon utólag az $\boldsymbol{r}$ változót bevezetve:

$$\dot{\boldsymbol{r}}\,\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) = \boldsymbol{p}\,\dot{\boldsymbol{r}}, \quad \frac{1}{2}\left[\dot{\boldsymbol{r}}^2\right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{p}\,\dot{\boldsymbol{r}}\,dt = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{r}\,.$$

Végeredményben

$$\frac{1}{2}\,(\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - \dot{\boldsymbol{r}}_1^2) = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{p}\,d\boldsymbol{r}.$$

B) $\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = 0$, tehát $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{c}$.

* A $\boldsymbol{c}\,e^{i\omega t}$ kifejezés ún. komplex vektor: l. pl. *Madelung* [M. 23.].

b) Térgörbék differenciálgeometriája

α) A jellemzők értelmezése s szerinti deriváltakkal

I° Térgörbe ívhossza. 1′. **Definició.** *Egy térgörbeszakasz ívhossz-án húrpoligonjai hosszának felső határát értjük, ha ilyen egyáltalán létezik.*

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a térgörbeszakasz nem mérhető ívhosszú.

2′. Az alábbiakban ún. *sima* térgörbeszakaszon vizsgálódunk; az ilyen görbeszakasz belsejében mindenütt létezik (gyenge) érintő, és ez irányát folytonosan változtatja (vagy ami ugyanaz, ott mindenütt létezik erős érintő), a görbeszakasz végpontjain pedig legalább bal-, illetve jobboldali érintő létezik; ennek megfelelően a (gyenge) derivált az $[\alpha,\beta]$ köz belsejében mindenütt létezik, zérustól különböző és folytonos (vagy ami ugyanaz, az erős derivált ott mindenütt létezik és zérustól különböző), a köz határain pedig legalább bal-, illetve jobboldali határértékkel rendelkezik.

Tétel. *A sima térgörbeszakasz mérhető ívhosszú (rektifikálható) és mérőszáma*

$$s = \int_\alpha^\beta |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(t)}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt. \qquad (1)$$

3′. Ui. az a) α) II° értelmében az $[\alpha,\beta]$ közön folytonos $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ugyanott egyenletesen is folytonos, tehát $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|t_i - t_{i-1}| < \delta(\varepsilon) \text{ esetén } |\dot{\mathbf{r}}(t_i) - \dot{\mathbf{r}}(t_{i-1})| < \varepsilon.$$

Ha $t_{i-1} \leqq t_i$, $\tau_i \leqq t_i$, akkor még inkább

$$|t_i - \tau_i| < \delta(\varepsilon) \text{ és } |\dot{\mathbf{r}}(t_i) - \dot{\mathbf{r}}(\tau_i)| < \varepsilon.$$

Ez utóbbi szerint az $\dot{\mathbf{r}}(t_i)$ vektorok végpontjai a (rögzített) $\dot{\mathbf{r}}(\tau_i)$ vektor végpontja körül ε sugárral rajzolt K_i gömb (konvex tartomány) belsejébe esnek, azaz $\dot{\mathbf{r}}(t_i) \subset K_i$. Ekkor az a) α) III°-ban tanult tétel értelmében

$$\frac{\mathbf{r}(t_i)-\mathbf{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \subset K \quad \text{és így} \quad \left|\frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i} - \dot{\mathbf{r}}(\tau_i)\right| < \varepsilon, \qquad (2)$$

amely utóbbi a bizonyításhoz szükséges *segédtétel.*

A tételre visszatérve, az $[\alpha,\beta]$ köz $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = \beta$ *beosztás*ának megfelelő húrpoligon hossza

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta\mathbf{r}_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i.$$

Ha a beosztás már oly *finom,* hogy $\max \Delta t_i < \delta(\varepsilon)$, akkor a segédtétel értelmében

$$\left|\sum_i \left|\frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i - \sum_i |\dot{\mathbf{r}}(\tau_i)|\,\Delta t\right| = \left|\sum_i \left\{\left|\frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i}\right| - |\dot{\mathbf{r}}(\tau_i)|\right\}\Delta t_i\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_i \left|\frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i} - \dot{\mathbf{r}}(\tau_i)\right| \Delta t_i \leqq \varepsilon \sum_i \Delta t_i = \varepsilon(\beta-\alpha) = \varepsilon_*,$$

következésképpen

$$s = \lim_{\max\Delta t_i \to 0} \sum_i \left|\frac{\Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i = \lim_{\max\Delta t_i \to 0} \sum |\dot{\mathbf{r}}(\tau_i)|\,\Delta t_i = \int_\alpha^\beta |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,dt.$$

Az így nyert határérték *felső határ;* ui. a beosztás bármely finomításakor nyilván nagyobb (vagy legfeljebb változatlan) poligonhosszt nyerünk.

4'. *A szakaszonként sima* térgörbe ívhossza — az ívhossz additivitásának megfelelően — a sima szakaszok ívhosszának összegével egyenlő.

Az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény t paramétere a legkülönbözőbb geometriai jelentésű lehet. Amint látni fogjuk, igen előnyös, ha éppen a térgörbe (valamely rögzített pontjától mért) ívhosszát alkalmazhatjuk paraméterként; az ívhossz ún. *természetes paraméter.*

II°. Kísérő triéder. Görbület. Csavarodás. 1'. Sima térgörbe ívhossza rögzített pontjától futó pontjáig nyilván

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)|\, d\tau. \tag{3a}$$

Mindkét oldalt a t (változó felső határ) szerint deriválva, a

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \tag{3b}$$

összefüggést kapjuk. Eszerint természetes paraméter ($t \equiv s$) esetén — a deriváltat megkülönböztetésül '-vel jelölve — írhatjuk, hogy

$$|\boldsymbol{r}'| = \frac{ds}{ds} = 1$$

s így

$$\boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{t} \tag{4}$$

nem más, mint az *érintő egységvektor.*

Az $\boldsymbol{r}(s)$ függvény második, ívhossz szerinti deriváltja — állását tekintve — merőleges az érintőre, lévén

$$\boldsymbol{r}'^2 = 1 \text{ deriválásával } 2\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'' = 0,$$

— abszolút értékét tekintve pedig, mint a 3'-ben igazoljuk — a G görbülettel (az R görbületi sugár reciprokával) egyenlő, azaz

$$|\boldsymbol{r}''| = G = \frac{1}{R}.$$

E derivált tehát

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{t}' = G\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}}{R} \tag{5}$$

alakú, ahol $\boldsymbol{n}$ az ún. *főnormális egységvektor.*

Végül az érintő és a főnormális egységvektor vektoriális szorzataként nyerjük az ún. *binormális egységvektort*:

$$\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}. \tag{6}$$

A fentebbiek értelmében $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{b}$ egymásra kölcsönösen merőleges, és e sorrendben jobbrendszert képez. Ilyen vektorhármas az $\boldsymbol{r}(s)$ térgörbe minden olyan s paraméterű pontjához tartozik, amelynél az $\boldsymbol{r}'(s)$, $\boldsymbol{r}''(s)$ létezik és zérustól különböző. Ezért *a $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ vektorhármast a térgörbe kísérő triéder-ének nevezzük.*

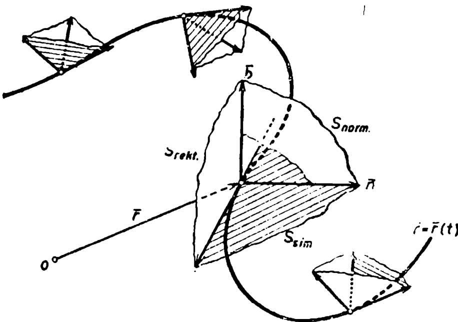
2'. Az említett vektorhármas három, egymásra kölcsönösen merőleges síkot határoz meg, mégpedig (13. ábra)

$\boldsymbol{t}$ és $\boldsymbol{n}$ az ún. *simulósík*ot,
$\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{b}$ az ún. *normálsík*ot,
$\boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{t}$ az ún. *rektifikáló sík*ot.

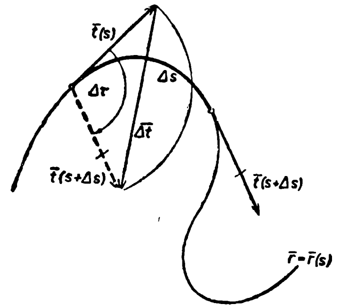
Megjegyezendő, hogy a simulósíkot a $\boldsymbol{t}(s)$ érintőre illeszkedő és a $\boldsymbol{t}(s+\Delta s) = \boldsymbol{t}(s) + \Delta\boldsymbol{t}$ érintővel párhuzamos sík $\Delta s \to 0$-nál adódó határhelyzeteként szokás értelmezni. E sík nyilván tartalmazza a

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{t}}{\Delta \boldsymbol{s}} = \boldsymbol{t}' = \boldsymbol{r}''$$

vektort; a simulósík tehát valóban a $\boldsymbol{t}$ és $\boldsymbol{n}$ síkja, mint fentebb mondottuk.



13. ábra



14. ábra

3'. ***Definíció.*** *A térgörbe* g ö r b ü l e t*-én az érintő (ívhossz szerinti) szögsebességének nagyságát értjük,* azaz

$$\frac{1}{R} = G = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \tau}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\tau}{ds} \right|. \tag{7}$$

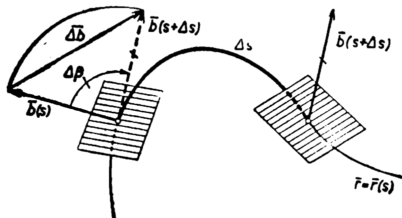
Mint már érintettük, e mennyiség előállítható a $\boldsymbol{t}$ érintő egységvektor első, vagy az $\boldsymbol{r}$ helyzetvektor második ívhossz szerinti deriváltjának abszolút értékeként (14. ábra):

$$|\boldsymbol{r}''| = |\boldsymbol{t}'| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \boldsymbol{t}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{2 \sin \frac{\Delta \tau}{2}}{\Delta s} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \tau}{\Delta s} \right| \cdot \lim_{\Delta \tau \to 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta \tau}{2}}{\frac{\Delta \tau}{2}} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \tau}{\Delta s} \right| = \frac{d\tau}{ds} = G \tag{8}$$

Ha speciálisan $\boldsymbol{r}'' \equiv 0$ és így $G \equiv 0$, akkor $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{c}_1$ és $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}_1 s + \boldsymbol{c}_2$, amely egyenest jellemez. Ily módon G az érintőtől való eltérés mértékének tekinthető.

4'. Definició. *A térgörbe* c s a v a r o d á s-*án (torzióján) a binormális (ívhossz szerinti) szögsebességet értjük*, azaz



15. ábra

$$T = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \frac{d\beta}{ds}. \tag{9}$$

E mennyiség abszolút értéke előállítható a $\boldsymbol{b}$ binormális egységvektor ívhossz szerinti deriváltjának abszolút értékeként (15. ábra):

$$|\boldsymbol{b}'| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \boldsymbol{b}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{2 \sin \frac{\Delta\beta}{2}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\beta}{\Delta s}\right| = |T|. \tag{10}$$

Síkgörbe esetén $\boldsymbol{b} = \text{const}$, tehát $\Delta\beta \equiv 0$ és így $T \equiv 0$. Eszerint T a simulósíkból való kitérés mértékének tekinthető.

III°. Frenet- é s Darboux-f é l e f o r m u l á k. 1'. A fentebbi megállapodás szerint $G \geqq 0$ és

$$\boldsymbol{t}' = G\boldsymbol{n}.$$

A $\boldsymbol{b}'$ irányának megállapítására deriváljuk s szerint a

$$\boldsymbol{b}^2 = 1 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{bt} = 0$$

azonosságokat:

$$2\,\boldsymbol{bb}' = 0 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{b}'\boldsymbol{t} + \boldsymbol{bt}' = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{t} = 0;$$

ezek szerint $\boldsymbol{b}' \perp \boldsymbol{b}$ és $\boldsymbol{b}' \perp \boldsymbol{t}$, azaz $\boldsymbol{b}' \parallel \boldsymbol{n}$. Írhatjuk tehát, hogy

$$\boldsymbol{b}' = -T\boldsymbol{n}.$$

Előjelválasztásunk szerint $T > 0$ esetén a $\boldsymbol{b}'$ a $\boldsymbol{t}$ körül, végpontjából nézve pozitív értelemben forgatja a triédert, ugyanúgy, mint a $\boldsymbol{t}'$ a $\boldsymbol{b}$ körül.

Végül az $\boldsymbol{n}'$ meghatározása:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}' &= (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t})' = -(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{b})' = -\boldsymbol{t}'\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{b}' = \\ &= -G(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}) + T(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}) = -G\boldsymbol{t} + T\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

A $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ *és* $\boldsymbol{b}$ *egységvektor ívhossz szerinti deriváltját szolgáltató* Frenet-*f é l e f o r m u l á k* tehát a következők (16. ábra):

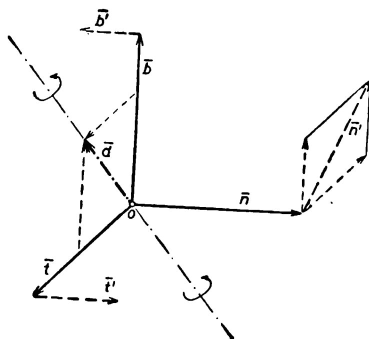
$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{t}' &= \quad\; G\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}' &= -G\boldsymbol{t} \qquad + T\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' &= \quad -T\boldsymbol{n}\end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

2'. Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\boldsymbol{d} = T\boldsymbol{t} + G\boldsymbol{b} \tag{12}$$

alakú Darboux-*f é l e v e k t o r segítségével a* Frenet-*féle formulák* .

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{n}' = \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b} \tag{13}$$



16. ábra

módon állíthatók elő (16. ábra). Ezek szerint a $\boldsymbol{t}'$, $\boldsymbol{n}'$ $\boldsymbol{b}'$ vektorhármas a $\boldsymbol{d}$ vektor mint tengely körül megegyező (a $\boldsymbol{d}$-nek a jobbcsavar szabály szerint megfelelő) értelemben és közös ($|\boldsymbol{d}| = \sqrt{G^2 + T^2}$ ívhossz szerinti) szögsebességgel forgatja a $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ triédert.

3'. A T csavarodás az $\boldsymbol{r}$ ívhossz szerinti deriváltjai segítségével is kifejezhető. Az (5) és a (11) második formulája alapján írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{r}''' = (G\,\boldsymbol{n})' = G'\boldsymbol{n} + G\,\boldsymbol{n}' = G'\boldsymbol{n} - G^2\,\boldsymbol{t} + GT\,\boldsymbol{b}, \tag{14}$$

majd $(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')/\boldsymbol{r}''^2$-tel való skaláris szorzás után

$$\frac{\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{r}''\,\boldsymbol{r}'''}{\boldsymbol{r}''^2} = \frac{G'}{G}(\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}) - G(\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{t}) + T(\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{b}) = T.$$

A kívánt *csavarodási formula* tehát

$$T = \frac{\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{r}''\,\boldsymbol{r}'''}{\boldsymbol{r}''^2}. \tag{15}$$

IV°. T é r g ö r b e t e r m é s z e t e s e g y e n l e t e. 1'. Mint tudjuk, a térgörbe görbülete és csavarodása az ívhossz függvénye, azaz

$$G = G(s) \quad \text{és} \quad T = T(s). \tag{16}$$

A Frenet-féle formulák felhasználásával igazolható* az alábbi ***tétel:***

A $G(s)$ és a $T(s)$ függvény előírása egyértelműen meghatározza a térgörbe alakját, de térbeli helyzetét szabadon hagyja.

Más szóval két térgörbe, amely $G(s)$ és $T(s)$ függvényben megegyezik, egymással fedésbe hozható. A görbület és a csavarodás tehát a koordináta-rendszertől függetlenül határozza meg a görbét; ezért a (16)-ot a görbe *természetes egyenleteinek*, a G-t és a T-t *természetes koordinátáinak* nevezzük.

2'. Itt említjük meg a következő ***tételt:***

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a térgörbe — két tetszőleges pontját fedésbe hozva — önmagában eltolható legyen, az, hogy

$$G \neq \text{const}, \quad T = \text{const}. \tag{17}$$

Ui. a (17) szükséges, mert az összeeső pontokban $G_1 = G_2$ és $T_1 = T_2$; de elégséges is, mert a természetes egyenletek megegyezése folytán a görbék egymással fedésbe hozhatók.

Megjegyzendő, hogy csak egyetlen önmagában eltolható térgörbe létezik: a közönséges *csavarvonal*. Ennél ui.

$$G = \frac{a}{a^2 + b^2} = \text{const}, \qquad T = \frac{b}{a^2 + b^2} = \text{const}.$$

A $G = 0$ esetben a csavarvonal egyenessé, a $T = 0$ esetben pedig körré fajul.

* L. pl. *Sárközy* [M. 3.] 45—46. o.

V°. Térgörbe egyenlete a kísérő triéderben. Állítsuk elő az $\boldsymbol{r}(s)$ térgörbe közelítő egyenletét az $s = 0$ paraméterű ponthoz tartozó kísérő triéderre mint koordináta-rendszerre vonatkozólag, feltéve, hogy $\boldsymbol{r}(s)$ függvény az $s = 0$ hely környezetében TAYLOR-sorba fejthető, azaz

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\,\boldsymbol{t} + y(s)\,\boldsymbol{n} + z(s)\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}(0) + \frac{\boldsymbol{r}'(0)}{1\,!}s + \frac{\boldsymbol{r}''(0)}{2\,!}s^2 + \frac{\boldsymbol{r}'''(0)}{3\,!}s^3 + \ldots .$$

Esetünkben a koordináta-rendszer választására, valamint a (4), (5) és (14) formulára való tekintettel

$$\boldsymbol{r}(0) = 0, \quad \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{r}''(0) = G\,\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{r}'''(0) = -\,G^2\,\boldsymbol{t} + G'\,\boldsymbol{n} + GT\,\boldsymbol{b}.$$

Ezeket a TAYLOR-sorba behelyettesítve, majd a bal és jobb oldal megfelelő koordinátáit egyeztetve, az utóbbiakban csupán az első zérustól különböző tagra szorítkozva, megkapjuk *a térgörbe közelítő s-paraméteres egyenletrendszerét* az $s = 0$ helyi kísérő triéderben, csúcspontjának környezetére vonatkozólag:

$$x \approx s, \quad y \approx \frac{G}{2}s^2, \quad z \approx \frac{GT}{6}s^3, \tag{18a}$$

ahol G és T az $s = 0$ helyen veendő (17*a*. ábra).

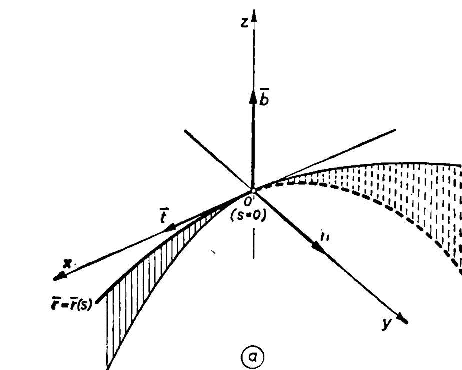
Állapítsuk meg a térgörbe vetületét a kísérő triéder síkjain! Az s paraméter kiküszöbölésével nyerjük, hogy

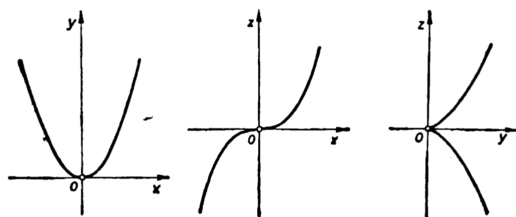
$$y \approx \frac{G}{2}x^2, \qquad z \approx \frac{GT}{6}x^3,$$

$$z = \frac{\sqrt{2}\,T}{3\sqrt{G}}y^{3/2}\,; \tag{18b}$$

a vetületi görbe tehát — az említett környezetben, közelítőleg —

a simulósíkon: másodfokú parabola,
a rektifikáló síkon: harmadfokú parabola,
a normálsíkon: szemikubikus parabola,
(17*b*. ábra).





17. ábra

Példák és feladatok

1. Kiszámítandó az alábbi térgörbe-darabok ívhossza:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,a\cos t + \boldsymbol{j}\,a\sin t + \boldsymbol{k}\,bt, \quad 0 \leqq t \leqq \tau;$

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,a\cos t\cos\left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \boldsymbol{j}\,a\cos t\sin\left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \boldsymbol{k}\,a\sin t,$

$0 \leqq t \leqq \tau;$

C) $r(t) = i\, e^t \cos t + j\, e^t \sin t + k\, e^t, \quad -\infty \leqq t \leqq \tau;$

D) $r(t) = 3\, i\, t^2 + j\,(t\sqrt{2} + 3) + 3\, k\, t^2, \quad 0 \leqq t \leqq 1.$

Útmutatás. Az (1) alatti

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{r}^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

formulát alkalmazzuk. (L. még az 1. § a) β) 2. példát!)

A) $|\dot{r}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad s = \int_0^\tau \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \tau\sqrt{a^2 + b^2}.$

B) $|\dot{r}| = a\sqrt{2}$ (l. az 1. §. a) α) 9. C) példát), $s = a\,\tau\sqrt{2}$.

C) $|\dot{r}| = \sqrt{3}\, e^t, \quad s = \sqrt{3}\int_{-\infty}^{\tau} e^t\, dt = \sqrt{3}\, e^\tau.$

D) $s = \frac{\sqrt{2}}{12}\operatorname{arsh} 6 + \frac{\sqrt{74}}{2}.$

2. Határozzuk meg az (ívhossz-paraméteresen adott)

$$r(s) = i\, a \cos\gamma s + j\, a \sin\gamma s + k\, b\gamma s \qquad \left(\frac{1}{\gamma} = \sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

közönséges csavarvonal tetszőleges pontjában A) az r', r'', r''' deriváltat, B) a kísérő triédert, C) a görbületet, D) a csavarodást, E) a FRENET-formulákat, F) a DARBOUX-vektort, G) a kísérő triéderben érvényes közelítő egyenletet.

Megoldás. A) $r' = -i\, a\gamma \sin\gamma s + j\, a\gamma\cos\gamma s + k\, b\gamma,$
$r'' = -i\, a\gamma^2\cos\gamma s - j\, a\gamma^2 \sin\gamma s, \quad r''' = i\, a\gamma^3\sin\gamma s - j\, a\gamma^3\cos\gamma s;$

B) A II° értelmében a kísérő triéder:

$$t = r' = -i\, a\gamma\sin\gamma s + j\, a\gamma\cos\gamma s + k\, b\gamma, \quad n = \frac{r''}{|r''|} = -i\cos\gamma s - j\sin\gamma s,$$

$$b = t \times n = i\, b\gamma\sin\gamma s - j\, b\gamma\cos\gamma s + k\, a\gamma;$$

C) A (8) formula értelmében a görbület:

$$G = |r''| = a\gamma^2 = \frac{a}{a^2 + b^2} = \text{const};$$

D) A (10) formula értelmében a csavarodás nagysága:

$$|T| = |b'| = |b|\gamma^2 = \frac{|b|}{a^2 + b^2} = \text{const},$$

a (15) formula szerint pedig az (előjeles) csavarodás:

$$T = \frac{r'\, r''\, r'''}{r''^2} = \frac{1}{G^2}\begin{vmatrix} -a\gamma\sin\gamma s & a\gamma\cos\gamma s & b\gamma \\ -a\gamma^2\cos\gamma s & -a\gamma^2\sin\gamma s & 0 \\ a\gamma^3\sin\gamma s & -a\gamma^3\cos\gamma s & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2 b\gamma^6}{a^2\gamma^4} =$$

$$= b\gamma^2 = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{sign} T = \operatorname{sign} b;$$

E) A (11) alatti FRENET-formulák:

$$\boldsymbol{t}' = G\boldsymbol{n} = a\gamma^2 (-\boldsymbol{i} \cos \gamma s - \boldsymbol{j} \sin \gamma s) = -\boldsymbol{i}\, a\, \gamma^2 \cos \gamma s - \boldsymbol{j}\, a\, \gamma^2 \sin \gamma s,$$

$$\boldsymbol{n}' = -G\boldsymbol{t} + T\boldsymbol{b} = -a\gamma^2 (-\boldsymbol{i}\, a\, \gamma \sin \gamma s + \boldsymbol{j}\, a\, \gamma \cos \gamma s + \boldsymbol{k}\, b\, \gamma) + \\ + b\gamma^2 (\boldsymbol{i}\, b\, \gamma \sin \gamma s - \boldsymbol{j}\, b\, \gamma \cos \gamma s + \boldsymbol{k}\, a\, \gamma) = \boldsymbol{i}\, \gamma \sin \gamma s - \boldsymbol{j}\, \gamma \cos \gamma s,$$

$$\boldsymbol{b}' = -T\boldsymbol{n} = -b\gamma^2 (-\boldsymbol{i} \cos \gamma s - \boldsymbol{j} \sin \gamma s) = \boldsymbol{i}\, b\, \gamma^2 \cos \gamma s + \boldsymbol{j}\, b\, \gamma^2 \sin \gamma s;$$

összhangban a $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ közvetlen differenciálisa útján nyerhető eredményekkel.

F) A (12) alatti DARBOUX-vektor:

$$\boldsymbol{d} = T\boldsymbol{t} + G\boldsymbol{b} = b\gamma^2 (-\boldsymbol{i}\, a\, \gamma \sin \gamma s + \boldsymbol{j}\, a\, \gamma \cos \gamma s + \boldsymbol{k}\, b\, \gamma) + \\ + a\gamma^2 (\boldsymbol{i}\, b\, \gamma \sin \gamma s - \boldsymbol{j}\, b\, \gamma \cos \gamma s + \boldsymbol{k}\, a\, \gamma) = \boldsymbol{k}\, \gamma.$$

Ennek felhasználásával a FRENET-formulák így alakulnak:

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{t} = \boldsymbol{k}\, \gamma \times (-\boldsymbol{i}\, a\, \gamma \sin \gamma s + \boldsymbol{j}\, a\, \gamma \cos \gamma s + \boldsymbol{k}\, b\, \gamma) = \\ = -\boldsymbol{i}\, a\, \gamma^2 \cos \gamma s - \boldsymbol{j}\, a\, \gamma^2 \sin \gamma s,$$

$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}\, \gamma \times (-\boldsymbol{i} \cos \gamma s - \boldsymbol{j} \sin \gamma s) = \boldsymbol{i}\, \gamma \sin \gamma s - \boldsymbol{j}\, \gamma \cos \gamma s,$$

$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}\, \gamma \times (\boldsymbol{i}\, b\, \gamma \sin \gamma s - \boldsymbol{j}\, b\, \gamma \cos \gamma s + \boldsymbol{k}\, a\, \gamma) = \\ = \boldsymbol{i}\, b\, \gamma^2 \cos \gamma s + \boldsymbol{j}\, b\, \gamma^2 \sin \gamma s,$$

összhangban a fentebbi eredményekkel.

G) A csavarvonal közelítő egyenlete a kísérő triéderben, a (18a) értelmében:

$$\boldsymbol{r}(s) \approx \boldsymbol{t}\, s + \boldsymbol{n} \frac{G}{2} s^2 + \boldsymbol{b} \frac{GT}{6} s^3 = \boldsymbol{t}\, s + \boldsymbol{n} \frac{a\gamma^2}{2} s^2 + \boldsymbol{b} \frac{ab\gamma^4}{6} s^3,$$

a vetületi görbéké pedig a kísérő triéder síkjain, a (18b) szerint:

$$y \approx \frac{G}{2} x^2 = \frac{a\gamma^2}{2} x^2, \quad z \approx \frac{GT}{6} x^3 = \frac{ab\gamma^4}{6} x^3, \quad z \approx \frac{\sqrt{2}T}{3\sqrt{G}} y^{3/2} = \frac{\sqrt{2}\, b\, \gamma}{3\sqrt{a}} y^{3/2}.$$

3. Mutassuk meg az

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{i} \frac{s}{\sqrt{3}} \cos \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \boldsymbol{j} \frac{s}{\sqrt{3}} \sin \ln \frac{s}{\sqrt{3}} + \boldsymbol{k} \frac{s}{\sqrt{3}}$$

egyenletű kúpos csavarvonallal kapcsolatban, hogy **A)** görbülete fordítva arányos (a kúp $\boldsymbol{r}(0) \doteq 0$ csúcspontjától mért) s ívhosszal, **B)** csavarodása egyenesen arányos görbületével, **C)** simulósíkja a kúp tengelyével (**k**) állandó szöget zár be.

Útmutatás. A következő formulák alkalmazandók:

$$G = |\boldsymbol{r}''|, \quad T = \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}'''}{G^2}, \quad \cos(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}''\boldsymbol{k}}{G}.$$

Eredmények:

$$G = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad T = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} G, \quad \cos(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k}) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4. Mutassuk meg, hogy az

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{i}\,\frac{1}{\dfrac{s}{2}+\sqrt{1+\dfrac{s^2}{4}}} + \boldsymbol{j}\sqrt{2}\ln\left(\frac{s}{2}+\sqrt{1+\frac{s^2}{4}}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{s}{2}+\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}\right)$$

egyenletű térgörbe görbülete és csavarodása csak előjelben különbözik.

Eredmény:

$$G = \frac{\sqrt{2}}{4+s^2} = -T.$$

β) A jellemzők gyakorlati alakja t paraméterrel

I°. K í s é r ő t r i é d e r. 1'. Gyakorlati számításokban a térgörbe egyenletének paramétere rendszerint nem az s ívhossz, hanem valamely más geometriai jelentésű t változó. Az α) I° (3a) alatti $s = s(t)$ függvény $t = t(s)$ inverze segítségével ugyan általában ilyenkor is mód van az s paraméter bevezetésére, erre azonban a gyakorlatban elég ritkán kerül sor. Célszerűbb ugyanis a térgörbe jellemzőit szolgáltató formulákat *tetszőleges geometriai jelentésű t paraméter* esetén egyaránt alkalmazható gyakorlati alakban előállítani. Ezt tesszük meg az alábbiakban.

2'. Mint már az a) α) III°-ból tudjuk, az $\boldsymbol{r}(t)$ térgörbe $\boldsymbol{r}(t_0)$ pontjához tartozó *érintővektorát* az $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ derivált adja meg.

A térgörbe $\boldsymbol{r}(t_0)$ pontjához tartozó simulósíkot a térgörbe $\boldsymbol{r}(t_0)$, $\boldsymbol{r}(t_1)$ és $\boldsymbol{r}(t_2)$ pontjaira illeszkedő szelősík határhelyzeteként értelmezzük, midőn $t_2 \to t_1 \to t_0$. E sík normálvektora, a *binormális vektor — az* a) α) (11) és (13) felhasználásával — így nyerhető:

$$\lim_{\substack{t_2\to t_0\\ t_1\to t_0}}\{[\boldsymbol{r}(t_1)-\boldsymbol{r}(t_0)]\times[\boldsymbol{r}(t_2)-\boldsymbol{r}(t_0)]\}\parallel\lim_{\substack{\tau_1\to t_0\\ \tau_2\to t_0}}[\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_1)\times\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_2)]\parallel$$

$$\parallel\lim_{\substack{\tau_1\to t_0\\ \tau_2\to t_0}}\left[\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_1)\times\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_2)-\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_1)}{\tau_2-\tau_1}\right]\parallel\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0). \tag{1}$$

A binormális vektor ezen előállítása — irány és értelem szerint — megfelel a b) α) 6) alattinak; ui. a c) α) (10) felhasználásával

$$\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}} = v\,\boldsymbol{t}\times\left(\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}\right) = \frac{v^3}{R}(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}) = c^2\,(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}),$$

mert $v = |\dot{\boldsymbol{r}}| \geqq 0$ és $1/R = |d\tau/ds| \geqq 0$.

Végül az $\boldsymbol{r}(t)$ térgörbe $\boldsymbol{r}(t_0)$ pontjához tartozó *főnormális vektor*a az ottani binormális és érintővektor vektoriális szorzataként, vagyis

$$[\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)]\times\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) \tag{2}$$

módon nyerhető.

3'. A fentiek alapján az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ *egyenletű térgörbe t paraméterű pontjához tartozó* ***k í s é r ő t r i é d e r*** egyenesei a következő egyenletekkel jellemezhetők:

érintő egyenes: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + \tau\dot{\boldsymbol{r}}(t),$ (3a)

binormális egyenes: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + \tau[\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)],$ (3b)

főnormális egyenes: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + \tau\{[\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)]\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)\},$ (3c)

ahol $-\infty < \tau < \infty$; ugyanazon kísérő triéder síkjai pedig:

$$\textit{normálsík:} \qquad [\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t)]\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)=0, \tag{4a}$$

$$\textit{simulósík:} \qquad [\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t)]\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)\,\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=0, \tag{4b}$$

$$\textit{rektifikáló sík:} \qquad [\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t)]\,[\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)]\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)=0; \tag{4c}$$

(az utóbbi két egyenletben láthatóan vegyes szorzás szerepel).

Gyakorlásul írjuk fel pl. az érintő egyenes és a simulósík egyenletét *koordinátás alakban:*

$$\frac{X-x(t)}{\dot{x}(t)}=\frac{Y-y(t)}{\dot{y}(t)}=\frac{Z-z(t)}{\dot{z}(t)}=\tau, \tag{3a'}$$

illetve

$$\begin{vmatrix} X-x(t) & Y-y(t) & Z-z(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}=0. \tag{4b'}$$

II°. Szögsebesség. Görbület. Csavarodás. 1'. Mint a b) *α)* II° 3'—4'-ből ismeretes, a térgörbe görbületén és csavarodásán az érintő, illetve a binormális ívhossz szerinti szögsebességét értjük, csak nagyságát, illetve előjelét is tekintve, azaz

$$\frac{1}{R}=G=\left|\frac{d\tau}{ds}\right|,\ T=\frac{d\beta}{ds}. \tag{5a}$$

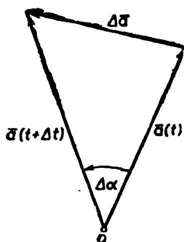
Tetszőleges geometriai jelentésű t paraméter esetén *a térgörbe görbülete és csavarodása* — a láncszabálynak megfelelően —

$$G=\left|\frac{d\tau}{dt}\right|:\frac{ds}{dt},\ T=\frac{d\beta}{dt}:\frac{ds}{dt} \tag{5b}$$

módon, vagyis *az érintő, illetve a binormális t szerinti — csak nagyságával, illetve előjelével együtt tekintetbe vett — szögsebességének és a t szerinti pályasebességének hányadosa*ként értelmezhető.

2'. Előkészítésül vizsgáljuk meg általában egy t paraméter függvényében *változó* $\boldsymbol{a}(t)$ *vektor t szerinti szögsebességét,* csak nagyságát véve tekintetbe. A vektoriális szorzat definíciója alapján írható, hogy (18. ábra)

$$\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\sin\Delta\alpha}\right|\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}(t)\times\boldsymbol{a}(t+\Delta t)|}{|\boldsymbol{a}(t)|\,|\boldsymbol{a}(t+\Delta t)|\,|\Delta t|}=$$



18. ábra

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a}|\,|\Delta t|}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\boldsymbol{a}\times\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}\right|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a}|},$$

tehát $\boldsymbol{a}(t)$ szögsebessége t szerint, csak nagyságára nézve:

$$\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|=\frac{|\boldsymbol{a}\times\dot{\boldsymbol{a}}|}{|\boldsymbol{a}^2|}. \tag{6}$$

További előkészületként megállapítjuk, hogy *az $\boldsymbol{r}(t)$ vektor végpontjának t szerinti pályasebessége* — a b) α) II⁰ (3b) értelmében —

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\boldsymbol{r}}|. \tag{7}$$

3'. Az (5b), (6) és (7) alapján a görbület, mint az $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ vektor s szerinti szögsebességének nagysága:

$$G = \left|\frac{d\tau}{dt}\right| : \frac{ds}{dt} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2} : |\dot{\boldsymbol{r}}|.$$

Végeredményben *az $\boldsymbol{r}(t)$ térgörbe görbülete t* paraméterű pontjában a

$$\boxed{\frac{1}{R} = G = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}} \tag{8}$$

formulával számítható ki, amelyben $\dot{\boldsymbol{r}}$ és $\ddot{\boldsymbol{r}}$ a t helyen veendő.

4'. Az (5b), (6) és (7) alapján a csavarodás abszolút értéke, mint az $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ vektor s szerinti szögsebességének nagysága:

$$|T| = \left|\frac{d\beta}{dt}\right| : \frac{ds}{dt} = \frac{|(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \times (\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}})^{\cdot}|}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2} : |\dot{\boldsymbol{r}}| = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dddot{\boldsymbol{r}}|\, |\dot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2} : |\dot{\boldsymbol{r}}|,$$

lévén

$$(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}})^{\cdot} = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \dddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \dddot{\boldsymbol{r}},$$

$$(\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) \times (\dot{\boldsymbol{r}} \times \dddot{\boldsymbol{r}}) = (\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dddot{\boldsymbol{r}})\, \dot{\boldsymbol{r}} - (\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dot{\boldsymbol{r}})\, \dddot{\boldsymbol{r}} = (\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dddot{\boldsymbol{r}})\, \dot{\boldsymbol{r}}.^*$$

A $d\beta/dt$ és így a T előjelét — az α/III⁰-mal összhangban — úgy választjuk, hogy $T > 0$ esetén a $\dot{\boldsymbol{b}}$ a $\boldsymbol{b}$-t az $\dot{\boldsymbol{r}}$ körül — végpontjából nézve — pozitív értelemben forgassa, vagyis $T > 0$ esetén $\boldsymbol{b}$, $\dot{\boldsymbol{b}}$ és $\dot{\boldsymbol{r}}$ e sorrendben jobb rendszert képezzen, tehát

$$\boldsymbol{b}\, \dot{\boldsymbol{b}}\, \dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}})(\dot{\boldsymbol{r}} \times \dddot{\boldsymbol{r}})\, \dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dddot{\boldsymbol{r}})\, \dot{\boldsymbol{r}}^2 > 0$$

legyen; következésképpen

$$\operatorname{sign} T = \operatorname{sign} (\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dddot{\boldsymbol{r}}).$$

Megjegyzendő, hogy $T > 0$ esetén jobbmenetű, $T < 0$ esetén pedig balmenetű csavarodása van (lokálisan) a térgörbének. Végeredményben *az $\boldsymbol{r}(t)$ térgörbe csavarodása t* paraméterű pontjában a

$$\boxed{T = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, \dddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2}} \tag{9}$$

formulával számítható ki, amelyben $\dot{\boldsymbol{r}}$, $\ddot{\boldsymbol{r}}$ és $\dddot{\boldsymbol{r}}$ a t helyen veendő.

* Ui. $(a \times b) \times (c \times d) = (abd)c - (abc)d$. L. pl. sorozatunk A. IX. kötetében.

III°. Két felület metszésvonala. 1'. Legyen a térgörbe az $F(x, y, z) = 0$ és a $G(x, y, z) = 0$ implicit egyenletű felület metszésvonalaként megadva. Vizsgáljuk e térgörbe jellemzőit $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ pontjában.

Alkalmasabb paraméter híján valamelyik, pl. az x koordinátát választjuk paraméternek és *első lépés*ként előállítjuk az $F = 0$ és a $G = 0$ implicit függvény első három x szerinti teljes deriváltját ($dx/dx = 1$, $dy/dx = \dot{y}$, $dz/dx = \dot{z}$ jelöléssel):

$$\left.\begin{aligned} F_x + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} &= 0 \\ G_x + G_y \dot{y} + G_z \dot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(I)},$$

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z; \dot{y}, \dot{z}) + F_y \ddot{y} + F_z \ddot{z} &= 0 \\ G_1(x, y, z; \dot{y}, \dot{z}) + G_y \ddot{y} + G_z \ddot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(II)}, \tag{10a}$$

$$\left.\begin{aligned} F_2(x, y, z; \dot{y}, \dot{z}; \ddot{y}, \ddot{z}) + F_y \dddot{y} + F_z \dddot{z} &= 0 \\ G_2(x, y, z; \dot{y}, \dot{z}; \ddot{y}, \ddot{z}) + G_y \dddot{y} + G_z \dddot{z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(III)}.$$

*Második lépés*ként ezen implicit függvényrendszereket az $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ helyen vesszük számításba és így lineáris, kétismeretlenes egyenletrendszereket nyerünk:

$$\left.\begin{aligned} F_{x0} + F_{y0} \dot{y}_0 + F_{z0} \dot{z}_0 &= 0 \\ G_{x0} + G_{y0} \dot{y}_0 + G_{z0} \dot{z}_0 &= 0 \end{aligned}\right\} (\text{I}_0),$$

$$\left.\begin{aligned} F_{10} + F_{y0} \ddot{y}_0 + F_{z0} \ddot{z}_0 &= 0 \\ G_{10} + G_{y0} \ddot{y}_0 + G_{z0} \ddot{z}_0 &= 0 \end{aligned}\right\} (\text{II}_0), \tag{10b}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{20} + F_{y0} \dddot{y}_0 + F_{z0} \dddot{z}_0 &= 0 \\ G_{20} + G_{y0} \dddot{y}_0 + G_{z0} \dddot{z}_0 &= 0 \end{aligned}\right\} (\text{III}_0),$$

*Harmadik lépés*ként meghatározzuk ezen egyenletrendszerek $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, illetve $\ddot{y}_0$, $\ddot{z}_0$, illetve $\dddot{y}_0$, $\dddot{z}_0$ megoldását, amelyek felhasználásával az $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ helyre vonatkozó első három deriváltvektor így alakul:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_0(1, \dot{x}_0, \dot{y}_0), \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_0(0, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0), \quad \dddot{\boldsymbol{r}}_0(0, \dddot{x}, \dddot{y}). \tag{10c}$$

Végül e deriváltvektorok birtokában a *β)* I°—II°-ben tanult formulák segítségével számíthatjuk ki a térgörbe $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ pontjához tartozó kísérő triédert, görbületes csavarodást.

Példák és feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi térgörbék megadott pontjához tartozó kísérő triéder (egyeneseinek és) síkjainak egyenletét:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t^2 - 1) + \boldsymbol{j}(t + 2) + \boldsymbol{k}(t^3 - t)$, $\quad t_0 = 1$;

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(3\,t^2 - 2t) + \boldsymbol{j}\,t^3 + \boldsymbol{k}(1 - t)$, $\quad t_0 = 2$;

C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t + 3) + \boldsymbol{j}\,t^3/3 + \boldsymbol{k}(t^2 - 5)$, $\quad t_0 = 1$;

D) $\boldsymbol{r}(t) = 3\boldsymbol{i}t^2 + \boldsymbol{j}(2t + 3) + 3\boldsymbol{k}\,t^3$, $\quad t_0 = -1$;

E) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t^3 - 2t^2) + \boldsymbol{j}(3t + 2) + \boldsymbol{k}(t^2 - 5)$, $\quad t_0 = 1$;

F) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,\mathrm{ch}\,t + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sh}\,t + \boldsymbol{k}t$, $\quad t_0 = \tau$.

Megoldás. Előállítjuk az $\boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$, $\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ vektorokat, a $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)$, $[\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)]\times\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ szorzatokat, majd a (3a, b, c), (4a, b, c), (3a'), (4b') formulákat alkalmazzuk.

A) $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}(t^2-1)+\boldsymbol{j}(t+2)+\boldsymbol{k}(t^3-t)$, $\boldsymbol{r}(1)=3\boldsymbol{j}$,

$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=2\boldsymbol{i}t+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}(3t^2-1)$, $\dot{\boldsymbol{r}}(1)=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,

$\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}t$, $\ddot{\boldsymbol{r}}(1)=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}$;

$$\dot{\boldsymbol{r}}(1)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&2\\2&0&6\end{vmatrix}=(6\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\,||\,(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}),$$

$$\frac{1}{2}[\dot{\boldsymbol{r}}(1)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(1)]\times\dot{\boldsymbol{r}}(1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&-1\\2&1&2\end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k},$$

(az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának hossza és értelme érdektelen, csak iránya lényeges, ezért szabad skalárral szorozni e vektorokat);

érintő egyenes: $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}=\tau$,

binormális egyenes: $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z}{-1}=\tau$,

főnormális egyenes: $\frac{x}{-7}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z}{11}=\tau$,

simulósík: $3x-4(y-3)-z=0$,

normálsík $2x+(y-3)+2z=0$,

rektifikáló sík: $-7x-8(y-3)+11z=0$.

B) $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}(3t^2-2t)+\boldsymbol{j}\,t^3+\boldsymbol{k}(1-t)$, $\boldsymbol{r}(2)=8\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,

$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{i}(6t-2)+3\boldsymbol{j}\,t^2-\boldsymbol{k}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(2)=10\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,

$\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}\,t$, $\ddot{\boldsymbol{r}}(2)=6\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$;

$$\dot{\boldsymbol{r}}(2)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\10&12&-1\\6&12&0\end{vmatrix}=(12\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+48\boldsymbol{k})\,||\,(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+8k),$$

$$\frac{1}{6}[\dot{\boldsymbol{r}}(2)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(2)]\times\dot{\boldsymbol{r}}(2)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&8\\10&12&-1\end{vmatrix}=-95\boldsymbol{i}+82\boldsymbol{j}+34\boldsymbol{k};$$

érintő egyenes: $\frac{x-8}{10}=\frac{y-8}{12}=\frac{z+1}{-1}=\tau$,

binormális egyenes: $\frac{x-8}{2}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z+1}{8}=\tau$,

főnormális egyenes: $\frac{x-8}{-95}=\frac{y-8}{82}=\frac{z+1}{34}=\tau$;

simulósík: $2(x-8)-(y-8)+8(z+1)=0,$
normálsík: $10(x-8)+12(y-8)-(z+1)=0,$
rektifikáló sík: $-95(x-8)+82(y-8)+34(z+1)=0.$

C) $\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}(t+3)+\mathbf{j}\frac{t^3}{3}+\mathbf{k}(t^2-5), \quad \mathbf{r}(1)=4\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}-4\mathbf{k},$

$\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{i}+\mathbf{j}t^2+2\mathbf{k}t, \quad \dot{\mathbf{r}}(1)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k},$
$\ddot{\mathbf{r}}(t)=2\mathbf{j}t+2\mathbf{k}, \quad \ddot{\mathbf{r}}(1)=2\mathbf{j}+2\mathbf{k}.$
$\dot{\mathbf{r}}(1)\times\ddot{\mathbf{r}}(1)=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}, \quad [\dot{\mathbf{r}}(1)\times\ddot{\mathbf{r}}(1)]\times\dot{\mathbf{r}}(1)=-6\mathbf{i}+6\mathbf{j};$

$$S_s:\ -2(x-4)-2\left(y-\frac{1}{3}\right)+2(z+4)=0,$$

$$S_n:\ (x-4)+\left(y-\frac{1}{3}\right)+2(z+4)=0,$$

$$S_r:\ -6(x-4)+6\left(y-\frac{1}{3}\right)=0.$$

D) $S_s:\ 6x+9y+2z-21=0,$
$S_n:\ 7x-6y+6z+3=0,$
$S_r:\ 6x-2y-9z-43=0.$

E) $S_s:\ x+y-z-8=0,$
$S_n:\ x-3y-2z+8=0,$
$S_r:\ 5x-y+4z+26=0.$

F) $$S_s:\ x\,\mathrm{th}\,\tau-y+z\frac{1}{\mathrm{ch}\,\tau}-\frac{\tau}{\mathrm{ch}\,\tau}=0,$$

$$S_n:\ x\,\mathrm{th}\,\tau+y+z\frac{1}{\mathrm{ch}\,\tau}-2\,\mathrm{sh}\,\tau-\frac{\tau}{\mathrm{ch}\,\tau}=0,$$

$$S_r:\ x\frac{1}{\mathrm{ch}\,\tau}-z\,\mathrm{th}\,\tau-1+\tau\,\mathrm{th}\,\tau=0.$$

2. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}\,e^t\cos t+\mathbf{j}\,e^t\sin t+\mathbf{k}\,e^t$ változó vektor t szerinti szögsebesség-vektorát és felületsebesség-vektorát, valamint ezek nagyságát.

Megoldás. Az $\mathbf{r}(t)$ vektor $\dot{\mathbf{F}}(t)$ felületsebesség- és $\bar{\omega}(t)$ szögsebesség-vektora:

$$\dot{\mathbf{F}}(t)=\frac{1}{2}[\mathbf{r}(t)\times\dot{\mathbf{r}}(t)], \quad \bar{\omega}(t)=\frac{\mathbf{r}(t)\times\dot{\mathbf{r}}(t)}{\mathbf{r}^2(t)}$$

Esetünkben $\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{i}\,e^t(-\sin t+\cos t)+\mathbf{j}\,e^t(\cos t+\sin t)+\mathbf{k}\,e^t$ és $\mathbf{r}^2(t)=$ $=e^{2t}(\cos^2 t+\sin^2 t)+e^{2t}=2e^{2t}$. Írható tehát, hogy

$$\dot{\mathbf{F}}(t)=\frac{1}{2}e^{2t}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos t & \sin t & 1\\ -\sin t+\cos t, & \cos t+\sin t, & 1\end{vmatrix}=\frac{e^{2t}}{2}(-\mathbf{i}\cos t-\mathbf{j}\sin t+\mathbf{k}),$$

továbbá

$$\bar{\omega}(t)=\frac{2\dot{\mathbf{F}}(t)}{\mathbf{r}^2(t)}=\frac{2}{2e^{2t}}\cdot\frac{e^{2t}}{2}(-\mathbf{i}\cos t-\mathbf{j}\sin t+\mathbf{k})=\frac{1}{2}(-\mathbf{i}\cos t-\mathbf{j}\sin t+\mathbf{k}).$$

E vektorok nagysága, vagyis a felületsebesség és a szögsebesség:

$$\dot{F} = |\dot{\boldsymbol{F}}| = \frac{e^{2t}}{2}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2t},$$

$$\omega = |\bar{\omega}| = \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

a szögsebesség láthatóan állandó.

3. Számítsuk ki az alábbi térgörbék görbületét és csavarodását a megadott pontban:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t^2-1) + \boldsymbol{j}(t+2) + \boldsymbol{k}(t^3-t)$, $t_0 = 1$;
B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(3t^2-2t) + \boldsymbol{j}t^3 + \boldsymbol{k}(1-t)$, $t_0 = 2$;
C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t+3) + \boldsymbol{j}\,t^3/3 + \boldsymbol{k}(t^2-5)$, $t_0 = 1$;
D) $\boldsymbol{r}(t) = 3\boldsymbol{i}\,t^2 + \boldsymbol{j}(2t+3) + 3\boldsymbol{k}\,t^3$, $t_0 = -1$.
E) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t^3-2t^2) + \boldsymbol{j}(3t+2) + \boldsymbol{k}(t^2-5)$, $t_0 = 1$;
F) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\,\mathrm{ch}\,t + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sh}\,t + \boldsymbol{k}\,t$, $t_0 = b$.

Használjuk fel az 1. A)—F) példák részlet-eredményeit!

Megoldás. Az 1. A)—F) példákban már kiszámított $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$, $\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ vektorokon kívül még meghatározzuk az $\dddot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ vektort, majd a (8) és a (9) formulát alkalmazzuk.

A) $\dot{\boldsymbol{r}}(1) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $|\dot{\boldsymbol{r}}(1)| = 3$, $\ddot{\boldsymbol{r}}(1) = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(1)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(1) =$
$= 6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $|\dot{\boldsymbol{r}}(1)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(1)| = \sqrt{104}$, $\dddot{\boldsymbol{r}}(1) = 6\boldsymbol{k}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(1)\ddot{\boldsymbol{r}}(1)\dddot{\boldsymbol{r}}(1) = -12$;

$$G(1) = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(1)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(1)|}{|\dot{\boldsymbol{r}}(1)|^3} = \frac{\sqrt{104}}{3^3} = \frac{2\sqrt{26}}{27},$$

$$T(1) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(1)\ddot{\boldsymbol{r}}(1)\dddot{\boldsymbol{r}}(1)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(1)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(1)|^2} = \frac{-12}{(\sqrt{104})^2} = -\frac{3}{26};$$

$T(1) < 0$ lévén, térgörbénk csavarodása a $t_0 = 1$ helyen balmenetű.

B) $\dot{\boldsymbol{r}}(2) = 10\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $|\dot{\boldsymbol{r}}(2)| = \sqrt{245}$, $\ddot{\boldsymbol{r}}(2) = 6\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(2)\times(2)\ddot{\boldsymbol{r}} =$
$= 6(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k})$, $|\dot{\boldsymbol{r}}(2)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(2)| = 6\sqrt{69}$, $\dddot{\boldsymbol{r}}(2) = 6\boldsymbol{j}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(2)\ddot{\boldsymbol{r}}(2)\dddot{\boldsymbol{r}}(2) = -36$,

$$G(2) = \frac{6\sqrt{69}}{(\sqrt{245})^3} \approx 0{,}013, \qquad T(2) = \frac{-36}{(6\sqrt{69})^2} = -\frac{1}{99} \approx -0{,}0145;$$

térgörbénk tehát lokálisan balcsavarodású.

C) $\dot{\boldsymbol{r}}(1) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $|\dot{\boldsymbol{r}}(1)| = \sqrt{6}$, $\ddot{\boldsymbol{r}}(1) = 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(1)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(2) =$
$= -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $|\dot{\boldsymbol{r}}(1)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(1)| = 2\sqrt{3}$, $\dddot{\boldsymbol{r}}(1) = 2\boldsymbol{j}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(1)\ddot{\boldsymbol{r}}(1)\dddot{\boldsymbol{r}}(1) = -4$;

$$G(1) = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{6})^3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad T(1) = \frac{-4}{(2\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{3}.$$

D) $G(-1) = \dfrac{6}{121} = -T(-1)$. E) $G(1) = \dfrac{3\sqrt{3}}{7\sqrt{14}}$, $T(1) = \dfrac{1}{3}$.

$$\text{F) } G(\tau) = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}^2\,\tau} = T(\tau).$$

4. Igazoljuk az alábbi térgörbék görbületének és csavarodásának viszonyára vonatkozó mellékelt állításokat:

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, e^t \cos t + \boldsymbol{j}\, e^t \sin t + \boldsymbol{k}\, e^t, \quad G(t) = \sqrt{2}\, T(t);$

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, e^t + \boldsymbol{j} \sqrt{2}\, t + \boldsymbol{k}\, e^t, \quad G(t) = -T(t).$

Megoldás. Számítsuk ki a $G(t)$ görbületet és a $T(t)$ csavarodást, majd vessük össze őket!

A) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i}\, e^t(-\sin t + \cos t) + \boldsymbol{j}\, e^t(\cos t + \sin t) + \boldsymbol{k}\, e^t, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = e^t\sqrt{3},$

$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -2\boldsymbol{i}\, e^t \sin t + 2\boldsymbol{j}\, e^t \cos t + \boldsymbol{k}\, e^t,$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = e^{2t} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin t + \cos t, & \cos t + \sin t & 1 \\ -2\sin t & 2\cos t & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2t}\,[\boldsymbol{i}(\sin t - \cos t) - \boldsymbol{j}(\sin t + \cos t) + 2\boldsymbol{k}],$$

$|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)| = e^{2t}\sqrt{6}, \quad \dddot{\boldsymbol{r}}(t) = e^t\,[-2\,\boldsymbol{i}(\cos t + \sin t) + 2\boldsymbol{j}(-\sin t + \cos t) + \boldsymbol{k}],$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\, \dddot{\boldsymbol{r}}(t) = e^{3t}\,[-2(\sin t - \cos t)(\cos t + \sin t) + $$
$$+ 2(\sin t - \cos t)(\cos t + \sin t) + 2] = 2\,e^{3t};$$

$$G(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3} = \frac{e^{2t}\sqrt{6}}{e^{3t}\, 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-t},$$

$$T(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\, \dddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|^2} = \frac{2\,e^{3t}}{6\,e^{4t}} = \frac{1}{3} e^{-t},$$

$$G(t) = \sqrt{2}\, T(t), \quad \text{q. e. d.}$$

B) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = -\boldsymbol{i}\, e^{-t} + \boldsymbol{j}\sqrt{2} + \boldsymbol{k}\, e^t, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{e^{-2t} + 2 + e^{2t}} =$

$= \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t} = 2 \operatorname{ch} t, \quad \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i}\, e^{-t} + \boldsymbol{k}\, e^t, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) =$

$= \boldsymbol{i}\sqrt{2}\, e^t + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\sqrt{2}\, e^{-t}, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{2}\sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} = 2\sqrt{2} \operatorname{ch} t,$

$\dddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\boldsymbol{i}\, e^{-t} + \boldsymbol{k}\, e^t, \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\, \dddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2};$

$$G(t) = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{ch} t}{8 \operatorname{ch}^3 t} = \frac{\sqrt{2}}{4 \operatorname{ch}^2 t}, \quad T(t) = \frac{-2\sqrt{2}}{8 \operatorname{ch}^2 t} = -\frac{\sqrt{2}}{4 \operatorname{ch}^2 t}.$$

5. Határozzuk meg az alábbi térgörbe megjelölt pontjára vonatkozó FRENET-féle $\boldsymbol{t}', \boldsymbol{n}', \boldsymbol{b}'$ vektorokat és a DARBOUX-féle $\boldsymbol{d}$ vektort:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}(t^2 - 1) + \boldsymbol{j}(t + 2) + \boldsymbol{k}(t^3 - 1), \quad t_0 = 1.$$

Használjuk fel az 1. A) és a 3. A) példa részleteredményeit!

Megoldás. E példákban már kiszámítottuk a következő vektorokat és nagyságukat:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(1) = 2\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\,\boldsymbol{k}, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(1)| = 3; \quad \dot{\boldsymbol{r}}(1) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(1) = 6\,\boldsymbol{i} - 8\,\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k},$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(1) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(1)| = 2\sqrt{26}, \quad [\dot{\boldsymbol{r}}(1) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(1)] \times \dot{\boldsymbol{r}}(1) = -7\,\boldsymbol{i} - 8\,\boldsymbol{j} + 11\,\boldsymbol{k},$$

$$|[\dot{\boldsymbol{r}}(1) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(1)] \times \dot{\boldsymbol{r}}(1)| = \sqrt{234} = 3\sqrt{26}.$$

Ezek felhasználásával a térgörbe adott pontjához tartozó triéder egységvektorai:

$$t(1) = \frac{\dot{r}(1)}{|\dot{r}(1)|} = \frac{1}{3}(2\,i + j + 2\,k), \quad n(1) = \frac{[\dot{r}(1)\times\ddot{r}(1)]\times\dot{r}(1)}{|[\dot{r}(1)\times(\ddot{r})]\times\dot{r}(1)|} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{26}}(-7\,i - 8\,j + 11\,k), \quad b(1) = \frac{\dot{r}(1)\times\ddot{r}(1)}{|\dot{r}(1)\times\ddot{r}(1)|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3\,i - 4\,j - k).$$

A 3. A) példából ismeretes, hogy

$$G(1) = \frac{2\sqrt{26}}{27}, \quad T(1) = -\frac{3}{26}.$$

Ezek alapján a térgörbe adott pontjához tartozó DARBOUX-vektor — a (12) formulának megfelelően — így alakul:

$$d(1) = T(1)\,t(1) + G(1)\,b(1) = -\frac{3}{26}\cdot\frac{1}{3}(2\,i + j + 2\,k) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{26}}{27}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}(3\,i - 4\,j - k) = \frac{1}{702}(102\,i - 235\,j - 106\,k).$$

A térgörbe adott pontjához tartozó első FRENET-féle vektor — a (11) formula szerint — így írható:

$$t'(1) = G(1)\,n(1) = \frac{2\sqrt{26}}{27}\cdot\frac{1}{3\sqrt{26}}(-7i - 8j + 11k) = \frac{2}{81}(-7i - 8j + 11k);$$

ugyanez a $d(1)$ vektor segítségével — a (13) szerint —

$$t'(1) = d(1)\times t(1) = \frac{1}{702\cdot 3}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 102 & -235 & -106 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{81\cdot 26}(-364\,i - 416\,j + 572\,k) = \frac{2}{81}(-7\,i - 8\,j + 11\,k)$$

módon nyerhető.

Folytassuk a számítást — a (11) és a (13) alapján — az $n'(1)$ és a $b'(1)$ vektor meghatározása céljából!

6. Írjuk fel az előbbi térgörbe adott pontjához tartozó kísérő triéderben a vetületi görbék környezetileg közelítő egyenletét.

Megoldás. A (18b) formulák szerint

$$y \approx \frac{G(1)}{2}x^2 = \frac{\sqrt{26}}{27}x^2 \approx 0{,}189\,x^2,$$

$$z \approx \frac{G(1)\,T(1)}{6}x^3 = -\frac{1}{27\sqrt{26}}x^3 \approx -0{,}007\,x^3,$$

$$z \approx \frac{\sqrt{2}\,T(1)}{3\sqrt{G(1)}}y^{3/2} = -\frac{3\sqrt{3}}{26\sqrt[4]{26}}y^{3/2} \approx -0{,}087\,y^{3/2}.$$

7. Határozzuk meg az alábbi (két-két felület metszésvonalaként megadott) térgörbék megjelölt pontjához tartozó kísérő triéderét, görbületét és csavarodását:

A) $x + 3y + 4z - 26 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 56 = 0, \quad \mathbf{r}_0(6, 4, 2)$;

B) $xy - z^2 = 0, \quad x + y + z - 3 = 0, \quad \mathbf{r}_0(1, 1, 1)$;

C) $2x^2 + 3yz - 6y = 0, \quad 3y^2 - xz - 3z = 0, \quad \mathbf{r}_0(0, 0, 0)$;

D) $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad y^2 - 2x + z = 0, \quad \mathbf{r}_0(1, 1, 1)$.

Megoldás. A III°-ban ismertetett módszert alkalmazzuk.

A) Az $\mathbf{r}_0(6, 4, 2)$ pont valóban rajta van a metszésvonalon, mert kielégíti mindkét felület egyenletét:

$$6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 26 = 0, \quad 6^2 + 4^2 + 2^2 - 56 = 0.$$

Az egyik változót, pl. az x-et paraméternek választjuk és e szerint deriváljuk háromszor mindkét felület egyenletét (szem előtt tartva, hogy $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = \dddot{x} = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &1 + 3\dot{y} + 4\dot{z} = 0 \\ &2x + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} &3\ddot{y} + 4\ddot{z} = 0 \\ &2 + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} + 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{aligned} &3\dddot{y} + 4\dddot{z} = 0 \\ &6\dot{y}\ddot{y} + 2y\dddot{y} + 6\dot{z}\ddot{z} + 2z\dddot{z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

Behelyettesítve az (I)-ben a $\mathbf{r}_0(6, 4, 2)$ koordinátáit, a

$$\left.\begin{aligned} 3\dot{y}_0 + 4\dot{z}_0 &= -1 \\ 8\dot{y}_0 + 4\dot{z}_0 &= -12 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_0)$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása

$$\dot{y}_0 = -\frac{11}{5}, \quad \dot{z}_0 = \frac{7}{5}, \quad \text{tehát} \quad \dot{\mathbf{r}}_0\left(1, \ -\frac{11}{5}, \ \frac{7}{5}\right).$$

Az $\mathbf{r}_0$ és $\dot{\mathbf{r}}_0$ koordinátáinak behelyettesítésével, a (II)-ből a

$$\left.\begin{aligned} 3\ddot{y}_0 + 4\ddot{z}_0 &= 0 \\ 8\ddot{y}_0 + 4\ddot{z}_0 &= \frac{78}{5} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}_0)$$

egyenletrendszerre jutunk, amelyből

$$\ddot{y}_0 = -\frac{78}{25}, \quad \ddot{z}_0 = \frac{234}{100}, \quad \text{tehát} \quad \ddot{\mathbf{r}}_0\left(0, \ -\frac{78}{25}, \ \frac{234}{100}\right).$$

Végül az $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$ és $\ddot{\mathbf{r}}_0$ figyelembevételével, a (III)

$$\left.\begin{aligned} 3\dddot{y}_0 + 4\dddot{z}_0 &= 0 \\ 8\dddot{y}_0 + 4\dddot{z}_0 &= -\frac{1521}{5} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{III}_0)$$

alakot ölt, ahonnan

$$\dddot{y}_0 = -\frac{1521}{25}, \quad \dddot{z}_0 = \frac{4563}{100}, \quad \text{tehát} \quad \dddot{\boldsymbol{r}}_0\left(0, -\frac{1521}{25}, \frac{4563}{100}\right).$$

A továbbiakban ugyanúgy járunk el, mint a t paraméter szerinti deriváltak esetén szokás.

Az $\boldsymbol{r}_0$ ponthoz tartozó kísérő triéder egységvektorai:

$$\boldsymbol{t}_0 = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}_0}{|\dot{\boldsymbol{r}}_0|} = \frac{5}{\sqrt{195}}\cdot\frac{1}{5}(5\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{195}}(5\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{b}_0 = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0}{|\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0|} = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0|}\cdot\frac{39}{250}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -11 & 7 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0|}\cdot\frac{39}{50}(-\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{\sqrt{26}}(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{b}_0\times\boldsymbol{t}_0 = -\frac{1}{\sqrt{26}\sqrt{195}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -11 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}).$$

Érintő egyenes: $\dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-4}{-11} = \dfrac{z-2}{7} = \tau,$

főnormális egyenes: $\dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-2}{-2} = \tau,$

binormális egyenes: $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-2}{4} = \tau.$

Simulósík: $(x-6) + 3(y-4) + 4(z-2) = 0,$

normálsík: $5(x-6) - 11(y-4) + 7(z-2) = 0,$

rektifikáló sík: $5(x-6) + (y-4) - 2(z-2) = 0.$

Az $\boldsymbol{r}_0$ pontbeli görbület és csavarodás:

$$G_0 = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0|}{|\dot{\boldsymbol{r}}_0|^3} = \frac{\frac{39}{50}\sqrt{26}}{\left(\sqrt{\frac{195}{5}}\right)^3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0{,}183,$$

$$T_0 = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}_0\,\ddot{\boldsymbol{r}}_0\,\dddot{\boldsymbol{r}}_0}{|\dot{\boldsymbol{r}}_0\times\ddot{\boldsymbol{r}}_0|^2} = \frac{50^2}{39^2\cdot 26}\cdot\frac{1}{5}\,\frac{1}{50}\,\frac{1}{100}\begin{vmatrix} 5 & -11 & 7 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

A $T_0 = 0$ eredmény természetes, mert görbénk — mint sík és gömb metszésvonala — síkgörbe, amelynek csavarodása tudvalevőleg zérus.

B) $t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $n_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i - j + 2k)$, $b_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$;

$e_é : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1}$, $z = 1$, $e_f : \frac{y-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $e_b : x = y = z$;

$S_s : x + y + z - 3 = 0$, $S_n : x - y = 0$, $S_r : x - y + 2z - 2 = 0$;

$G_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $T = 0$ (síkgörbe).

C) $t_0 = i$, $n_0 = j$, $b_0 = k$; $S_s : z = 0$, $S_n : x = 0$, $S_r : y = 0$;

$G_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $T_0 = 0$ (síkgörbe).

D) $t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$, $n_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i - j - 2k)$, $b_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(i - j + k)$;

$S_s : x - y + z - 1 = 0$, $S_n : x + y - 2 = 0$, $S_r : x - y - 2z + 2 = 0$;

$G_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $T_0 = \frac{1}{3}$.

8. Vezessük le az $y = y(x)$ egyenletű síkgörbe görbületi képletét a $r = r(t)$ vektoregyenletű térgörbe görbületi képletéből.

Megoldás. Az említett síkgörbe vektoregyenlete nyilván $r(x) = i\,x + j\,y(x)$; deriváltjai:

$$\dot{r}(x) = i + j\,y'(x), \quad \ddot{r}(x) = j\,y''(x), \quad \dddot{r}(x) = j\,y'''(x),$$

ováb bá

$$|\dot{r}(x)| = \sqrt{1 + y'^2(x)}, \quad \dot{r}(x) \times \ddot{r}(x) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & y'(x) & 0 \\ 0 & y''(x) & 0 \end{vmatrix} = k\,y''(x).$$

A keresett görbületi képlet tehát:

$$G(x) = \frac{y''(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}},$$

ahol a számlálóban mellőztük az abszolútérték jelét, mert a síkgörbe görbületének [az $y''(x)$-ével azonos] előjelet szokás tulajdonítani.

A síkgörbe csavarodása mindenütt zérus, lévén

$$\dot{r}(x)\,\ddot{r}(x)\,\dddot{r}(x) = \begin{vmatrix} 1 & y'(x) & 0 \\ 0 & y''(x) & 0 \\ 0 & y'''(x) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

9. Keressük meg az

$$r(t) = i\,t^3 + j(t^2 - 1) + k\,t$$

egyenletű térgörbe azon $\dot{r}(\tau_1)$ és $\dot{r}(\tau_2)$ érintővektorait, amelyek párhuzamosak a térgörbe, $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ paraméterű pontjaira illeszkedő szelősíkkal és $t_0 < \tau_1 < t_1$, továbbá $t_1 < \tau_2 < t_2$.

Megoldás. A szelősíkot hordozó térgörbe-pontok helyzetvektorai:

$$\boldsymbol{r}(-1) = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}(0) = -\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}(1) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},$$

a szelősík normálvektora tehát

$$\boldsymbol{n}_{sz} = [\boldsymbol{r}(1) - \boldsymbol{r}(0)] \times [\boldsymbol{r}(-1) - \boldsymbol{r}(0)] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}).$$

Az erre merőleges $\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_1)$ és $\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_2)$ érintőket keressük; kell tehát, hogy

$$\boldsymbol{n}_{sz}\, \dot{\boldsymbol{r}}(\tau) = 2(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})(3\boldsymbol{i}\,\tau^2 + 2\boldsymbol{j}\,\tau + \boldsymbol{k}) = 2(3\tau^2 - 1) = 0$$

legyen, amely nyilván

$$-1 < \tau_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \quad \text{és} \quad 0 < \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

értékeknél teljesül. A keresett érintővektorok ily módon a következők:

$$\dot{\boldsymbol{r}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

c) Műszaki alkalmazások

α) Tömegpont mechanikája

1°. Tömegpont kinematikája. 1'. A térben szabadon mozgó pont lehetséges helyzeteit meghatározó független koordináták száma, vagyis *a mozgás szabadságfoka három*. E három, az időtől függő koordináta egy, az időtől függő vektort állapít meg.

A pont térbeli mozgását tehát kinematikai szempontból teljesen meghatározza az $\boldsymbol{r}$ helyzetvektort a t idő függvényében megadó

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \qquad t_k < t < t_v \tag{1}$$

alakú *vektor-skalár függvény*. Szükséges, hogy ez egyértékű és folytonos legyen, sőt — a későbbiekre való tekintettel — legalább kétszer differenciálható is.

Az (1) egyúttal a mozgó pont térbeli *pályagörbé*-jét is meghatározza, mint annak vektoregyenlete. A görbe (egy $O(t_0)$ rögzített pontjától a befutási értelemben mért) ívhosszat s-sel jelölve, az $s(t_2) - s(t_1)$ különbség a pont által a $t_2 - t_1$ időközben megtett utat szolgáltatja, maga az $s(t)$ függvény pedig a pálya befutását jellemzi.

2'. Az $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$ és az $\boldsymbol{r}(t)$ *helyzetvektor* $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ különbsége a mozgó pont Δt időközbeli elmozdulásvektorát (a pályagörbe húrvektorát), a $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ különbségi hányados a mozgás Δt időközbeli átlagos sebességvektorát (a pályagörbe szelővektorát), végül a

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{2}$$

határvektor, vagyis a helyzetvektor idő szerinti derivált vektora a pontmozgás t időpontbeli *sebességvektor*át (a pályagörbe érintővektorát) értelmezi.

Hasonló meggondolást végezve a $\boldsymbol{v}(t)$ sebességvektorral (a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ hodográf-görbével) kapcsolatban, az

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta^2 \boldsymbol{r}}{\Delta t^2} = \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{3}$$

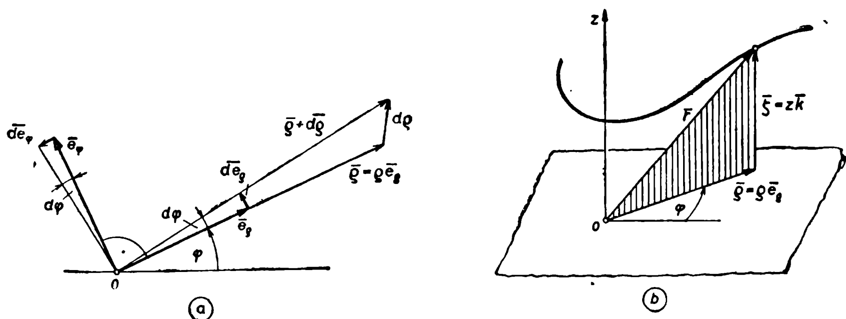
határvektor, vagyis a sebességvektor idő szerinti első, a helyzetvektor idő szerinti második deriváltja a mozgó pont t időpontbeli *gyorsulásvektorát* jelenti.

3'. A helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektor *derékszögű komponensek* összegeként

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} \tag{4}$$

módon állítható elő. Az $\overline{OP}$ távolság, a sebesség és a gyorsulás nagysága ilyenkor rendre

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$



19. ábra

Térjünk át most hengeres koordináta-rendszerre az ismert

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

transzformációs formulák útján. Bevezetve az x, y síkbeli $\boldsymbol{e}_\varrho = \boldsymbol{i} \cos \varphi + \boldsymbol{j} \sin \varphi$ radiális egységvektort és a belőle ugyanazon síkban, $+90°$-os elforgatással nyerhető $\boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{i} \sin \varphi + \boldsymbol{j} \cos \varphi$ poláris egységvektort, és figyelembe véve a közöttük fennálló (19*a* ábra)

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varrho = \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_\varphi, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_\varrho$$

kapcsolatot, a helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektor *hengeres komponensek* összegeként (19*b* ábra)

$$\boldsymbol{r} = \varrho\, \boldsymbol{e}_\varrho + z\, \boldsymbol{k} = \bar{\varrho} + \bar{\zeta}, \quad \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\varrho}\, \boldsymbol{e}_\varrho + \varrho\, \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\, \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{\varrho} - \varrho\, \dot{\varphi}^2)\, \boldsymbol{e}_\varrho + (r\, \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\, \dot{\varphi})\, \boldsymbol{e}_\varphi + \ddot{z}\, \boldsymbol{k} \tag{5}$$

módon írható fel. Az $\overline{OP}$ távolság, a sebesség és a gyorsulás nagysága most rendre

$$r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2},$$
$$a = \sqrt{(\ddot{\varrho} - \varrho\, \dot{\varphi}^2)^2 + (r\, \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\, \dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}.$$

4'. Az $|\dot{\boldsymbol{r}}| = |\boldsymbol{v}| = v$ segítségével szamítható az *úthossz*-mérő $s(t)$ függvény, mégpedig az ismert

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}\,dt \tag{6}$$

ívhossz-képlettel. Az integrált felső határa szerint deriválva, a

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\boldsymbol{r}}| = |\boldsymbol{v}| = v \tag{7}$$

ún. *pályasebesség* adódik. (Ha speciálisan $t = s$, akkor $v = 1$.)

A (7) figyelembevételével a sebességvektor előállítható

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{r}'v = \boldsymbol{t}v \tag{8}$$

alakban, ahol a $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'$, vagyis a helyzetvektor úthossz szerinti első deriváltja az *érintő egységvektor*.

Az $\boldsymbol{r}$ úthossz szerinti második (tehát a $\boldsymbol{t}$ úthossz szerinti első) deriváltja – mint a b) α (5)-ből ismeretes –

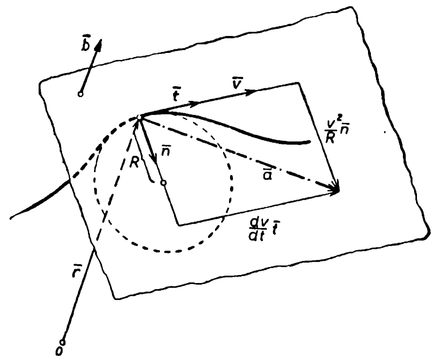
$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{t}' = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d\tau}{ds}\,\boldsymbol{n} = \frac{1}{R}\boldsymbol{n} \tag{9}$$

alakú, ahol $1/R$ a pályagörbe *görbülete*, $\boldsymbol{n}$ pedig *normális egységvektora*, $\boldsymbol{r}$ helyzetvektorú pontjában.

A (9) felhasználásával *a gyorsulásvektor előállítható*

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{t}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{t} + v\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dt}\boldsymbol{t} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n} = a_t\boldsymbol{t} + a_n\boldsymbol{n} \tag{10}$$



20. ábra

alakban, vagyis *érintőleges* (pályamenti) *és normális* (centripetális) *komponens összegeként* (20. ábra). A (10) értelmében a görbevonalú ($1/R \neq 0$) mozgásnak mindig van (legalább normális) gyorsulása; csak az egyenesvonalú ($1/R = 0$) mozgás lehet gyorsulásmentes.

II°. Tömegpont dinamikája. 1'. NEWTON AXIÓMÁI. A kinemetikában csak magát a mozgást vizsgáltuk, a mozgás okát, az erőt, figyelmen kívül hagytuk. Most a dinamikában az erőt is figyelembe vesszük.

Az erő és a mozgás kapcsolatát állapítják meg NEWTON axiómái.

Az első axióma: *a tehetetlenség törvénye*; eszerint *külső erő hiányában minden test megmarad nyugalmi vagy egyenesvonalú egyenletes mozgási állapotában.*

Az I. axióma csak bizonyos koordináta-rendszerekben, az ún. inerciarendszerekben érvényes; ilyen – tapasztalat szerint – az állócsillagokhoz rögzített vagy ehhez képest egyenesvonalú egyenletes mozgásban levő rendszer. Gyakorlatilag legtöbbször a Földhöz rögzített rendszer is inerciarendszernek vehető.

A második axióma: *a dinamika alapegyenlete;* eszerint *a testre ható erő* $\boldsymbol{P}$ *vektora az általa létrehozott gyorsulás* $\boldsymbol{a}$ *vektorának és a test* m *tehetetlen tömegének szorzatával egyenlő,* azaz

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{a}. \tag{11}$$

Maga NEWTON *a II. axiómát az* *impulzustétel-nek is nevezett*

$$\boldsymbol{P} = \frac{d}{dt}(m\,\boldsymbol{v}) = \dot{\boldsymbol{G}}, \quad \text{azaz} \quad \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{P}\,dt = \boldsymbol{G}(t_2) - \boldsymbol{G}(t_1) \tag{12a, b}$$

alakban adta meg, ahol $\boldsymbol{G} = m\,\boldsymbol{v}$ az ún. *mozgásmennyiség,* $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{P}\,dt$ pedig az ún. *impulzus.* A (12a) alak $m = \text{const}$ esetén azonos a (11)-gyel. A relativitás-elmélet értelmében azonban igen nagy sebességeknél $m \neq \text{const}$, hanem

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m(v),$$

ahol m_0 a nyugvó test *tömege,* c a fénysebesség; így módon a (12a, b) alak általánosabb érvényű.

A (11)-et azért nevezik a dinamika alapegyenletének, mert m és $\boldsymbol{P}(t)$ ismeretében meghatározza a mozgás $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ gyorsulását, amelyből — *kétszeri integrálással*[1] és a $\boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0$ kezdeti feltételek figyelembevételével, tehát

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\,t + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} \ddot{\boldsymbol{r}}(\tau')\,d\tau' \tag{13}$$

módon kiszámítható a mozgás $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ helyzetfüggvénye.

A harmadik axióma: *a kölcsönhatás törvénye;* eszerint, *ha az 1 test erőt gyakorol a 2-re, akkor a 2 test is hat az 1-re hasonló nagyságú, irányú, de ellentett értelmű erővel,* azaz

$$\boldsymbol{P}_{12} = -\boldsymbol{P}_{21}. \tag{14}$$

A negyedik axióma: *az erők eredője;* eszerint *ugyanazon tömegpontra egyidejűleg működő erők összhatása egyenértékű vektori összegük hatásával,* azaz

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}, \quad \text{ahol} \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 + \ldots + \boldsymbol{P}_n. \tag{15}$$

Más szóval minden egyes erő más erők jelenlétében is — azoktól függetlenül és nem befolyásolva — saját hatását fejti ki. Ez az ún. *szuperpozíció elve.*

A (15) értelmében egy erő pl. derékszögű komponenseivel helyettesíthető.

2'. MUNKA, KINETIKUS ENERGIA. A (11) alapegyenlet integrálása során bizonyos esetekben a számítási teendők jelentősen csökkenthetők a (11) egy vagy több ún. *első integrál*jának közvetlen felírásával. Ezek célszerűvé teszik a munka és a kinetikus energia fogalmának bevezetését.

Az $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{P}$ alapegyenlet mindkét oldalát szorozzuk skalárisan $\dot{\boldsymbol{r}}$-tal:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{P}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

majd integráljuk t szerint, a jobb oldalon utólag az $\boldsymbol{r}$ változót bevezetve:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{r}. \tag{16a}$$

Az egyenlet mindkét oldala új mennyiséget definiál.

A jobboldali integrált munkának nevezzük. A $\boldsymbol{P}$ erő elemi munkája, midőn a tömegpontot $d\boldsymbol{r}$ elmozdulásra kényszeríti, a $\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{r} = P\,ds\cos\varphi = P_s\,ds$ skalár szorzattal egyenlő. Ezen elemi munkák összegeként, *a* $\boldsymbol{P}$ *erő munká-ja,* midőn a tömegpontot a G görbe $\boldsymbol{r}_1$ pontjából $\boldsymbol{r}_2$ pontjába mozdítja el, nyilván *a* $\boldsymbol{P}$ *erő* $\boldsymbol{r}_1$ *és* $\boldsymbol{r}_2$ *pont között, a G görbe mentén vett integráljá*val egyenlő:

$$L = (G)\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{r} = (G)\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}P_s\,ds = (G)\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz), \tag{17}$$

ahol X, Y, Z a $\boldsymbol{P}$ erővektor koordinátái. *A munka általában* – az $\boldsymbol{r}_1$ kezdő- és az $\boldsymbol{r}_2$ végponton kívül – *a G görbe alakjától is függ;* ily módon az $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ elemi munka általában nem teljes differenciál.

Több erő munkája algebrailag adódik össze, azaz $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ esetén

$$\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P}_1\,d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{P}_2\,d\boldsymbol{r}.$$

A munka változási sebességét, vagyis idő szerinti deriváltját *teljesítménynek nevezzük;* jelölése:

$$N = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}.$$

A (16a) bal oldala által definiált új mennyiség *az m tömegű és v sebességű pont kinetikus energiája,* más néven *lendülete:*

$$E = \frac{1}{2}mv^2. \tag{18}$$

A fentebb bevezetett jelölésekkel a (16a) formula a következőképpen írható:

$$E_2 - E_1 = L. \tag{16b}$$

Ez az ún. ***munka-tétel;*** eszerint *a tömegpont kinetikus energiájának megváltozása egyenlő a reá ható (eredő) erő munkájával.*

3'. CENTRÁLIS ERŐK. A FELÜLETI TÉTEL. *A tömegpontra ható erőt centrálisnak mondjuk, ha hatásvonala állandóan illeszkedik egy bizonyos pontra, ún. centrumra.* Ez utóbbit célszerűen a koordináta-rendszer origójának választva, a tömegpont hely-

zetvektora és a reá ható centrális erő vektora, így az általa létesített gyorsulás vektora is párhuzamos (sőt kollineáris), tehát

$$\boldsymbol{P} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = k\,\boldsymbol{r}. \tag{17}$$

Centrális pl. az egyenletes körmozgás, az elliptikus (és speciálisan a cirkuláris, a lineáris) rezgés, a bolygómozgás.

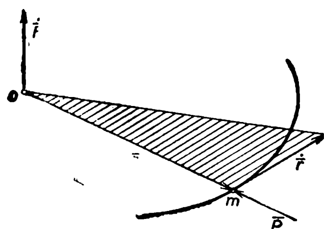
A (17) értelmében

$$m(\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}) = \frac{d}{dt}\,m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}\times k\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0},$$

következésképpen

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = 2\boldsymbol{c}. \tag{18a}$$

Minthogy a $2\,d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}$ az $\boldsymbol{r}$ és $d\boldsymbol{r}$ vektor által felfeszített háromszög kétszeres területvektora (21. ábra), az



21. ábra

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) \tag{19}$$

pedig az ún. *felületsebesség-vektora*, ezért a (18a) formula

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{c} \tag{18b}$$

alakba is átírható. Ez ún. **felületi tétel;** eszerint *a centrális erő hatása alatt mozgó tömegpont (helyzetvektorának) felületsebesség-vektora állandó.* Más szóval a centrális mozgás pályája síkgörbe, és $[\boldsymbol{F} = \boldsymbol{c}\cdot(t_2 - t_1)$ értelmében$]$ a helyzetvektor egyenlő időközökben egyenlő területeket súrol. Tételünk a bolygómozgás speciális esetében KEPLER *második törvénye* néven ismeretes. A (18a) egyébként a (17) mozgásegyenlet egy első integrálját szolgáltatja. A centrális mozgás síkját választva koordinátasíknak, a felületsebesség nagysága

$$\dot{F} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = c \tag{18c}$$

alakot ölt

Definiáljuk most az $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ helyzet- és $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ sebességvektorú, $\boldsymbol{P}$ erővektor hatása alatti m tömegpontnak az O pontra vonatkozó $\boldsymbol{M}$ *forgatónyomaték-* és $\boldsymbol{\Pi}$ *perdületvektorát*

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}, \quad \text{illetve} \quad \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{r}\times m\,\boldsymbol{v} = m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) \tag{20, 21}$$

módon. E két vektor kapcsolata egymással

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}} = m\,\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = m(\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{r}\times m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} \tag{22}$$

módon alakul. Ez az ún. **perdület-tétel;** eszerint *a perdület idő szerinti deriváltja a forgató nyomatékkal egyenlő.* E tétel nyilván analogonja a II. axiómának.

E tétel egyébként az impulzus-tétellel analóg

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}\, dt = \bar{\Pi}(t_2) - \bar{\Pi}(t_1)$$

alakban is felírható, ahol a bal oldal az ún. *nyomatékimpulzus*.

Az előzőkből következik továbbá a

$$\bar{\Pi} = 2m\dot{\boldsymbol{F}} \quad \text{és az} \quad \boldsymbol{M} = 2m\ddot{\boldsymbol{F}}$$

kapcsolat, ahol $\ddot{\boldsymbol{F}}$ a felületgyorsulás vektora.

A perdület-tételt centrális erőkre alkalmazva, a (17) alapján írható, hogy

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}\times k\,\boldsymbol{r} = 0, \quad \text{tehát} \quad \bar{\Pi} = m\,(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = 2m\,\boldsymbol{c}. \tag{23}$$

Ez ***a perdület megmaradásának tétele;*** ez tartalmilag a felületi tétellel azonos, de általánosításra alkalmasabb alakú.

d) Szemináriumi tárgykörök

α) A térgörbék egyes speciális kérdései

I°. Simuló gömb. Simuló görbe. Tárgyaljuk a simuló gömb értelmezését, és ennek alapján a simuló gömb középpontjának és sugarának meghatározását, továbbá a síksereg simuló gömbjének értelmezését és a térgörbe normálsík-seregének simuló görbéjére vonatkozó tételt.

Ajánlott irodalom: HAJÓS (M. 2.) I. 31—33., 47—48. o. — SÁRKÖZY (M. 3.) 36—37. o. — BAULE (M. 12) 25—27. o.

II°. BERTRAND-féle görbepárok. Vizsgáljuk e közös főnormálisú [azaz $\boldsymbol{r}_2(u) = \boldsymbol{r}_1(u) + k\,\boldsymbol{n}(u)$ kapcsolatú] görbepárok sajátságait, pl. a k = const, $\boldsymbol{t}_1\,\boldsymbol{t}_2$ = const tényt, a két kísérő triéder merev kapcsolatát, a görbület és csavarodás lineáris kapcsolatát, a $ds_i\sqrt{G_i^2 + T_i^2}$ $(i = 1,2)$ invarianciáját, a $T_1\,T_2$ = const tényt, a görbületi középpontokkal kapcsolatos tényt stb. Dolgozzunk ki egy-két példát!

Ajánlott irodalom: SÁRKÖZY (M. 3.) 37—43. o. — BAULE (M. 12.) 22—24. o.

III°. Általános csavarvonalak (lejtőgörbék). Vizsgáljuk ezen, az adott $\boldsymbol{a}$ iránnyal állandó szöget bezáró [$\boldsymbol{t}(s)\,\boldsymbol{a}$ = const] térgörbék sajátságait, pl. az $\boldsymbol{n}(s)\,\boldsymbol{a} = 0$ tényt, a $\boldsymbol{d} = T\,\boldsymbol{t} + G\,\boldsymbol{b}$ alakú ún. DARBOUX-vektor iránytartását, az $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(u) + v\,\boldsymbol{d}(u)$ felület henger voltát stb.

Ajánlott irodalom: SÁRKÖZY (M. 3.) 43—45. o. — BAULE (M. 12.) 24—25. o.

IV°. Sík- és térgörbe evolvense, illetve evolutája. Tanulmányozzuk a síkgörbesereg burkolójának meghatározását, a síkgörbe (evolvens) normálisainak burkolóját (evoluta), a síkevoluta helyére (evolvensének görbületi középpontjai) és ívhosszára (a végponti görbületi sugarak különbsége) vonatkozó tételt, a térgörbe (evoluta) érintőinek ortogonális trajektóriáját (evolvens) s ennek sajátságait. Dolgozzunk ki néhány példát!

Ajánlott irodalom: HAJÓS (M. 2.) I. 33—46. o. — SÁRKÖZY (M. 3.) 49—52. o. — BAULE (M. 12.) 27—30. o.

V°. Térgörbe kifejthető vonalfelülete (torzfelülete). Tárgyaljuk ezen, a térgörbe érintői képezte [tehát $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(u) + v\,\dot{\boldsymbol{r}}(u)$ egyenletű] felület főbb sajátságait.

Ajánlott irodalom: HAJÓS (M. 2.) I. 48—50. o. — BAULE (M. 12.) 16—22. o.

β) Tömegpontrendszer és merev test mechanikája*

I°. T ö m e g p o n t m e c h a n i k á j a (k i e g é s z í t é s). A c) *α)* alatti összeállítás kiegészítéséül tárgyaljuk még a következőket: Konzervatív erőtér, potenciális energia. Kényszermozgások, súrlódás. Tömegpont egyensúlya. A virtuális munka elve. A D'ALEMBERT-elv, a dinamika és sztatika kapcsolata. A dinamika alapegyenlete mozgó koordináta-rendszerben.

Példaként tanulmányozzuk a tömegpont csillapítatlan és csillapított szabad- és kényszerrezgését, továbbá a bolygók mozgását a gravitációs erőtérben.

Ajánlott irodalom: BUDÓ (T. 1.) I. 9., 11–14., 17–21. §. – КОЧИН (M. 8.) II. 9–10. §.

II°. T ö m e g p o n t r e n d s z e r m e c h a n i k á j a. Tárgyaljuk a következőket: A pont- és erőrendszer. Az impulzustétel (súlyponttétel). Az impulzusnyomaték tétele. Az energiatétel. A mozgásegyenletek integráljai. A virtuális munka elve és a D'ALEMBERT-elv. A kényszerfeltételek osztályozása. (A LAGRANGE-egyenletről, a HAMILTON-elvről és egyenletekről stb.)

Példaként tanulmányozzuk az ún. kéttest-problémát!

Ajánlott irodalom: BUDÓ (T. 1.) II. 26–31. § (32–38. §), 39. §.

III°. M e r e v t e s t m e c h a n i k á j a. Tárgyaljuk a következőket: A merev test mozgásának felbontása transzlációra és rotációra; analitikus leírása. A mozgásegyenletről. A sztatika alapjai. Forgás fix tengely körül. A síkmozgás egyenletei. A tehetetlenségi nyomaték. A kinematikus energia, az impulzus és az impulzusnyomaték. Fix pont körüli mozgás és a legáltalánosabb mozgás egyenletei.

Példaként tanulmányozzuk a pörgettyű mozgásegyenleteit, különböző speciális esetekben!

Ajánlott irodalom: BUDÓ (T. 1.) 44–53., 57–59. §. – HAJÓS (M. 2.) I. 51–65. o

* E tárgykörökhöz lásd a 3. §. a) és b) egyes részeit!

2. §. KÉT SKALÁRVÁLTOZÓ VEKTORFÜGGVÉNYE
(FELÜLETEK DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁJA)

a) A függvény analízise. A felület

α) A függvény és határértéke, folytonossága, deriváltja

I° A függvény fogalma. 1'. ***Definíció.*** **Az $\boldsymbol{r}$** *vektorváltozót az u és a v skalárváltozó függvény-ének mondjuk a T tartományban, ha az $(u, v) \in T$ értékpárokhoz meghatározott* $\boldsymbol{r}$ *vektorokat rendelünk hozzá valamilyen* (rendszerint képlet formájában megadott) *utasítással.* Jelekkel:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v), \qquad (u, v) \in T. \tag{1}$$

Itt csak *egyértékű* függvényekre szorítkozunk, amelyeknél minden (u, v) értékpárhoz csak egy-egy $\boldsymbol{r}$ vektor tartozik.

Az origóból felrakott $\boldsymbol{r}(u, v)$ vektorok végpontjai — általános esetben — *térbeli ponthalmazt* képeznek.

2'. Az $\boldsymbol{r}$ vektorral együtt ennek az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ derékszögű jobbrendszerbeli x, y, z koordinátája is u. v függvénye, azaz

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v). \tag{2}$$

eszerint *az (1) vektorfüggvény egyértékű a (2) skalárfüggvény-rendszerrel.*

II°. Határérték. Folytonosság. A felület. 1'. ***Definíciók.*** *Az $\boldsymbol{r}_0$ vektort az $\boldsymbol{r}(u, v)$ függvény (u_0, v_0) helyi határérték-ének nevezzük* és

$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_0 \tag{3a}$$

módon jelöljük, *ha tetszőleges pozitív ε-hoz található olyan pozitív δ(ε), hogy*

$$|\boldsymbol{r}(u, v) - \boldsymbol{r}_0| < \varepsilon, \textit{midőn} \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} < \delta(\varepsilon). \tag{3b}$$

Ha az $\boldsymbol{r}(t)$ függvény (u_0, v_0) helyi határértéke megegyezik az ottani határértékkel. azaz

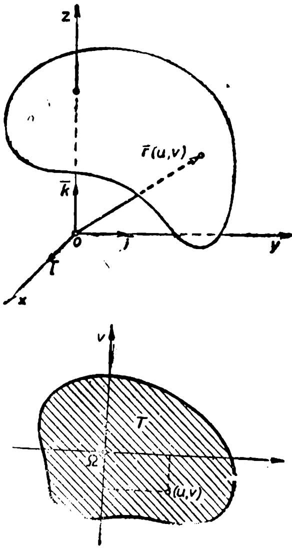
$$\lim_{\substack{u \to u_0 \\ v \to v_0}} \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}(u, v), \tag{4a}$$

tehát

$$|\Delta \boldsymbol{r}| < \varepsilon, \text{ midőn } \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} < \delta(\varepsilon), \tag{4b}$$

akkor az $\boldsymbol{r}(u, v)$ függvényt az (u_0, v_0) helyen folytonos-nak nevezzük.

2'. Ha a (4a) követelmény minden $(u, v) \in T$ helyen teljesül, akkor a T *tartományban folytonos függvényről* beszélünk. A továbbiakban csak ilyenek szerepelnek. *Az origóból felrakott* $\boldsymbol{r}(u, v)$ *vektorok végpontjainak geometriai helye — a T-ben folytonos függvény esetén — (folytonos) f e l ü l e t* (22. ábra).



22. ábra

III°. A függvény differenciálhatósága. 1'. ***Definíció.*** *Az* $\boldsymbol{r}(u, v)$ *függvényt az* (u_0, v_0) *helyen differenciálhatónak nevezzük, ha növekménye előállítható*

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{d}_u \Delta u + \boldsymbol{d}_v \Delta v + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \Delta u + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \Delta v \qquad (5a)$$

alakban, ahol $\boldsymbol{d}_u$ és $\boldsymbol{d}_v$ csak az (u_0, v_0) helytől függ, $\bar{\varepsilon}_1$ és $\bar{\varepsilon}_2$ pedig a Δu és a Δv növekménytől is, mégpedig úgy, hogy

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \bar{\varepsilon}_1 = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \bar{\varepsilon}_2 = 0. \qquad (5b)$$

Ilyenkor a $v = const$ *és az* $u = const$ *esetnek megfelelő differenciálhányadosok határértéke is létezik, és ezek éppen a*

$$\boldsymbol{d}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta u} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{r}_u, \quad \boldsymbol{d}_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{r}_v \qquad (5c)$$

p a r c i á l i s d e r i v á l t a k.

Megjegyzendő, hogy a parciális deriváltak létezése a differenciálhatóságnak szükséges, de nem elegendő, folytonosságuk viszont elegendő, de nem szükséges feltétele; az utóbbi esetben a függvényt *folytonosan differenciálható*nak nevezzük. A továbbiakban (a T tartományban) ilyen tulajdonságú függvények fognak szerepelni.

2'. *A parciális differenciálási szabályok* ugyanazok, mint a skaláranalízisben:

$$(\boldsymbol{r}_0)_u = 0, \ (\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2)_u = \boldsymbol{r}_{1u} \pm \boldsymbol{r}_{2u}, \ (t\boldsymbol{r})_u = t_u \boldsymbol{r} + t\boldsymbol{r}_u,$$
$$(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2)_u = \boldsymbol{r}_{1u}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_{2u}, \ (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)_u = \boldsymbol{r}_{1u} \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_{2u}, \qquad (6)$$
$$\boldsymbol{r}[g(u, v), h(u, v)]_u = \boldsymbol{r}_g g_u + \boldsymbol{r}_h h_u, \ \boldsymbol{r}[u(t), v(t)]_t = \boldsymbol{r}_u \dot{u} + \boldsymbol{r}_v \dot{v}.$$

Ezek alapján pl.

$$\boldsymbol{r}_u = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})_u = x_u \boldsymbol{i} + y_u \boldsymbol{j} + z_u \boldsymbol{k}.$$

3'. A függvény *másodrendű parciális deriváltjait*

$$\boldsymbol{r}_{uu} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_u}{\Delta u}, \quad \boldsymbol{r}_{uv} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_u}{\Delta v}, \quad \boldsymbol{r}_{vu} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_v}{\Delta u}, \quad \boldsymbol{r}_{vv} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_v}{\Delta v} \qquad (7a)$$

módon értelmezzük. Ha ezek valamennyien folytonosak, akkor — YOUNG tétele* értelmében —

$$\boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{r}_{vu}, \qquad (7b)$$

vagyis *a vegyes másodrendű deriváltak megegyeznek,* a deriválás sorrendje felcserélhető.

* L. pl. *Stachó* [M. 11

A magasabb rendű parciális deriváltak értelemszerűen hasonló módon nyerhetők. Megjegyzendő, hogy a felület b) szerinti differenciálgeometriai vizsgálatához az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ függvény $1 \leqq \varrho$*-szori differenciálhatósága* szükséges; pl. görbületi vizsgálatnál $\varrho = 2$.

4'. Ha $\boldsymbol{r}(u, v)$ függvény első és második parciális deriváltjai léteznek az (u_0, v_0) helyen, akkor e hely környezetében

$$\boldsymbol{r}(u, v) \approx \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_u \Delta u + \boldsymbol{r}_v \Delta v + \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_{uu} \Delta u^2 + \boldsymbol{r}_{uv} \Delta u \Delta v + \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_{vv} \Delta v^2; \qquad (8)$$

a jobboldali *másodfokú* TAYLOR-*polinom*-ban $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_u, \ldots$ az $(u_0, v_0$ helyen veendő, továbbá $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$. Magasabb rendű TAYLOR-polinom — nehézkessége miatt — ritkán kerül alkalmazásra.

Példák és feladatok

1. Értelmezzünk $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ típusú függvényeket

A) az u, v paramétersíkbeli $\bar{\varrho} = \boldsymbol{i}' u + \boldsymbol{j}' v$ vektor $\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u}$ hajlásszögének és $\varrho = \sqrt{u^2 + v^2}$ nagyságának a felhasználásával;

B) az u és v hiperbolikus és area-függvényeinek felhasználásával.

Megoldás. A) Ilyen függvény pl.

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \boldsymbol{j} \frac{u^2}{v^2} + \boldsymbol{k}(u^2 + v^2) \quad [= \boldsymbol{i} \cos \psi + \boldsymbol{j} \operatorname{ctg}^2 \psi + \boldsymbol{k} \varrho^2];$$

B) Ilyen függvény pl.

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v + \boldsymbol{j}(\operatorname{th} u - \operatorname{ct} v) + \boldsymbol{k} \operatorname{arth} \frac{v}{u}.$$

2. Vizsgáljuk az alábbi vektorfüggvényeket értelmezés, egyértékűség, illetve az egyenértékű skalárfüggvény-rendszer szempontjából:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} \frac{\sin u}{v} + \boldsymbol{j} \frac{u^2}{v - 1} + \boldsymbol{k} e^{\frac{v}{u-2}}$;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} \operatorname{Arctg} \frac{v}{u} + \boldsymbol{j} \sqrt{u^2 + v^2} + \boldsymbol{k} uv$;

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} \cos u \cos v + \boldsymbol{j} \cos u \sin v + \boldsymbol{k} \sin u$.

Megoldás. A) E függvény nincs értelmezve a $v = 0$, a $v = 1$ és az $u = 2$ értékekre. Ez külön utasítással pótolható; pl. $\boldsymbol{r}(u, 0) = \boldsymbol{i} u + \boldsymbol{j} u^2 + \boldsymbol{k} u^3$, $\boldsymbol{r}(u, 1) = \boldsymbol{i}(u + 1) + \boldsymbol{j}(u^2 + 1) + \boldsymbol{k}(u^3 + 1)$, $\boldsymbol{r}(2, v) = \boldsymbol{i}(2 + v) + \boldsymbol{j}(4 + v^2) + \boldsymbol{k}(8 + v^3)$.

B) E függvény nem egyértékű. Egyértékűvé tehető pl. a gyök pozitív értékének és az Arc ... függvény $-\pi/2 < \operatorname{arc} \ldots < \pi/2$ főértékének kiválasztásával.

C) A megfelelő skalár függvényrendszer:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u.$$

3. Vizsgáljuk az alábbi függvényeket határérték és folytonosság szempontjából:

A) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \sin \frac{1}{u} + \mathbf{j}\, v^2 u + \mathbf{k}\, u v^3;$

B) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}\, u v + \mathbf{j}\, e^{\frac{1}{v-5}} + \mathbf{k}(u^2 - v^2).$

C) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \operatorname{tg} u v + \mathbf{j} \frac{e^u - 1}{v} + \mathbf{k}(u + v).$

Megoldás. A) A $\lim\limits_{u \to 0} \mathbf{r}(u, v)$ határfüggvény nem létezik, de még a $\lim\limits_{u \to +0} r(u, v)$ jobboldali és a $\lim\limits_{u \to -0} (u, v)$ baloldali határfüggvény sem, mert e határátmenetek során $\sin \frac{1}{u}$ végtelen sokszor oszcillál -1 és $+1$ között; így $u = 0$-nál folytonosságról sem lehet szó.

B) A $\lim\limits_{v \to 5} \mathbf{r}(u, v)$ határfüggvény ugyan nem létezik, de létezik a jobboldali

$$\lim_{v \to 5+0} \left[\mathbf{i}\, u v + \mathbf{j}\, e^{\frac{1}{v-5}} + \mathbf{k}(u^2 - v^2) \right] = \infty,$$

valamint baloldali

$$\lim_{v \to 5-0} \left[\mathbf{i}\, u v + \mathbf{j}\, e^{\frac{1}{v-5}} + \mathbf{k}(u^2 - v^2) \right] = 5\, \mathbf{i}\, u + \mathbf{k}(u^2 - 25)$$

határfüggvény; $v = 5$-nél folytonosságról ismét nem lehet szó.

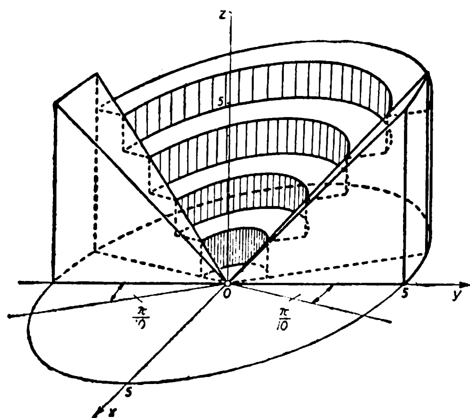
C) A $\lim\limits_{u \to 0} \mathbf{r}(u, v)$ határfüggvény létezik, mégpedig

$$\lim_{u \to 0} \left[\mathbf{i} \operatorname{tg} u v + \mathbf{j} \frac{e^u - 1}{u} + \mathbf{j}(u + v) \right] = \\ = \mathbf{j} + \mathbf{k}\, v.$$

Függvényünk $u = 0$-nál — értelmezés hiányában — nem folytonos. Ha azonban az értelmezést

$$\mathbf{r}(0, v) = \lim_{u \to 0} \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{j} + \mathbf{k}\, v$$

módon kiegészítjük, ezzel a függvényt $u = 0$-nál folytonossá tesszük.



23. ábra

4. Ábrázoljuk axonometrikusan az alább értelmezett szakadásos függvénynek megfelelő felületet:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{cases} \mathbf{i}\, u \cos v + \mathbf{j}\, u \sin v + \mathbf{k}\, n, & \text{ha } n < u < n + 1 \text{ és } \pi/10 < |v| < 9\pi/10, \\ \mathbf{i}\, u \cos v + \mathbf{j}\, u \sin v + \mathbf{k}\, u, & \text{ha } 0 < |v| < \pi/10 \text{ és } 9\pi/10 < |v| < \pi, \end{cases}$$

ahol $-\pi < v \leqq \pi$ és $n = 0, 1, \ldots, 4.$

Megoldás. A kérdezett felület fele a 23. ábrán látható.

5. Állítsuk elő az $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(u^3 - 2v^2) + \boldsymbol{j}\, u\, v^2 + \boldsymbol{k}\,(u^2 v - u)$ vektorfüggvény első és második parciális deriváltvektorait, majd írjuk fel az $u = v = 1$ hely környezetére érvényes másodfokú, közelítő TAYLOR-polinomját.

Megoldás. $\boldsymbol{r}(1, 1) = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. A szükséges deriváltvektorok:

$$\boldsymbol{r}_u(u, v) = 3\boldsymbol{i}\, u^2 + \boldsymbol{j}\, v^2 + \boldsymbol{k}(2u\, v - 1),\quad \boldsymbol{r}_u(1, 1) = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_v(u, v) = -4\boldsymbol{i}\, v + 2\boldsymbol{j}\, u\, v + \boldsymbol{k}\, u^2,\quad \boldsymbol{r}_v(1, 1) = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_{uu}(u, v) = 6\boldsymbol{i}\, u + 2\boldsymbol{k}\, v,\quad \boldsymbol{r}_{uu}(1, 1) = 6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_{uv}(u, v) = 2\boldsymbol{j}\, v + 2\boldsymbol{k}\, u,\quad \boldsymbol{r}_{uv}(1, 1) = 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_{vv}(u, v) = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}\, u,\quad \boldsymbol{r}_{vv}(1, 1) = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}.$$

A (8) formula szerint a kérdezett TAYLOR-polinom:

$$\boldsymbol{r}(u, v) \approx (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + (3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\,\Delta u + (-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\,\Delta v +$$
$$+ \frac{1}{2}(6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k})\,\Delta u^2 + (2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})\,\Delta u\,\Delta v + \frac{1}{2}(-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\,\Delta v^2.$$

6. Adva van az

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,\frac{a\,u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \boldsymbol{j}\,\frac{a\,v}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \boldsymbol{k}\, b \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u},$$
$$u = e^{-t}\cos t,\quad v = e^{-t}\sin t$$

függvény-láncolat; kiszámítandó a $\dot{\boldsymbol{r}}[u(t), v(t)]$ deriváltvektor.

Megoldás. A (6) alatt említett

$$\dot{\boldsymbol{r}}[u(t),\ v(t)] = \boldsymbol{r}_u[u(t),\ v(t)]\,\dot{u}(t) + \boldsymbol{r}_v[u(t),\ v(t)]\,\dot{v}(t)$$

láncszabályt alkalmazzuk.

$$\boldsymbol{r}_u(u, v) = \boldsymbol{i}\,\frac{a\,v^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}} - \boldsymbol{j}\,\frac{a\,u\,v}{(u^2 + v^2)^{3/2}} - \boldsymbol{k}\,\frac{b\,v}{u^2 + v^2},$$
$$\boldsymbol{r}_u[u(t), v(t)] = e^t \sin t\,(\boldsymbol{i}\, a \sin t - \boldsymbol{j}\, a \cos t - \boldsymbol{k}\, b);$$
$$\boldsymbol{r}_v(u, v) = \boldsymbol{i}\,\frac{-a\,u\,v}{(u^2 + v^2)^{3/2}} + \boldsymbol{j}\,\frac{a\,u^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}} + \boldsymbol{k}\,\frac{b\,u}{u^2 + v^2},$$
$$\boldsymbol{r}_v[u(t), v(t)] = e^t \cos t\,(-\boldsymbol{i}\, a \sin t + \boldsymbol{j}\, a \cos t + \boldsymbol{k}\, b);$$
$$\dot{u}(t) = e^t(-\cos t - \sin t),\quad \dot{v}(t) = e^{-t}(-\sin t + \cos t).$$

A kérdezett deriváltvektor tehát:

$$\dot{\boldsymbol{r}}[u(t), v(t)] = (-\sin t \cos t - \sin^2 t)\,(\boldsymbol{i}\, a \sin t - \boldsymbol{j}\, a \cos t - \boldsymbol{k}\, b) +$$
$$+ (-\sin t \cos t + \cos^2 t)\,(-\boldsymbol{i}\, a \sin t + \boldsymbol{j}\, a \cos t + \boldsymbol{k}\, b) = -\boldsymbol{i}\, a \sin t + \boldsymbol{j}\, a \cos t + \boldsymbol{k}\, b.$$

Megjegyzendő, hogy esetünkben történetesen sokkal egyszerűbb lett volna az

$$\boldsymbol{r}[u(t), v(t)] = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, b \sin t + \boldsymbol{k}\, b\, t$$

összetett függvény közvetlen t szerinti deriválása.

β) Felületek. Felületi görbék. Érintősík

I°. A felület megadási módjai. 1′. Említettük már, hogy az origóból felrakott $\boldsymbol{r}(u, v)$ vektorok végpontjainak geometriai helye — a T tartományban folytonos függvény esetén — (folytonos) *felület*. Az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \tag{1a}$$

vektorfüggvényt a felület paraméteres egyenletének, koordinátákra bontott

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{1b}$$

alakját pedig a felület paraméteres egyenletrendszerének nevezzük; ez *a felület* GAUSS-*féle megadási módja.*

2′. Ha speciálisan az x és az y derékszögű koordinátát választjuk paraméternek, akkor

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y), \tag{2a}$$

koordinátákra bontva pedig

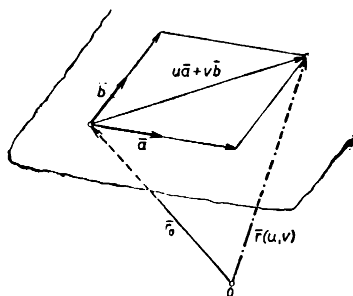
$$[x = x, \quad y = y,] \quad z = f(x, y); \tag{2b}$$

ez *a felület* EULER—MONGE-*féle megadási módja.*

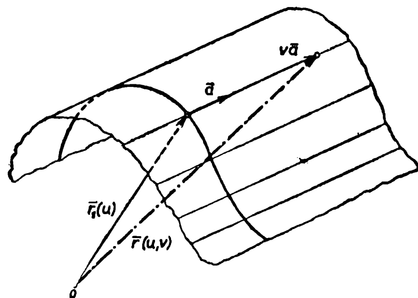
3′. Megemlítjük, hogy a felület

$$u(\boldsymbol{r}) = u_0$$

módon, azaz *skalár-vektor függvény szintfelületeként* is megadható.*



24. ábra



25. ábra

II.° Néhány felület vektoregyenlete. Mutassuk meg most néhány fontos felület vektoregyenletének előállítását!

1′. Az $\boldsymbol{r}_0$ pontra illeszkedő, valamint az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorral párhuzamos *sík* (24. ábra) vektoregyenlete:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_0 + u\,\boldsymbol{a} + v\,\boldsymbol{b}. \tag{3a}$$

2′. Az $\boldsymbol{r}_1(u)$ vezérgörbéjű és $\boldsymbol{a}$ alkotó-irányú *hengerfelület* (25. ábra) vektoregyenlete:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_1(u) + v\,\boldsymbol{a}. \tag{3b}$$

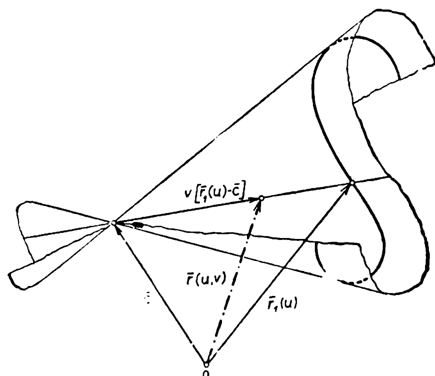
* L. bővebben a 3. § a) α) I° helyen.

3'. Az $\boldsymbol{r}_1(u)$ vezérgörbéjű és $\boldsymbol{c}$ csúcspontú *kúpfelület* (26. ábra) vektoregyenlete:

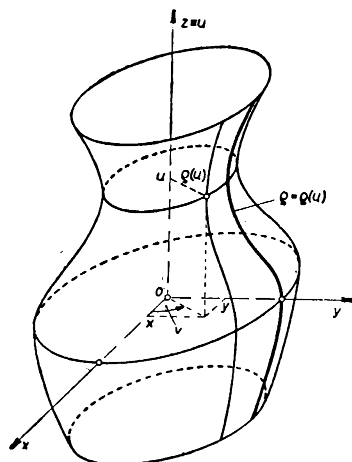
$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{c} + v\,[\boldsymbol{r}_1(u) - \boldsymbol{c}]. \tag{3c}$$

4'. A $\boldsymbol{k}$ tengelyirányú és $\varrho(z)$ meridiángörbéjű *forgásfelület* (27. ábra) vektoregyenlete:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,\varrho(u)\cos v + \boldsymbol{j}\,\varrho(u)\sin v + \boldsymbol{k}\,u. \tag{3d}$$



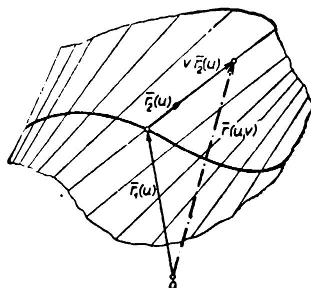
26. ábra



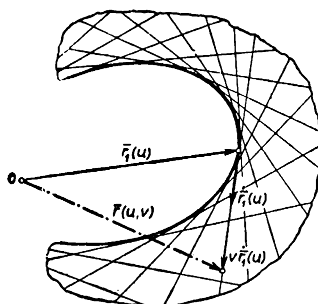
27. ábra

5'. Az $\boldsymbol{r}_1(u)$ vezérgörbéjű és $\boldsymbol{r}_2(u)$ iránvhatározójú *vonalfelület* (28. ábra) vektoregyenlete:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_1(u) + v\,\boldsymbol{r}_2(u). \tag{3e}$$



28. ábra



29. ábra

6'. Az $\boldsymbol{r}_1(u)$ vezérgörbéjű és ennek érintői képezte, tehát $\dot{\boldsymbol{r}}_1(u)$ irányhatározójú *kifejthető vonalfelület* (29. ábra) vektoregyenlete:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_1(u) + v\,\dot{\boldsymbol{r}}_1(u). \tag{3f}$$

III°. F e l ü l e t i g ö r b é k, é r i n t ő s í k, ha $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$. 1′. A felületek tárgyalásánál a felületi görbék vizsgálatából indulunk ki.

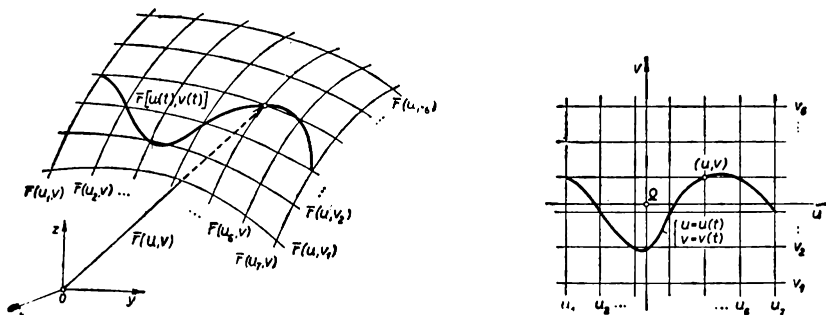
Jellegzetes felületi görbék az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, c) \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(c, v) \tag{4}$$

egyenletű u-, illetve *v-paramétervonalak,* amelyek az u, v paramétersík $v = c$, illetve $u = c$ egyeneseinek felületi képei (30. ábra). Igen szemléletes a felületet e térgörbéket hordozó alakzatként feltüntetni. Az *α)* III° (5c) formulákkal definiált

$$\boldsymbol{r}_u \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r}_v \tag{5}$$

parciális deriváltak geometriailag nyilván az u-, illetve v-paramétervonalak *érintővektorait* jelentik.



30. ábra

2′. *Tetszőleges felületi görbét* az u, v paramétersík valamely $u = u(t)$, $v = v(t)$ görbéjének

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,[u(t), v(t)] \tag{6}$$

felületi képeként adhatunk meg (30. ábra). Ha a síkgörbéhez t_0 paraméterű pontjában érintő vonható, azaz ott $\dot{u}$ és $\dot{v}$ létezik, továbbá $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \neq 0$, akkor ugyanez mondható a felületi görbéről is, és *érintővektora* — az *α)* III° (6) utolsó formulája (a láncszabály) szerint —

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_u\,\dot{u} + \boldsymbol{r}_v\,\dot{v}. \tag{7}$$

3′. Egy rögzített P felületi ponton át különböző felületi görbéket vezetve, a P-beli érintő (7) képletében csak (a paramétersíkbeli görbétől függő) $\dot{u}$ és $\dot{v}$ változik meg, míg (a paramétervonalak érintővektorait szolgáltató) $\boldsymbol{r}_u$ és $\boldsymbol{r}_v$ állandó marad. Igaz tehát a következő ***tétel:***

A P ponton átmenő felületi görbék ottani érintői — ha egyáltalán léteznek — egy síkba, mégpedig a paramétervonalak P-beli $\boldsymbol{r}_u$ *és* $\boldsymbol{r}_v$ *érintővektorainak síkjába esnek;* e síkot *a felület P-beli* ***é r i n t ő s í k****-jának*, a $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ vektort pedig *a P-beli* ***f e l ü l e t i n o r m á l i s*** *vektor*nak nevezzük (31. ábra).

Ennek értelmében a felületi normális egyenes és az érintősík *egyenlete*

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, t, \quad \text{illetve} \quad (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{r}_u\, \boldsymbol{r}_v = 0, \qquad (8a,\ 9a)$$

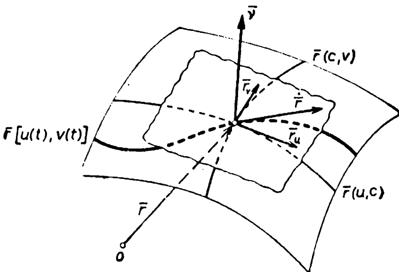
koordinátás alakban pedig

$$\frac{X - x}{y_u z_v - y_v z_u} = \frac{Y - y}{z_u x_v - z_v x_u} = \frac{Z - z}{x_u y_v - x_v y_u}, \qquad (8b)$$

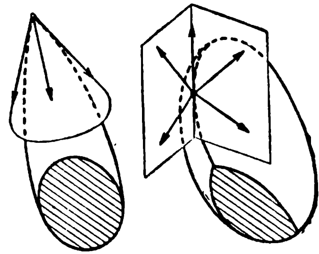
illetve

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \qquad (9b)$$

4′. A továbbiakban ún. *sima* felületdarabon vizsgálódunk; ennek belsejében mindenütt létezik és folytonosan változik az $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \bar{0}$ normálvektor, kerületén pedig legalább határértékkel rendelkezik.



31. ábra



32. ábra

Az olyan felületi pontokban, ahol $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{0}$, felületi normálisról, érintősíkról nem beszélhetünk. Ezek olykor kitüntetett geometriai sajátságú, ún. szinguláris pontok, máskor csupán kedvezőtlen paraméter-választás jelei.

Szinguláris pontok pl. a csúcspontok, a gerincvonal pontjai; e pontokban általában csak egyoldali (baloldali, jobboldali) érintők léteznek és ezek — érintősík helyett — valamilyen érintőkúpot alkotnak (32. ábra).

IV°. Felületi görbék, ha $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y)$. 1′. A felület $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y) = \boldsymbol{i}\, x + \boldsymbol{j}\, y + \boldsymbol{k}\, f(x, y)$ *alakú megadása* esetén a paramétersík maga az x, y koordinátasík, az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, c) \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(c, y) \qquad (10)$$

paramétervonalak a felület és az $y = c$, illetve $x = c$ vetítősíkok metszésvonalai; ezek érintővektorai

$$\boldsymbol{r}_x(1, 0, p), \quad \text{illetve} \quad \boldsymbol{r}_y(0, 1, q), \qquad (11)$$

ahol

$$p = f'_x \quad \text{és} \quad q = f'_y. \qquad (12)$$

Ez esetben az

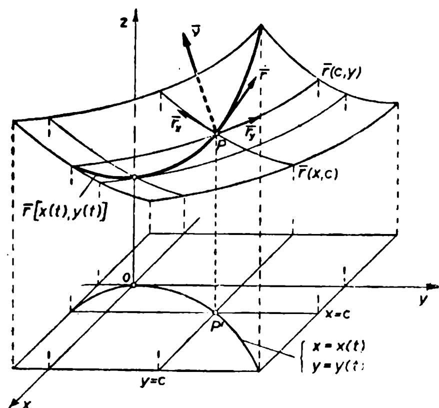
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,[x(t), y(t)] \qquad (13)$$

felületi görbe az $x = x(t)$, $y = y(t)$ egyenes henger és a felület metszésvonala; érintővektora

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_x\, \dot{x} + \boldsymbol{r}_y\, \dot{y}. \qquad (14)$$

2'. A felületi normális vektor most (33. ábra)

$$\bar{v} = \boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = -p\boldsymbol{i} - q\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \tag{15}$$



33. ábra

az érintősík egyenlete pedig

$$-p\,(X-x) - q\,(Y-y) + (Z-z) = 0, \tag{16}$$

ahol $z = f(x, y)$.

Példák és feladatok

1. Írjuk fel néhány ismert felület explicit vagy implicit egyenletét, majd írjuk át ezeket vektoros alakra.

Megoldás. A) $z = x^2 + 4y^2$, $\boldsymbol{r}(x, y) = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\,y + \boldsymbol{k}\,(x^2 + 4y^2)$: elliptikus paraboloid;

B) $z = x^2 - 4y^2$, $\boldsymbol{r}(x, y) = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}\,(x^2 - 4y^2)$: hiperbolikus paraboloid;

C) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 1 = 0$, $\boldsymbol{r}(x, y) = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\,y + \boldsymbol{k}\sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2}$: ellipszoid;

D) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $\boldsymbol{r}(x, y) = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}\sqrt{4 - x^2 - y^2}$: gömb;

E) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, $\boldsymbol{r}(x, y) = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\,y + \boldsymbol{k}\sqrt{x^2 + 4y^2}$: elliptikus kúp;

F) $9x^2 - y^2 - 1 = 0$, $\boldsymbol{r}(x, z) = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\sqrt{9x^2 - 1} + \boldsymbol{k}\,z$: hiperbolikus henger.

Megjegyzendő, hogy e felületek valamennyien az

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

általános egyenletű másodrendű felületek közé tartoznak.

2. Írjuk fel A) a gömb, B) a sík és C) a csavarfelület u, v paraméteres vektoregyenletét, majd írjuk át explicit vagy implicit skalár alakra.

Megoldás. A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,a\cos u\cos v + \boldsymbol{j}\,a\cos u\sin v + \boldsymbol{k}\,a\sin u$,

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2(\cos^2 u\cos^2 v + \cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u - 1) = \\ = a^2[\cos^2 u\,(\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u - 1] = 0 \text{ (34. ábra).}$$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v$, ahol $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$. A megfelelő skalár egyenletrendszer, alkalmas alakban:

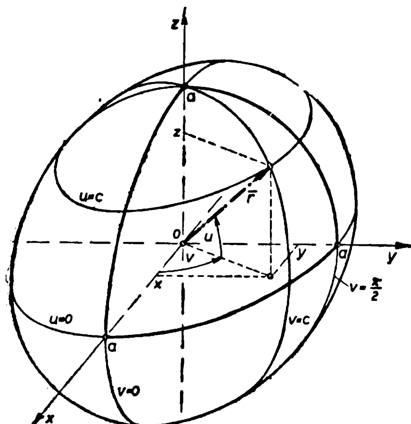
$$a_1u + b_1v - x\cdot 1 = 0,$$
$$a_2u + b_2v - y\cdot 1 = 0,$$
$$a_3u + b_3v - z\cdot 1 = 0.$$

E „homogén" egyenletrendszernek feltétlenül van a triviálistól különböző megoldása, tehát

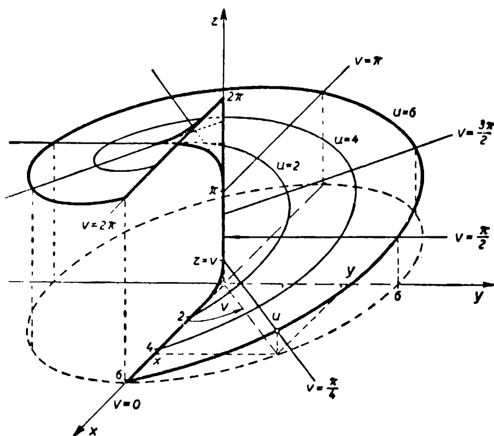
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -x \\ a_2 & b_2 & -y \\ a_3 & b_3 & -z \end{vmatrix} = A\,x + B\,y + C\,z = 0.$$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, u \cos v + \boldsymbol{j}\, u \sin v + \boldsymbol{k}\, v,$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} z, \quad z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \quad (35.\ \text{ábra}).$$



34. ábra



35. ábra

3. Írjuk át az alábbi paraméteres vektoregyenleteket implicit skalár alakra és állapítsuk meg a megfelelő felületet.

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, u \operatorname{ch} v + \boldsymbol{j}\, u \operatorname{sh} v + 2\boldsymbol{k}\, u;$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, v \cos u + \boldsymbol{j} \sqrt{v} \sin \frac{u}{2} + \boldsymbol{k} \frac{v}{2} (1 + \cos u);$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, a \cos u \cos v + \boldsymbol{j}\, b \cos u \sin v + \boldsymbol{k}\, c \sin u.$

Eredmény. **A)** $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$: hiperbolikus kúp;

B) $x + y^2 - z = 0$: (ferde) parabolikus henger;

C) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$: ellipszoid.

4. Állapítsuk meg azon sík vektoregyenletét, amely

A) átmegy az origón és párhuzamos az $\boldsymbol{a}(-1, 2, 3)$ és a $\boldsymbol{b}(3, 0, -1)$ vektorral;

B) átmegy az $\boldsymbol{r}_0(2, -1, -1)$ ponton és párhuzamos az előbbi $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorral;

C) átmegy a $\boldsymbol{c}_1(2, 3, 5)$, $\boldsymbol{c}_2(4, 5, -6)$ és $\boldsymbol{c}_3(1, 3, 2)$ pontokon.

Megoldás. A keresett vektoregyenlet, a (3a) szerint $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}\, u + \boldsymbol{b}\, v$ alakú; C) esetben pl. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{c}_3$.

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = (-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})\, u + (3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})\, v =$
$= \boldsymbol{i}\,(3v - u) + 2\boldsymbol{j}\, u + \boldsymbol{k}\,(3u - v);$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = (2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) + (-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})\, u + (3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})\, v;$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k})\, u + (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k})\, v.$

5. Írjuk fel azon hengerfelület vektoregyenletét, amelynek vezérgörbéje, illetve alkotó-irányvektora

A) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i} \cos u + \boldsymbol{j} \sin u$, $\quad \boldsymbol{a}(1, -3, 4);$

B) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, a \cos u + \boldsymbol{j}\, a \sin u + \boldsymbol{k}\, bu$, $\quad \boldsymbol{a}(2, 5, -7);$

C) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, e^u \cos u + \boldsymbol{j}\, e^u \sin u + \boldsymbol{k}\, e^u$, $\quad \boldsymbol{a}(2, 1, -3).$

Megoldás. A keresett vektoregyenlet a (3b)-ből ismert $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_1(u) + \boldsymbol{a}\, v$ alakú.

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = (\boldsymbol{i} \cos u + \boldsymbol{j} \sin u) + (\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})\, v =$
$= \boldsymbol{i}\,(\cos u + v) + \boldsymbol{j}\,(\sin u - 3v) + 4\,\boldsymbol{k}\, v;$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = (\boldsymbol{i}\, a \cos u + \boldsymbol{j}\, a \sin u + \boldsymbol{k}\, bu) + (2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})\, v;$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = (\boldsymbol{i}\, e^u \cos u + \boldsymbol{j}\, e^u \sin u + \boldsymbol{k}\, e^u) + (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})\, v.$

6. Írjuk fel azon kúpfelület vektoregyenletét, amelynek vezérgörbéje, illetve csúcspontja

A) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, a \cos u + \boldsymbol{j}\, b \sin u$, $\quad \boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{k};$

B) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, a \cos^2 u + \boldsymbol{j}\, a \sin u \cos u + \boldsymbol{k}\, a \sin u$, $\quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0};$

C) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, a \operatorname{ch} u + \boldsymbol{j}\, a \operatorname{sh} u + \boldsymbol{k}\, bu$, $\quad \boldsymbol{c}\,(1, 2, -3).$

Megoldás. A keresett vektoregyenlet a (3c) szerint $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{c} + [\boldsymbol{r}_1(u) - \boldsymbol{c}\,]\, v =$ $= \boldsymbol{c}(1 - v) + v\, \boldsymbol{r}_1(u)$ alakú.

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = 3\boldsymbol{k}\,(1 - v) + (\boldsymbol{i}\, a \cos u + \boldsymbol{j}\, b \sin u)\, v;$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, av \cos^2 u + \boldsymbol{j}\, av \sin u + \boldsymbol{k}\, bvu;$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})\,(1 - v) + (\boldsymbol{i}\, a \operatorname{ch} u + \boldsymbol{j}\, a \operatorname{sh} u + \boldsymbol{k}\, bu)\, v =$
$= \boldsymbol{i}\,(1 - v + av \operatorname{ch} u) + \boldsymbol{j}\,(2 - 2v + av \operatorname{sh} u) + \boldsymbol{k}\,(3v - 3 + bvu).$

7. Felírandó azon (a z tengely körül képzett) forgásfelület vektoregyenlete, amelynek meridiángörbéje

A) $\varrho(z) = z^2$; B) $\varrho(z) = \operatorname{ch} z$; C) $\varrho(z) = \ln z$, $\quad z \geqq 1$.

Megoldás. A keresett vektoregyenlet a (3d) szerint

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, \varrho(u) \cos v + \boldsymbol{j}\, \varrho(u) \sin v + \boldsymbol{k}\, u \text{ alakú}, \quad \varrho(u) \geqq 0.$$

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, u^2 \cos v + \boldsymbol{j}\, u^2 \sin v + \boldsymbol{k}\, u;$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} \operatorname{ch} u \cos v + \boldsymbol{j} \operatorname{ch} u \sin v + \boldsymbol{k}\, u;$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} \ln u \cos v + \boldsymbol{j} \ln u \sin v + \boldsymbol{k}\, u.$

8. Előállítandó azon vonalfelület vektoregyenlete, amelynek vezér-, illetve iránygörbéje

A) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, u, \quad \boldsymbol{r}_2(u) = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\, u;$

B) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i} \cos u + \boldsymbol{j} \sin u, \quad \boldsymbol{r}_2(u) = \boldsymbol{r}_1(u) + \boldsymbol{k}\, c;$

C) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, a \cos u + \boldsymbol{j}\, a \sin u + \boldsymbol{k}\, bu, \quad \boldsymbol{r}_2(u) = \boldsymbol{i} \cos u + \boldsymbol{j} \sin u.$

Megállapítandó e felületek jellege.

Megoldás. A keresett vektoregyenlet a (3e) szerint $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_1(u) + v\, \boldsymbol{r}_2(u)$ alakú.

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = (\boldsymbol{i} \cos u + \boldsymbol{j} \sin u) + (-\boldsymbol{i} \sin u + \boldsymbol{j} \cos u + \boldsymbol{k}\, c)\, v =$
$= \boldsymbol{i} (\cos u - v \sin u) + \boldsymbol{j} (\sin u + v \cos u) + \boldsymbol{k}\, cv,$

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} - 1 = (\cos^2 u + \sin^2 u) + v^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) - v^2 - 1 = 0,$$

vagyis a felület egyköpenyű forgási hiperboloid;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, u + (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\, u)\, v = \boldsymbol{i}\, u + \boldsymbol{j}\, v + \boldsymbol{k}\, uv, \quad xy - z = uv - uv = 0,$

tehát a felület hiperbolikus paraboloid;

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, (a + v) \cos u + \boldsymbol{j}\, (a + v) \sin u + \boldsymbol{k}\, bu, \quad \frac{z}{b} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = 0,$ csavarfelület.

9. Írjuk fel az alábbi térgörbék érintői által képzett kifejthető vonalfelület vektoregyenletét:

A) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, a \cos u + \boldsymbol{j}\, a \sin u + \boldsymbol{k}\, bu;$

B) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, a \cos^2 u + \boldsymbol{j}\, a \sin u \cos u + \boldsymbol{k}\, a \sin u;$

C) $\boldsymbol{r}_1(u) = \boldsymbol{i}\, u^2 + \boldsymbol{j}\, u^3 + \boldsymbol{k}\, u^4.$

Megoldás. A keresett vektoregyenlet a (3f) szerint $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_1(u) + v\, \dot{\boldsymbol{r}}_1(u)$ alakú.

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = (\boldsymbol{i}\, a \cos u + \boldsymbol{j}\, a \sin u + \boldsymbol{k}\, bu) + (-\boldsymbol{i}\, a \sin u + \boldsymbol{j}\, a \cos u + \boldsymbol{k}\, b)\, v =$
$= \boldsymbol{i}\, a (\cos u - v \sin u) + \boldsymbol{j}\, a (\sin u + v \cos u) + \boldsymbol{k}\, b\, (u + v),$ ez az ún. kifejthető csavarfelület;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, a (\cos^2 u - v \sin 2u) + \boldsymbol{j}\, a (\sin u \cos u + v \cos 2u) +$
$+ \boldsymbol{k}\, a (\sin u + v \cos u);$

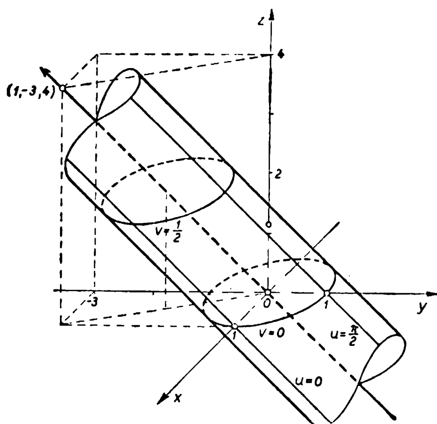
C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, (u^2 + 2\, uv) + \boldsymbol{j}\, (u^3 + 3\, u^2 v) + \boldsymbol{k}\, (u^4 + 4\, u^3 v).$

10. Állapítsuk meg az alábbi felületek paramétervonalait:

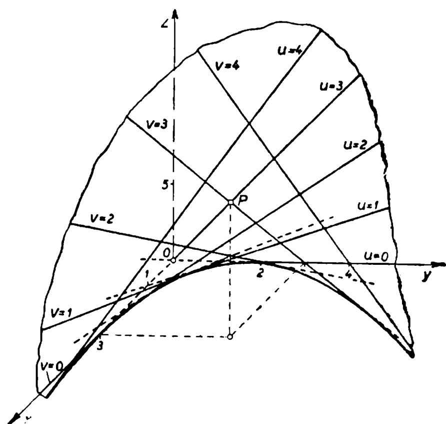
A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, a \cos u \cos v + \boldsymbol{j}\, a \cos u \sin v + \boldsymbol{k}\, a \sin u$ (gömb);

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, u \cos v + \boldsymbol{j}\, u \sin v + \boldsymbol{k}\, v$ (csavarfelület);

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(\cos u + v) + \boldsymbol{j}(\sin u - 3v) + 4\boldsymbol{k}\,v$ (körhenger, 36. ábra);
D) $\boldsymbol{r}(u, v) = (\boldsymbol{i}\,a\cos u + \boldsymbol{j}\,b\sin u)\,v + 3\boldsymbol{k}(1 - v)$ (elliptikus kúp);
E) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,u + \boldsymbol{i}\,v + \boldsymbol{k}\,uv$ (hiperbolikus paraboloid; 37. ábra).



36. ábra



37. ábra

Megoldás. A (4) értelmében az $\boldsymbol{r}(u, c)$, $\boldsymbol{r}(c, v)$ térgörbék az u, illetve v paramétervonalak.

A) $\boldsymbol{r}(u, c) = (\boldsymbol{i}\,a\cos c + \boldsymbol{j}\,a\sin c)\cos u + \boldsymbol{k}\,a\sin u$ (délkörök), $\boldsymbol{r}(c, v) = \cos c\,(\boldsymbol{i}\,a\cos v + \boldsymbol{j}\,a\sin v) + \boldsymbol{k}\,a\sin c$ (szélességi körök);

B) $\boldsymbol{r}(u, c) = \boldsymbol{i}\,u\cos c + \boldsymbol{j}\,u\sin c + \boldsymbol{k}\,c$ (az x, y síkkal párhuzamos, a z tengelyt metsző egyenesek), $\boldsymbol{r}(c, v) = \boldsymbol{i}\,c\cos v + \boldsymbol{j}\,c\sin v + \boldsymbol{k}\,v$ (csavarvonalak);

C) $\boldsymbol{r}(u, c) = \boldsymbol{i}\cos u + \boldsymbol{j}\sin u + c\,(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})$ (a vezérkörrel párhuzamos és egybevágó körök), $\boldsymbol{r}(c, v) = (\boldsymbol{i}\cos c + \boldsymbol{j}\sin c) + v\,(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})$ (alkotók);

D) $\boldsymbol{r}(u, c) = c\,(\boldsymbol{i}\,a\cos u + \boldsymbol{j}\,b\sin u) + 3\boldsymbol{k}(1 - c)$, (a vezérellipszissel párhuzamos és hozzá hasonló ellipszisek), $\boldsymbol{r}(c, v) = (\boldsymbol{i}\,a\cos c + \boldsymbol{j}\,b\sin c - 3\boldsymbol{k})\,v + 3\boldsymbol{k}$ (alkotók);

E) $\boldsymbol{r}(u, c) = \boldsymbol{j}\,c + (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\,c)\,u$ (az x, z síkkal párhuzamos, az y tengelyt metsző egyenesek), $\boldsymbol{r}(c, v) = \boldsymbol{i}\,c + (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\,c)\,v$ (az y, z síkkal párhuzamos, az x tengelyt metsző egyenesek).

11. Határozzuk meg az u, v paramétersíkon adott alábbi görbék képét a mellékelt felületen:

A) $u = -t,\ v = 2t,\quad \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,e^u\cos v + \boldsymbol{j}\,e^u\sin v + \boldsymbol{k}\,e^v;$

B) $u = e^{-t}\cos t,\ v = e^{-t}\sin t,\quad \boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{i}\dfrac{au}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{j}\dfrac{av}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{k}\,b\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{v}{u};$

C) $u = v = t,\quad \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\cos u\cos v + \boldsymbol{j}\cos u\sin v + \boldsymbol{k}\sin u;$

D) $u = t,\ v = \ln\mathrm{tg}\left|\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right|,\quad \boldsymbol{r}(u, v)$ az előbbi.

Megoldás. Képezendő az $\boldsymbol{r}[u(t), v(t)] = \boldsymbol{r}(t)$ felületi görbe.

A) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, e^{-t}\cos 2t + \boldsymbol{j}\, e^{-t}\sin 2t + \boldsymbol{k}\, e^{2t}$ a $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ forgásfelület és a

$z = e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$ exponenciális csavarfelület metszésvonala;

B) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, a\cos t + \boldsymbol{j}\, a \sin t + \boldsymbol{k}\, bt$, közönséges csavarvonal;

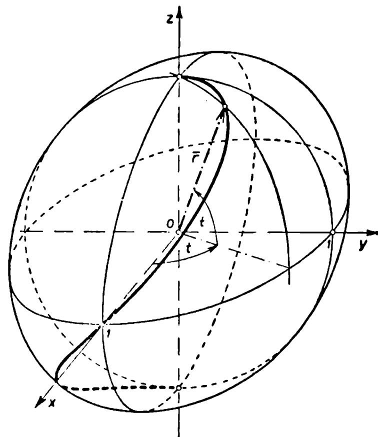
C) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\cos^2 t + \boldsymbol{j}\cos t \sin t + \boldsymbol{k}\sin t$,

VIVIANI-görbe (38. ábra);

D) $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\cos t \cos\left[\operatorname{lntg}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right] +$

$+ \boldsymbol{j}\cos t \sin\left[\operatorname{lntg}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right] + \boldsymbol{k}\sin t,$

gömbi loxodrom.



38. ábra

12. Határozzuk meg az alábbi felületi görbék megjelölt pontjához tartozó érintővektort:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,(u^2 - v^2) + 2\boldsymbol{j}\,u v +$
$+ \boldsymbol{k}\,(u^2 + v^2)$, $u = 1$, $v = \tau$; $u = \tau$, $v = 2$;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\dfrac{au}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{j}\dfrac{av}{\sqrt{u^2+v^2}} +$
$+ \boldsymbol{k}\, b \operatorname{arc\,tg}\dfrac{v}{u}$,

$u = e^{-t}\cos t$, $v = e^{-t}\sin t$, $t_0 = \tau$;

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, e^u \cos v + \boldsymbol{j}\, e^u \sin v + \boldsymbol{k}\, e^v$, $u = -t$, $v = 2t$, $t_0 = 0$;

D) $\boldsymbol{r}(u, v) = 4\,\boldsymbol{i}\cos u \cos v + 4\,\boldsymbol{j}\cos u \sin v + 4\boldsymbol{k}\sin u$, $u = 2t$, $v = 3t$, $t_0 = \pi/3$.

Megoldás. A keresett érintővektor — a (7) értelmében —

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)\,\dot{u}(t_0) + \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)\,\dot{v}(t_0)$$

módon nyerhető.

A) $\boldsymbol{r}_v(u, v) = -2\,\boldsymbol{i}\,v + 2\boldsymbol{j}\,u + 2\boldsymbol{k}\,v$, $\boldsymbol{r}_v(1, \tau) = -2\,\boldsymbol{i}\,\tau + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\,\tau$; $\boldsymbol{r}_u(u, v) = 2\boldsymbol{i}\,u + 2\boldsymbol{j}\,v + 2\boldsymbol{k}\,u$, $\boldsymbol{r}_u(\tau, 2) = 2\boldsymbol{i}\,\tau + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\,\tau$. Az $\boldsymbol{r}_u(1, 2) = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ és az $\boldsymbol{r}_v(1, 2) = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ érintővektorok hajlásszögének cosinusa:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r}_u(1, 2)\,\boldsymbol{r}_v(1, 2)}{|\boldsymbol{r}_u(1, 2)|\,|\boldsymbol{r}_v(1, 2)|} = \frac{-8+8+8}{\sqrt{24}\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\,.$$

B) Itt egyszerűbb az $\boldsymbol{r}[u(t), v(t)] = \boldsymbol{i}\, a\cos t + \boldsymbol{j}\, a\sin t + \boldsymbol{k}\, bt$ összetett függvény közvetlen t szerinti deriválása. Így $\dot{\boldsymbol{r}}(\tau) = -\,\boldsymbol{i}\, a\sin\tau + \boldsymbol{j}\, a\cos\tau + \boldsymbol{k}\, b$.

C) $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = -\,\boldsymbol{i}\, e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t) + \boldsymbol{j}\, e^{-t}(-\sin 2t + 2\cos 2t) + 2\boldsymbol{k}\, e^{2t}$, $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$; ezekkel az érintőegyenes: $\boldsymbol{R}(\tau) = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) +$
$+ \tau\,(-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$.

D) $\dot{\boldsymbol{r}}(\pi/3) = 4\sqrt{3}\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$.

13. Keresendők az alábbi felületek olyan pontjai, amelyekben nincs érintősík:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(u^2 - v^2) + \boldsymbol{j}(\cos u - 1) + \boldsymbol{k}(v - e^v)$;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(u^2 + v^2) + \boldsymbol{j}\, uv + \boldsymbol{k} \cos u \cos v$.

Megoldás. Azon $\boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ pontokat keressük, ahol

$$\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) = \boldsymbol{0}.$$

A) $\boldsymbol{r}_u(u, v) = 2\boldsymbol{i}\, u - \boldsymbol{j} \sin u$, $\boldsymbol{r}_v(u, v) = -2\boldsymbol{i}\, v + \boldsymbol{k}(1 - e^v)$. Látható, hogy $\boldsymbol{r}_u(0, 0) = \boldsymbol{r}_v(0,0) = \boldsymbol{0}$, tehát az $\boldsymbol{r}(0, 0) = -\boldsymbol{k}$ pontban nincs érintősík.

B) $\boldsymbol{r}_u(u, v) = 2\boldsymbol{i}\, u + \boldsymbol{j}\, v - \boldsymbol{k} \cos v \sin u$, $\boldsymbol{r}_v(u, v) = 2\boldsymbol{i}\, v + \boldsymbol{j}\, u - \boldsymbol{k} \cos u \sin v$. Látható, hogy minden $u = v$ paraméterű pontban, vagyis az $\boldsymbol{r}(u) = 2\boldsymbol{i}\, u^2 + \boldsymbol{j}\, u^2 + \boldsymbol{k} \cos^2 u$ felületi görbe pontjaiban $\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{r}_v$, tehát $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{0}$.

14. Megállapítandó az alábbi [$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ alakú egyenlettel adott] felületek megjelölt pontjához tartozó érintősík egyenlete:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(u^3 - 2v^2) + \boldsymbol{j}\, uv^2 + \boldsymbol{k}(u^2 v - u)$, $u = 1$, $v = -2$;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, u \cos v + \boldsymbol{j}\, u \sin v + \boldsymbol{k}\, bv$, $u = u_0$, $v = v_0$;

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, u^4 + 3\boldsymbol{j}\, u v^2 + \boldsymbol{k}\, v^3$, $u = 2$, $v = 1$.

Megoldás. Az érintősík egyenlete — mint a (9b)-ből ismeretes —

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

A) $\boldsymbol{r}(1, -2) = -7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{r}_u(u, v) = 3\boldsymbol{i}\, u^2 + \boldsymbol{j}\, v^2 + \boldsymbol{k}(2u\, v - 1)$, $\boldsymbol{r}_u(1, -2) = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{r}_v(u, v) = -4\boldsymbol{i}\, v + 2\boldsymbol{j}\, uv + \boldsymbol{k}\, u^2$, $\boldsymbol{r}_v(1, -2) = 8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$;

$$\begin{vmatrix} X + 7 & Y - 4 & Z + 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 8 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -[16(X + 7) + 43(Y - 4) + 44(Z + 3)] = 0.$$

B) $\boldsymbol{r}(u_0, v_0) = \boldsymbol{i}\, u_0 \cos v_0 + \boldsymbol{j}\, u_0 \sin v_0 + \boldsymbol{k}\, bv_0$, $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) = \boldsymbol{i} \cos v_0 + \boldsymbol{j} \sin v_0$, $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) = -\boldsymbol{i}\, u_0 \sin v_0 + \boldsymbol{j}\, u_0 \cos v_0\, \boldsymbol{k}\, b$;

$$\begin{vmatrix} X - u_0 \cos v_0 & Y - u_0 \sin v_0 & Z - bv_0 \\ \cos v_0 & \sin v_0 & 0 \\ -u \sin v_0 & u_0 \cos v_0 & b \end{vmatrix} =$$

$$= b \sin v_0 (X - u_0 \cos v_0) - b \cos v_0 (Y - u_0 \sin v_0) + u_0 (Z - b\, v_0) = 0.$$

C) $3X - 32Y + 128Z + 16 = 0$.

15. Megállapítandó az alábbi [$z = f(x, y)$ alakú egyenlettel adott] felületek megjelölt pontjához tartozó érintősík egyenlete:

A) $z = 6\,xy^2 - 2\,x^2y,\ x = 2,\ y = -3;$

B) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},\quad x = x_0,\quad y = y_0;$

C) $z = \frac{1}{xy},\ x = x_0,\ y = y_0;$ itt még vizsgáljuk meg az érintősík és a koordinátasíkok által bezárt tetraéder térfogatát is.

Megoldás. Az érintősík normálisa

$$\boldsymbol{r}_x(x_0, y_0) \times \boldsymbol{r}_y(x_0, y_0) = -\boldsymbol{i}\,p(x_0, y_0) - \boldsymbol{j}\,q(x_0, y_0) + \boldsymbol{k};$$

ahol $p = f'_x$, $q = f'_y$.

A) $p(x, y) = 6\,y^2 - 4\,xy$, $p(2, -3) = 78$; $q(x, y) = 12\,xy - 2\,x^2$, $q(2, -3) = -80$; $z(2, -3) = 132$;

$$-78\,(X - 2) + 80\,(Y + 3) + (Z - 132) = 0.$$

B) $p(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2}$, $q(x_0, y_0) = -\frac{2y_0}{b^2}$; $z_0 = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$;

$$-\frac{2x_0}{a^2}(X - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(Y - y_0) + \left(Z - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = $$

$$= -\frac{2x_0}{a^2}X + \frac{2y_0}{b^2}Y + Z + z_0 = 0.$$

C) $z_0 = \frac{1}{x_0y_0}$; $p(x_0, y_0) = -\frac{1}{x_0^2y_0}$, $q(x_0, y_0) = -\frac{1}{x_0y_0^2}$;

$$\frac{1}{x_0^2y_0}(X - x_0) + \frac{1}{x_0y_0^2}(Y - y_0) + \left(Z - \frac{1}{x_0y_0}\right) = \frac{X}{x_0^2y_0} + \frac{Y}{x_0y_0^2} + Z - \frac{3}{x_0y_0} = 0.$$

Az érintősík tengelymetszetes egyenlete:

$$\frac{X}{3x_0} + \frac{Y}{3y_0} + \frac{Z}{3z_0} - 1 = 0,$$

tehát a tengelymetszetek rendre $3x_0$, $3y_0$, $3/x_0y_0$. Az említett tetraéder élvektorai ily módon

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}\,x_0,\ \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{j}\,y_0,\ \boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{k}/x_0y_0;$$

térfogata pedig

$$V = \frac{1}{6}\boldsymbol{abc} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 3y_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{x_0y_0} \end{vmatrix} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2},$$

vagyis független az $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, 1/x_0y_0)$ érintési pont választásától.

b) Felületi görbék differenciálgeometriája

α) Felületi görbe ívhossza, természetes és alaptriédere

I°. Felületi görbe ívhossza. Állapítsuk meg az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[u(t), v(t)], \quad \alpha \leqq t \leqq \beta \tag{1}$$

felületi görbeszakasz ívhosszát. Feltételezzük, hogy e görbeszakasz *sima,* vagyis az érintővektor

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_v \dot{u} + \boldsymbol{r}_v \dot{v} \tag{2}$$

formulájában $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{r}_v$, $\dot{u}$, $\dot{v}$ létezik, folytonos és $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \neq 0$.

Az 1. §. b) α) I°—II°-ből ismeretes, hogy

$$s = \int_\alpha^t \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}^2}\, d\tau, \qquad \dot{s} = \sqrt{\dot{\boldsymbol{r}}^2}.$$

Esetünkben

$$\dot{s}^2 = \dot{\boldsymbol{r}}^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \dot{u}^2 + 2\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \dot{u} \dot{v} + \boldsymbol{r}_v^2 \dot{v}^2,$$

vagy az

$$E = \boldsymbol{r}_\mu^2\ F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v,\ G = \boldsymbol{r}_v^2 \tag{3}$$

alakú GAUSS-*féle elsőrendű főmennyiségek* bevezetésével

$$\dot{s}^2 = \dot{\boldsymbol{r}}^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2. \tag{4}$$

Az említett sima felületi görbeszakasz *ívhossza* tehát

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt. \tag{5}$$

Megjegyzendő, hogy a (4) másodfokú alak nyilván definit pozitív, tehát zérushelyei képzetesek és negatív diszkriminánsa szükségképpen

$$W^2 = EG - F^2 > 0. \tag{6}$$

II°. Felületi görbe természetes és alaptriédere. 1'. Ha speciálisan az (1) felületi görbeszakasz egy rögzített pontjától mért ívhosszát választjuk paraméternek, azaz $t \equiv s$, akkor — a (4) és a (2) szerint —

$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} = 1, \text{ s így } \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_u u' + \boldsymbol{r}_v v' = \boldsymbol{t}, \tag{7}$$

vagyis $\boldsymbol{r}'$ a felületi görbe *érintő egységvektora.*

Újabb s szerinti deriválással nyerhető, hogy

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}_{uu} u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv} u' v' + \boldsymbol{r}_{vv} c'^2 + \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v'' = G\boldsymbol{n}, \tag{8}$$

ahol $\boldsymbol{n}$ a felületi görbe *főnormális egységvektora,* G pedig görbülete.

Végül

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n} \tag{9}$$

módon nyerjük a felületi görbe *binormális egységvektorát.*

A $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ egységvektor-hármas képezi a felületi görbe természetes triéder-ét. Megjegyzendő, hogy fentebbi megállapításaink teljes összhangban vannak az 1. §. b) α) II°-vel.

2'. A felületi görbe pontjaihoz egy másik triéder is tartozik; ennek egyik vektora

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{t} \tag{10}$$

érintő egységvektor, másika a

$$\bar{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_u}{\sqrt{(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)^2}} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{|\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 (1 - \cos^2 \delta)}} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{\boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2}} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{11}$$

felületi normális egységvektor, harmadika pedig a

$$\bar{\beta} = \boldsymbol{t} \times \bar{\boldsymbol{\nu}} \tag{12}$$

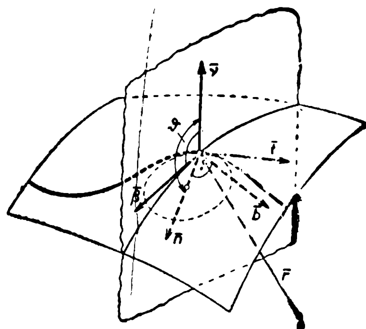
geodétikus egységnormális.

A $\boldsymbol{t}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ egységvektor-hármas képezi a felületi görbe alaptriéder-ét (39. ábra).

3'. A két triéderben $\boldsymbol{t}$ közös, a többi vektor pedig ($\boldsymbol{t}$-re merőleges lévén) komplanáris. *A két triéder kapcsolata* tehát — a $\bar{\nu}$ és $\boldsymbol{n}$ hajlásszögét ϑ-val jelölve — így írható:

$$\bar{\nu} = \boldsymbol{n} \cos \vartheta - \boldsymbol{b} \sin \vartheta, \quad \bar{\beta} = \boldsymbol{n} \sin \vartheta + \boldsymbol{b} \cos \vartheta; \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{n} = \bar{\nu} \cos \vartheta + \bar{\beta} \sin \vartheta, \quad \boldsymbol{b} = -\bar{\nu} \sin \vartheta + \bar{\beta} \cos \vartheta. \tag{13b}$$



39. ábra

Példák és feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi felületek megjelölt pontjához tartozó GAUSS-féle elsőrendű főmennyiségeket:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,(u^2 - 3v^2) + \boldsymbol{j}\,(uv - v^3) + \boldsymbol{k}\,(u^4 - 2v), \quad u = -1, \ v = 1;$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, e^u + \boldsymbol{j}\, e^v + \boldsymbol{k}\,(u - v), \quad u = v = 0;$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = 3\boldsymbol{i} \operatorname{ch} u \cos v + 3\boldsymbol{j} \operatorname{sh} u \sin v + \boldsymbol{k} \operatorname{th} uv, \quad u = 0, \ v = \pi/2.$

Megoldás. Az $E = \boldsymbol{r}_u^2$, $F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v$, $G = \boldsymbol{r}_v^2$ skalár szorzatokat, valamint a $W^2 = EG - F^2$ kifejezést képezzük a megjelölt helyen.

A) $\boldsymbol{r}_u(u, v) = 2\boldsymbol{i}\, u + \boldsymbol{j}\, v + 4\boldsymbol{k}\, u^3, \quad \boldsymbol{r}_u(-1, 1) = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k};$

$\boldsymbol{r}_v(u, v) = -6\boldsymbol{i}\, v + \boldsymbol{j}\,(u - 3v^2) - 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_v(-1, 1) = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k};$

$E(-1, 1) = 4 + 1 + 16 = 21, \quad F(-1, 1) = 12 - 4 + 8 = 16,$

$G(-1, 1) = 36 + 16 + 4 = 56, \quad W^2(-1, 1) = 21 \cdot 56 - 16^2 = 920 > 0.$

B) $\boldsymbol{r}_u(u, v) = \boldsymbol{i}\, e^u + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_u(0, 0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{r}_v(u, v) = \boldsymbol{j}\, e^v - \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_v(0, 0) = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k};$

$E(0, 0) = 1 + 1 = 2, \quad F(0, 0) = -1, \quad G(0, 0) = 1 + 1 = 2,$

$W^2(0, 0) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0.$

C) $E(0, \pi/2) = 9 + \frac{\pi^2}{4}, \quad F(0, \pi/2) = 0, \quad G(0, \pi/2) = 9, \quad W^2(0, \pi/2) = 9\left(9 + \frac{\pi^2}{4}\right).$

2. Számítsuk ki az alábbi felületi görbedarabok ívhosszát:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,\dfrac{au}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{j}\,\dfrac{av}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{k}\,b\,\operatorname{arc\,tg}\dfrac{v}{u}$, $u = e^{-t}\cos t$, $v = e^{-t}\sin t$, $0 \leqq t \leqq \tau$.

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,a\cos u\cos v + \boldsymbol{j}\,a\cos u\sin v + \boldsymbol{k}\,a\sin u$, $u = t$, $v = \ln\operatorname{tg}\left|\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right|$, $0 \leqq t \leqq \tau$.

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,v\cos u + \boldsymbol{j}\,v\sin u + \boldsymbol{k}\,v$, $u = t$, $v = e^t$, $-\infty < t \leqq \tau$.

Megoldás. Az (5) alatt említett

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2}\,dt$$

formulát alkalmazzuk.

A) Az a) α) 6. példában már kiszámítottuk, hogy

$$\boldsymbol{r}_u\,[u(t), v(t)] = e^t\sin t\,(\boldsymbol{i}\,a\sin t - \boldsymbol{j}\,a\cos t - \boldsymbol{k}\,b),$$
$$\boldsymbol{r}_v\,[u(t), v(t)] = e^t\cos t\,(-\boldsymbol{i}\,a\sin t + \boldsymbol{j}\,a\cos t + \boldsymbol{k}\,b),$$
$$\dot{u}(t) = e^t(-\cos t - \sin t),\quad \dot{v}(t) = e^{-t}(-\sin t + \cos t).$$

Ezek felhasználásával

$$E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2 = e^{2t}\sin^2 t\,(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2)\cdot e^{-2t}(\cos^2 t + 2\cos t\sin t + \sin^2 t) + 2e^t\sin t\cos t\,(-a^2\sin^2 t - a^2\cos^2 t - b^2)\cdot e^{-2t}(\sin^2 t - \cos^2 t) + e^{2t}\cos^2 t\,(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2)\cdot e^{-2t}(\sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos^2 t) =$$
$$= \sin^2 t\,(a^2+b^2)(1 + \sin 2t) + \sin 2t\,(a^2+b^2)\cos 2t + \cos^2 t\,(a^2+b^2)(1 - \sin 2t) =$$
$$= (a^2+b^2)\,[(\sin^2 t + \cos^2 t) + \sin 2t\,(\sin^2 t - \cos^2 t + \cos 2t)] = a^2 + b^2.$$

Az ívhossz tehát

$$s = \int_0^\tau \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \tau\sqrt{a^2+b^2}.$$

B) $\boldsymbol{r}_u(u, v) = -\boldsymbol{i}\,a\sin u\cos v - \boldsymbol{j}\,a\sin u\sin v + \boldsymbol{k}\,a\cos u,$

$$\boldsymbol{r}_v(u, v) = -\boldsymbol{i}\,a\cos u\sin v + \boldsymbol{j}\,a\cos u\cos v;$$
$$E = \boldsymbol{r}_u^2 = a^2\,[\sin^2 u\,(\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u] = a^2,\quad F = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v =$$
$$= a^2(\sin u\cos v\cos u\sin v - \sin u\sin v\cos u\cos v + 0) = 0,$$
$$G = \boldsymbol{r}_v^2 = a^2\cos^2 u\,(\sin^2 v + \cos^2 v) = a^2\cos^2 u,\ \text{ahol } u = t;$$
$$\dot{u}(t) = 1,\quad \dot{v}(t) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left|\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right|}\;\frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)}\;\frac{1}{2} = \frac{1}{\sin\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos t};$$
$$E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2 = a^2 + a^2\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t} = 2a^2;$$
$$s = \int_0^\tau \sqrt{2a^2}\,dt = a\tau\sqrt{2}.$$

C) $s = \sqrt{3}\,e^\tau$.

3. Állapítsuk meg az

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\frac{au}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{j}\frac{av}{\sqrt{u^2+v^2}}\ \boldsymbol{k}\, b \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}, \quad u = e^{-t}\cos t, \qquad v = e^{-t}\sin t$$

felületi görbe természetes és alaptriéderét, tetszőleges pontjában.

Megoldás. A természetes (kísérő) triéder egységvektorai: $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$, az alaptriédere pedig: $\boldsymbol{t}, \overline{v}, \boldsymbol{t}\times\overline{v}$, ahol $\overline{v} = \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \sqrt{EG - F^2}$ a felületi normális egységvektor.

Az adott felületi görbe közönséges csavarvonal, lévén $\boldsymbol{r}[u(t), v(t)] = \boldsymbol{i}\, a \cos t + \boldsymbol{j}\, a \sin t + \boldsymbol{k}\, bt$. Ennek természetes (kísérő) triéderét már ismerjük az 1. §. b) α) 2. példából, nevezetesen ($1/\gamma = \sqrt{a^2+b^2}$ jelöléssel és $s\gamma = t$ figyelembevételével)

$$\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{i}\, a\gamma \sin t + \boldsymbol{j}\, a\gamma\cos t - \boldsymbol{k}\, b\gamma, \quad \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}\cos t - \boldsymbol{j}\sin t,$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\, b\gamma\sin t - \boldsymbol{j}\, b\gamma\cos t + \boldsymbol{k}\, a\gamma.$$

Térjünk rá az alaptriéder meghatározására. A fentebbi 2. A) példa értelmében a felületi görbe pontjaiban

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = e^{2t}\sin t\cos t \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a\sin t & -a\cos t & -b \\ -a\sin t & a\cos t & b \end{vmatrix} = 0,$$

azaz felületi normális nem létezik, s így alaptriéderről sem beszélhetünk.

β) Felületi görbék és síkmetszetek görbülete

I°. Felületi görbék görbülete. 1'. Meghatározandó az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,[u(t), v(t)] \tag{1}$$

felületi görbe görbülete P pontjában, ahol — az α) II° szerint — a felületi normális egységvektor

$$\overline{v} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{W} \quad (W = \sqrt{EG - F^2}) \tag{2}$$

a görbe főnormális vektora

$$\frac{\boldsymbol{n}}{R} = \boldsymbol{r}'' = (\boldsymbol{r}')' = \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}}\right)^{\cdot} : \dot{s} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}^2} - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{r}_{uu}\dot{u}^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \boldsymbol{r}_{vv}\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} + \varphi_1\boldsymbol{r}_u + \varphi_2\boldsymbol{r}_v \tag{3}$$

(a φ_1 és φ_2 skaláris kifejezés részletezése szükségtelen), végül e két vektor hajlásszögére nézve

$$\cos\vartheta = \overline{v}\,\boldsymbol{n}. \tag{4}$$

2'. Felületi görbénk P-beli görbületének $\cos\vartheta$-szorosa tehát

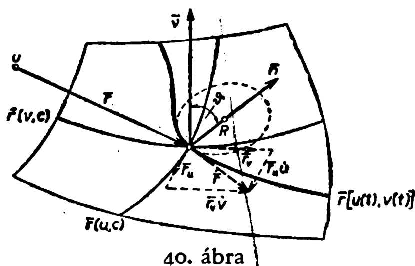
$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \overline{v}\boldsymbol{r}'' = \frac{\overline{v}\boldsymbol{r}_{uu}\dot{u}^2 + 2\overline{v}\boldsymbol{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \overline{v}\boldsymbol{r}_{vv}\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2},$$

lévén $\overline{v}\boldsymbol{r}_u = \overline{v}\boldsymbol{r}_v = 0$.

Vezessük be most az

$$L = \bar{v}\, \mathbf{r}_{uu} = \frac{\mathbf{r}_u\, \mathbf{r}_v\, \mathbf{r}_{uu}}{W}, \quad M = \bar{v}\, \mathbf{r}_{uv} = \frac{\mathbf{r}_u\, \mathbf{r}_v\, \mathbf{r}_{uv}}{W}, \quad N = \bar{v}\, \mathbf{r}_{vv} = \frac{\mathbf{r}_u\, \mathbf{r}_v\, \mathbf{r}_{vv}}{W} \tag{5}$$

alakú GAUSS*-féle másodrendű főmennyiségeket*. Ezek felhasználásával *az (1) felületi görbe P pontbeli görbület-ének* cos *ϑ-szorosa* a következő végképlettel számítható ki (40. ábra):



40. ábra

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \frac{L\,\dot{u}^2 + 2\,M\,\dot{u}\dot{v} + N\,\dot{v}^2}{E\,\dot{u}^2 + 2\,F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2} \tag{6}$$

II°. Közös simuló síkú felületi görbék. 1'. Vizsgáljuk meg — a most nyert formula alapján — a P pontban közös érintőjű és főnormálisú, vagy ami ugyanaz, a P pontban közös simuló síkú felületi görbék görbületét.

A rögzített P pontban az $\mathbf{r}(u, v)$ függvény $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_{uu}$, $\mathbf{r}_{uv}$, $\mathbf{r}_{vv}$ parciális deriváltjai, valamint a belőlük képezett E, F, G és L, M, N főmennyiségek állandók, függetlenül a P-n átmenő felületi görbéktől.

A P pontban közös érintőjű felületi görbékre nézve — az

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v} = \dot{v}\left(\mathbf{r}_u \frac{\dot{u}}{\dot{v}} + \mathbf{r}_v\right)$$

értelmében — állandó az (érintő irányát meghatározó) $\dot{u}/\dot{v}$ hányados P-beli értéke.

A P pontban közös főnormálisú felületi görbékre nézve állandó e főnormális és a P-beli felületi normális ϑ hajlásszöge.

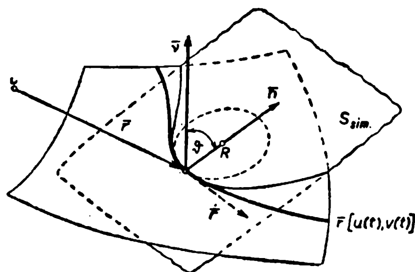
2'. A fentebbiek szerint

$$\left.\begin{matrix} E, F, G \\ L, M, N \end{matrix}\right\} = \text{const},$$

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \text{const}, \qquad \vartheta = \text{const}, \tag{7}$$

s így — a (6) formula értelmében —

$$\frac{1}{R} = \text{const}, \tag{8}$$



41. ábra

kimondható tehát az alábbi ***tétel:***

A P pontban közös simulósíkú felületi görbék ottani görbülete megegyezik egymással, köztük e simulósík és a felület síkmetszetének P-beli görbületével is (41. ábra).

E tétel lehetővé teszi, hogy a továbbiakban — a felületi térgörbék mellőzésével — csupán a felületi *síkmetszetek* görbületi vizsgálatára szorítkozzunk.

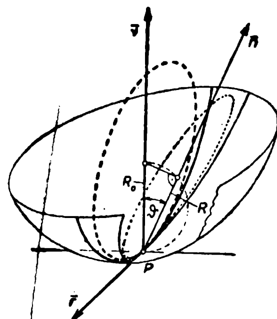
III°. Ferde metszetek görbületi viszonyai. 1'. Vizsgáljuk meg — a (6) formula alapján — a P pontban közös érintőjű felületi síkmetszetek görbületét.

A II°-ben részletezett megfontolással most is

$$\left.\begin{matrix} E, F, G \\ L, M, N \end{matrix}\right\} = \text{const}, \quad \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \text{const}, \tag{9}$$

de már $\vartheta \neq$ cons t, mert a metszet $\boldsymbol{n}$ főnormálisa — a közös érintő körül forogva — a P-beli $\bar{\nu}$ felületi normálissal változó ϑ szöget zár be. Így — a (6) formula értelmében — írható, hogy

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \text{const} = {}_{(-)}^{+} \frac{1}{|R_0|} = \frac{1}{R_0}; \tag{10a}$$



42. ábra

eszerint ($R > 0$ lévén) $\cos\vartheta = \bar{\nu}\,\boldsymbol{n}$ előjeltartó (minden $\boldsymbol{n}$-re), az $\boldsymbol{n} = {}_{(-)}^{+}\,\bar{\nu}$ esetén nyert *normálmetszet* R_0 *görbületi sugara* pedig *előjeles* és sign $\bar{\nu}\,\boldsymbol{n} =$ sign R_0. Végül a (10a)-ból

$$\boxed{R = R_0 \cos\vartheta.} \tag{10b}$$

Igaz tehát az alábbi, MEUSNIER-féle ***tétel:***

A P pontban közös érintőjű síkmetszetek ottani görbületi középpontjai az érintősík egyik oldalán, $|R_0|$ átmérőjű körön helyezkednek el, vagyis *a ferde metszetek görbületi sugarai a normálmetszet görbületi sugarának vetületei* (42. ábra).

E tétel lehetővé teszi, hogy a továbbiakban — a felületi ferde metszetek mellőzésével — csupán a felületi *normálmetszetek* görbületi vizsgálatára szorítkozzunk.

IV°. Normálmetszetek görbületi viszonyai. 1'. Vizsgáljuk meg a P ponton átmenő normálmetszet ottani görbületének változását, midőn a metszősík a P-beli felületi normális körül forog.

A (6) és a (10a) értelmében *a normálmetszet előjeles görbülete*

$$\frac{1}{R} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}. \tag{11}$$

Felhasználva az érintő egységvektor

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{\dot{u}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\boldsymbol{r}_u + \frac{\dot{v}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\boldsymbol{r}_v = \xi\,\boldsymbol{r}_u + \eta\,\boldsymbol{r}_v, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

előállítását, a (11) formula

$$\frac{1}{R} = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 \tag{12}$$

alakba írható át; eszerint *a normálmetszet görbülete az érintő egységvektor* ($\boldsymbol{r}_u$ és $\boldsymbol{r}_v$ vektorpárra vonatkozó) *ξ, η ferdeszögű koordinátáinak kvadratikus függvénye.**

* E függvény jellege nem változik, ha a $\xi = a_1\xi' + b_1\eta'$, $\eta = a_2\xi' + b_2\eta'$ lineáris transzformációval az érintősíkbeli $\bar{t}_1 \perp \bar{t}_2$ vektorpárra vonatkozó ξ', η' derékszögű koordinátákat vezetjük be.

2'. Mérjük fel most a P pontból kiindulva minden érintőre a hozzátartozó normálmetszet görbületi sugara abszolút értékének négyzetgyökét. Az így nyert $\sqrt{|R|}\,\boldsymbol{t}$ vektorok végpontjai — a (12) értelmében — az

$$\boxed{L\sigma^2+2\,M\sigma\tau+N\,\tau^2=\pm 1} \tag{13a}$$

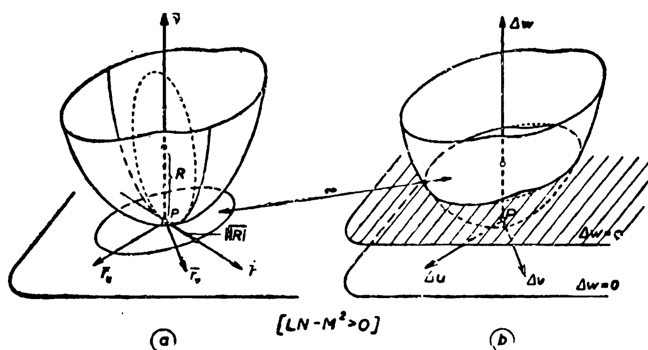
egyenletű centrális kúpszeleten, az ún. DUPIN-*féle* *indikátrix*-on helyezkednek el; $\sigma=\xi\sqrt{|R|}$, $\tau=\eta\sqrt{|R|}$; (43a. ábra).

Közelítsük az adott $\boldsymbol{r}(u,v)$ felületet $P(u_0,v_0)$ pontja környezetében az — a) α) III°-ban már említett —

$$\boldsymbol{r}(u,v)\approx\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_u\Delta u+\boldsymbol{r}_v\Delta v+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_{uu}\Delta u^2+\boldsymbol{r}_{uv}\Delta u\Delta v+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_{vv}\Delta v^2 \tag{14}$$

másodrendű TAYLOR-polinom megszabta másodrendű felülettel. Az $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ és $\bar{\nu}$ vektorhármas koordináta-rendszerében az adott felület közelítő egyenlete — a (14)-nek $\bar{\nu}$-vel való skaláris szorzása útján —

$$\Delta w\approx\frac{1}{2}(L\,\Delta u^2+2\,M\,\Delta u\,\Delta v+N\,\Delta\,v^2) \tag{15}$$



43. ábra

alakot ölti; ahol $\Delta w=[\boldsymbol{r}(u,v)-\boldsymbol{r}]\,\bar{\nu}$. Eszerint *a felületnek P pontjabeli érintősíkjával párhuzamos* ($\Delta w=$ const) *síkmetszetei a P környezetében közelítőleg hasonlók a felület P pontbeli indikátrixához* (43b. ábra). E körülmény még inkább kidomborítja az indikátrix jelentőségét.

3'. Tekintsük most a

$$D=LN-M^2 \tag{16}$$

kifejezést, mely a (12) kvadratikus kifejezés negatív *diszkriminánsa,* s egyben a (13) kúpszelet determinánsa.

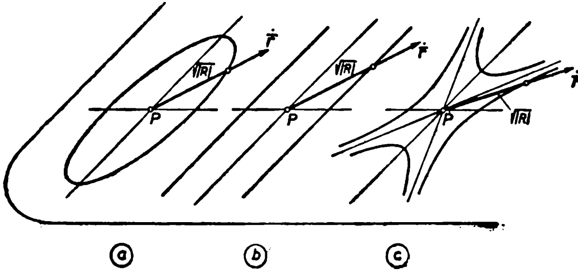
$D > 0$ *esetén* $1/R$ definit, az indikátrix ellipszis; a P pont ún. *elliptikus* (44a. ábra).

$D = 0$ *esetén* $1/R$ semidefinit, az indikátrix párhuzamos egyenespár (elfajuló parabola); a P pont ún. *parabolikus* (44b. ábra).

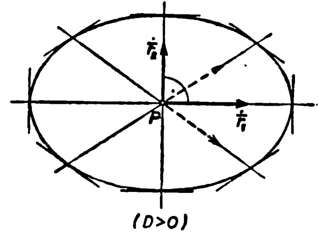
$D < 0$ *esetén* $1/R$ indefinit, az indikátrix konjugált hiperbolapár; a P pont ún. *hiperbolikus* (44c. ábra).

Megjegyzendő, hogy $D \geqq 0$ esetén a (13) jobb oldalán csak az egyik előjelnél adódik valós kúpszelet (indikátrix), $D < 0$ esetén viszont mind a kettőnél.

4'. Hozzuk most a (12) kvadratikus kifejezést kanonikus alakra oly módon, hogy az $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ ferde vektorpár helyett a (13) indikátrix egyetlen merőleges, konjugált $\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2$ vektorpárjára vonatkoztatjuk.



44. ábra



45. ábra

Az $\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{r}_u \sigma_1 + \boldsymbol{r}_v \tau_1$ és az $\dot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{r}_u \sigma_2 + \boldsymbol{r}_v \tau_2$ vektorpár *konjugált* a (13) indikátrixra vonatkozólag, ha

$$L\sigma_1\sigma_2 + M(\sigma_1\tau_2 + \sigma_2\tau_1) + N\tau_1\tau_2 = 0, \tag{17}$$

továbbá *merőleges*, ha

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 \dot{\boldsymbol{r}}_2 = E\sigma_1\sigma_2 + F(\sigma_1\tau_2 + \sigma_2\tau_1) + N\tau_1\tau_2 = 0. \tag{18}$$

(45. ábra.) A (14), (15) egyenletrendszer $FL - EM \neq 0$ esetén egyértelműen megoldható a

$$h_1 = \frac{\sigma_1}{\tau_1} = \frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\dot{u}_1}{\dot{v}_1}, \qquad h_2 = \frac{\sigma_2}{\tau_2} = \frac{\xi_2}{\eta_2} = \frac{\dot{u}_2}{\dot{v}_2} \tag{19}$$

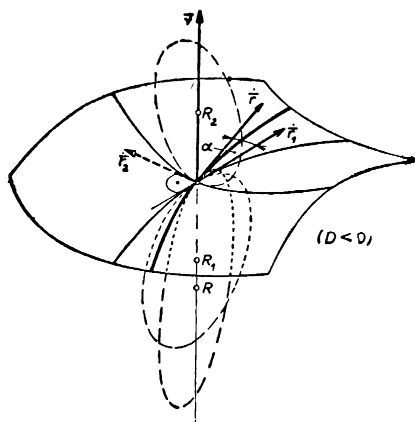
hányadosokra; szorzatuk és összegük — a CRAMER-szabály alkalmazásával —

$$h_1 h_2 = \frac{GM - FN}{FL - EM}, \quad h_1 + h_2 = \frac{EN - GL}{FL - EM}. \tag{20}$$

A (20) alapján nyert $h_1 = \dot{u}_1/\dot{v}_1$ és $h_2 = \dot{u}_2/\dot{v}_2$ segítségével

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{r}_u \dot{u}_1 + \boldsymbol{r}_v \dot{v}_1, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{r}_u \dot{u}_2 + \boldsymbol{r}_v \dot{v}_2 \tag{21}$$

módon kapjuk a (konjugált és merőleges) *főérintőket*. A rájuk illeszkedő (merőleges) normálsíkokban jelentkeznek a *főmetszetek*.



46. ábra

5'. A kúpszeletek elmélete* értelmében a most nyert főérintők rendszerében a (12) kvadratikus kifejezés az

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha} \qquad (22a)$$

kanonikus alakot ölti, ahol — megállapodásszerűen —

$$\frac{1}{R_1} \leqq \frac{1}{R} \leqq \frac{1}{R_2}; \qquad (22b)$$

$1/R_1$ és $1/R_2$ ún. *főgörbületek*, továbbá

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}}_1}{|\dot{\mathbf{r}}|\,|\dot{\mathbf{r}}_1|} =$$

$$= \frac{E\,\dot{u}\,\dot{u}_1 + F(\dot{u}\,\dot{v}_1 + \dot{v}\,\dot{u}_1) + G\,\dot{v}\,\dot{v}_1}{\sqrt{E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\,\dot{v} + G\,\dot{v}^2}\sqrt{E\,\dot{u}_1^2 + 2F\,\dot{u}_1\,\dot{v}_1 + G\,\dot{v}_1^2}}. \qquad (22c)$$

Ezek alapján kimondható a következő, *Euler*-féle ***tétel:***

A P ponton átmenő normálmetszet ottani görbületét teljesen meghatározza a két merőleges főmetszet P-beli görbülete, vagyis a két extrémális főgörbület, valamint a normálmetszet és az első főmetszet síkjának (érintőjének) hajlásszöge (46. ábra).

E tétel lehetővé teszi, hogy a továbbiakban — a normálmetszetek mellőzésével — csupán a főmetszetek vizsgálatára szorítkozzunk.

6'. Megjegyzendő, hogy a (16)-beli negatív diszkrimináns a kanonikus transzformáció után

$$D = \frac{W^2}{R_1 R_2} \quad (W^2 = EG - F^2 > 0) \qquad (23)$$

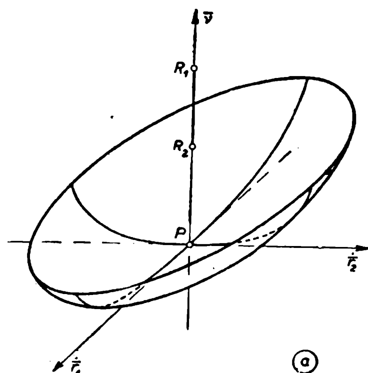
alakot ölt. Ennek megfelelően a P pont

sign R_1 = sign R_2 esetén *elliptikus* (47a. ábra),
$R_1 = 0$ vagy $R_2 = 0$ esetén *parabolikus* (47b. ábra),
sign $R_1 \neq$ sign R_2 esetén *hiperbolikus* (47c. ábra).

Megemlítendő továbbá, hogy a Dupin-*féle indikátrix* (13) alakja a kanonikus transzformáció után

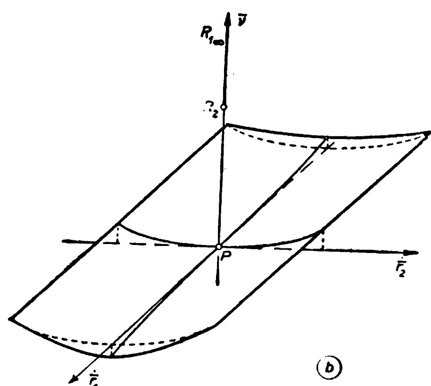
$$\frac{X^2}{R_1} + \frac{Y^2}{R_2} = \pm 1 \qquad (13b)$$

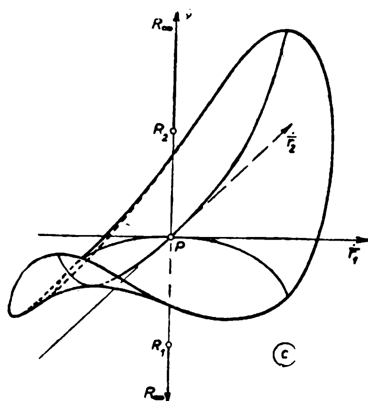
módon írható.



47a. ábra

* L. pl. *Stachó* [M. 11.].





47b., c. ábra

V°. A főmetszetek görbülete (fő görbületek). 1'. Keressük a P ponton átmenő normálmetszetek ottani

$$\frac{1}{R} = \frac{L h^2 + 2M h + N}{E h^2 + 2F h + G} = f(h) \qquad \left(h = \frac{\dot u}{\dot v},\ \dot v \neq 0\right)^* \tag{24}$$

görbületének szélsőértékeit, az érintőket megszabó $h = \dot u / \dot v$ szerint.

Szélsőérték csak olyan h-nál lehet, amelynél

$$f'(h) = 2\frac{(L h + M)(E h^2 + 2F h + G) - (E h + F)(L h^2 + 2M h + N)}{(E h^2 + 2F h + G)^2} = 0,$$

vagyis amelynél (25)

$$\frac{L h + M}{E h + F} = \frac{L h^2 + 2M h + N}{E h^2 + 2F h + G} = \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{(L h + M) h + (M h + N)}{(E h + F) h + (F h + G)} = \frac{M h + N}{F h + G}$$

Az első és az utolsó alak egyenlőségéből következik, hogy

$$-(L h + M)(F h + G) + (M h + N)(E h + F) =$$

$$= (-FL + EM) h^2 + (EN - GL) h + (-GM + FN) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = T(h) = 0. \tag{26}$$

E másodfokú egyenlet h_1, h_2 gyökei határozzák meg a P-ben extrémális görbületű normálmetszetek érintőit. Ezek — mint a (26) és a (20) összevetéséből kitűnik — a konjugálás és a merőlegesség alapján számított *főérintők*kel azonosak.

* Esetleg szükséges figyelembe venni, hogy $\dot v = 0$-nál $\frac{1}{R} = \frac{L}{E}$.

2'. A (25) első és második, valamint második és ötödik alakjának egyenlőségéből következik, hogy

$$-h = \frac{M - \frac{F}{R}}{L - \frac{E}{R}} = \frac{N - \frac{G}{R}}{M - \frac{F}{R}}$$

és ebből továbbá, hogy

$$(EG - F^2)\frac{1}{R^2} - (EN - 2FM + GL)\frac{1}{R} + (LN - M^2) = 0, \tag{27a}$$

vagy $(EG - F^2)$-tel osztva és új jelöléseket bevezetve

$$\frac{1}{R^2} - 2H\frac{1}{R} + K = 0. \tag{27b}$$

E másodfokú egyenlet $1/R_1$ és $1/R_2$ gyökei határozzák meg a P-n áthaladó normálmetszetek görbületének extrémumait, az EULER-tételben már említett *főgörbületeket*. Ezeket — bonyolultságuk miatt — nem szokás külön-külön formulázni, csak fél összegüket, az ún. *k ö z é p g ö r b ü l e t*-et:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \tag{28}$$

valamint szorzatukat, az ún. GAUSS-*f é l e g ö r b ü l e t*-et:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{29}$$

3'. Állítsuk elő e formulákat a felület $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y) = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\,y + \boldsymbol{k}\,f(x, y)$ *megadási módja* esetén. A szokásos

$$p = f'_x, \quad q = f'_y, \quad r = f''_{xx}, \quad s = f''_{xy}, \quad t = f''_{yy} \tag{30}$$

jelölések alkalmazásával a derivált vektorok

$$\begin{gathered} \boldsymbol{r}_x(1, 0, p), \quad \boldsymbol{r}_y(0, 1, q), \\ \boldsymbol{r}_{xx}(0, 0, r), \quad \boldsymbol{r}_{xy}(0, 0, s), \quad \boldsymbol{r}_{yy}(0, 0, t), \end{gathered} \tag{31}$$

a felületi normális egységvektor

$$\bar{\nu}\left(\frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right), \tag{32}$$

az első- és másodrendű főmennyiségek

$$\begin{gathered} E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad \left(W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\right); \\ L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \end{gathered} \tag{33}$$

módon fejezhető ki. Ezek alapján a *középgörbület* formulája

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}, \tag{34}$$

a GAUSS-*féle görbületé* pedig

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \tag{35}$$

alakot ölt.

A felületi pont *jellege* most a

$$W^2 D = rt - s^2 \qquad (W^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0) \tag{36}$$

mennyiség előjele, illetve zérus-volta alapján dönthető el.

Példák és feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi felületek megjelölt pontjához tartozó GAUSS-féle első- és másodrendű főmennyiségeket:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,(u^2 - 3v^2) + \boldsymbol{j}\,(uv - v^3) + \boldsymbol{k}\,(u^4 - 2v)$; $u = -1,\ v = 1$;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = 3\,\boldsymbol{i}\,\mathrm{ch}\,u\cos v + 3\,\boldsymbol{j}\,\mathrm{sh}\,u\sin v + \boldsymbol{k}\,\mathrm{th}\,uv$: $u = 0,\ v = \pi/2$;

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,e^u + \boldsymbol{j}\,e^v + \boldsymbol{k}\,(u - v)$, $u = v = 0$.

Megoldás. A GAUSS-féle elsőrendű főmennyiségek:

$$E = \boldsymbol{r}_u^2, \quad G = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v, \quad F = \boldsymbol{r}_v^2, \quad (W = \sqrt{EG - F^2}),$$

a másodrendűek pedig

$$L = \frac{\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{uu}}{W}, \qquad M = \frac{\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{uv}}{W}, \qquad N = \frac{\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_{vv}}{W}.$$

Ezek a megadott helyen képezendők.

A) $\boldsymbol{r}_u(u, v) = 2\,\boldsymbol{i}\,u + \boldsymbol{j}\,v + 4\,\boldsymbol{k}\,u^3$, $\boldsymbol{r}_u(-1, 1) = -2\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\,\boldsymbol{k}$;

$$\boldsymbol{r}_v(u, v) = -6\,\boldsymbol{i}\,v + \boldsymbol{j}\,(u - 3v^2) - 2\,\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_v(-1, 1) = -6\,\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_{uu}(u, v) = 2\,\boldsymbol{i} + 12\,\boldsymbol{k}\,u^2, \quad \boldsymbol{r}_{uu}(-1, 1) = 2\,\boldsymbol{i} + 12\,\boldsymbol{k}; \quad \boldsymbol{r}_{uv}(u, v) = \boldsymbol{r}_{uv}(-1, 1) = \boldsymbol{j};$$

$$\boldsymbol{r}_{vv}(u, v) = -6\,\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}\,v, \quad \boldsymbol{r}_{vv}(-1, 1) = -6\,\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j};$$

$$E(-1, 1) = 4 + 1 + 16 = 21, \quad F(-1, 1) = 12 - 4 + 8 = 16,$$

$$G(-1, 1) = 36 + 16 + 4 = 56, \quad W(-1, 1) = \sqrt{21 \cdot 56 - 16^2} = \sqrt{920};$$

$$L(-1,1)=\frac{1}{\sqrt{920}}\begin{vmatrix}-2 & 1 & -4\\ -6 & -4 & -2\\ 2 & 0 & 12\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{920}}[-2(-48)-(-72+4)-4\cdot 8]=\frac{132}{\sqrt{920}},$$

$$M(-1,1)=\frac{1}{\sqrt{920}}\begin{vmatrix}-2 & 1 & -4\\ -6 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{920}}[-(4-24)]=\frac{20}{\sqrt{920}},$$

$$N(-1,1)=\frac{1}{\sqrt{920}}\begin{vmatrix}-2 & 1 & -4\\ -6 & -4 & -2\\ -6 & -6 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{920}}[-6(-2-16)+6(4-24)]=\frac{-12}{\sqrt{920}}.$$

B) $\boldsymbol{r}_u(0,\pi/2)=3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\,\pi/2$, $\boldsymbol{r}_v(0,\pi/2)=-3\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r}_{uu}(0,\pi/2)=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r}_{uv}(0,\pi/2)=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_{vv}(0,\pi/2)=\boldsymbol{0}$.

$$E(0,\pi/2)=9+\pi^2/4,\quad F(0,\pi/2)=0,\quad G(0,\pi/2)=9,\quad W(0,\pi/2)=3\sqrt{9+\pi^2/4}\,;$$

$$L(0,\pi/2)=0,\quad M(0,\pi/2)=\frac{3}{\sqrt{9+\pi^2/4}},\quad N(0,\pi/2)=0.$$

C) $E(0,0)=2$, $F(0,0)=-1$, $G(0,0)=2$, $W(0,0)=\sqrt{3}$;

$$L(0,0)=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad M(0,0)=0,\quad N(0,0)=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Számítsuk ki az alábbi felületek megjelölt pontján átmenő és ott (az $\dot{u}/\dot{v}$ hányadossal, valamint a ϑ szöggel) megadott (két) simulósíkhoz tartozó felületi görbék ottani görbületét.

A) $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{i}\,(u^2-3v^2)+\boldsymbol{j}\,(uv-v^3)+\boldsymbol{k}\,(u^4-2v)$,

$u=-1,\ v=1,\ \dot{u}/\dot{v}=2,\ \vartheta=\pi/3$;

B) $\boldsymbol{r}(u,v)=3\,\boldsymbol{i}\,\mathrm{ch}\,u\cos v+3\boldsymbol{j}\,\mathrm{sh}\,u\sin v+\boldsymbol{k}\,\mathrm{th}\,uv$,

$u=0,\ v=\pi/2,\ \dot{u}/\dot{v}=3(9+\pi^2/4)^{-1},\ \vartheta=\pi/3$;

C) $\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{i}\,e^v+\boldsymbol{j}\,e^v+\boldsymbol{k}\,(u-v)$,

$u=v=0,\ \dot{u}/\dot{v}=2,\ \vartheta=\pi/6$.

Használjuk fel az előző példában már kiszámított GAUSS-féle főmennyiségeket!

Megoldás. A (6)-ból ($\dot{v}^2$-vel és $\cos\vartheta$-val való osztás útján) nyert

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\cos\vartheta}\,\frac{L\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2+2M\frac{\dot{u}}{\dot{v}}+N}{E\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2+2F\frac{\dot{u}}{\dot{v}}+G}$$

formulát alkalmazzuk, ahol a főmennyiségek a megjelölt pontban veendők.

A) Az $u = -1$, $v = 1$ paraméterű pontban

$$E = 21,\quad F = 16,\quad G = 56;\quad L = \frac{132}{\sqrt{920}},\quad M = \frac{20}{\sqrt{920}},\quad N = \frac{-12}{\sqrt{920}}.$$

Ezek, valamint $\dot{u}/\dot{v} = 2$ és $\cos\vartheta = 1/2$ figyelembevételével a keresett görbület így alakul:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1/2}\frac{1}{\sqrt{920}}\frac{132\cdot 2^2 + 2\cdot 20\cdot 2 - 12}{21\cdot 2^2 + 2\cdot 16\cdot 2 + 15} = \frac{2}{\sqrt{920}}\frac{596}{204} \approx 0{,}193.$$

B) A megjelölt pontban

$$E = 9 + \pi^2/4,\quad F = 0,\quad G = 9;\quad L = 0,\quad M = 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}},\quad N = 0.$$

Ezek, valamint $\dot{u}/\dot{v} = 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}}$, $\cos\vartheta = 1/2$ figyelembevételével nyerjük, hogy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1/2}\frac{2\cdot 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}}}{(9 + \pi^2/4)\cdot 9\,(9 + \pi^2/4)^{-1} + 9} = \frac{2}{9 + \pi^2/4}.$$

C) A megjelölt pontban

$$E = 2,\quad F = -1,\quad G = 2,\quad L = -1/\sqrt{3},\quad M = 0,\quad N = 1/\sqrt{3}.$$

Ezek, valamint $\dot{u}/\dot{v} = 2$, $\cos\vartheta = \sqrt{3}/2$ figyelembevételével írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}/2}\frac{-1/\sqrt{3}\cdot 2^2 + 1/\sqrt{3}}{2\cdot 2^2 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.$$

3. Mutassuk meg, hogy az

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, e^u \cos v + \boldsymbol{j}\, e^u \sin v + \boldsymbol{k}\, e^v,\quad u = -t,\quad v = 2t$$

felületi térgörbe $t = 0$ paraméterű pontbeli görbülete ugyanakkora, mint az ottani simulósíkkal a felületen képzett síkmetszet ugyanazon pontbeli görbülete.

Megoldás. A) Először számítsuk ki $\boldsymbol{r}[u(t), v(t)] = \boldsymbol{r}(t)$ térgörbe $t = 0$ pontbeli görbületét:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, e^t \cos 2t + \boldsymbol{j}\, e^{-t} \sin 2t + \boldsymbol{k}\, e^{2t},\quad \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k};$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = -\boldsymbol{i}\, e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t) + \boldsymbol{j}\, e^{-t}(-\sin 2t + 2\cos 2t) + 2\,\boldsymbol{k}\, e^{2t},$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(0) = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\quad |\dot{\boldsymbol{r}}(0)| = 3;$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{i}\, e^{-t}(4\sin 2t - 3\cos 2t) - \boldsymbol{j}\, e^{-t}(4\cos 2t + 3\sin 2t) + 4\,\boldsymbol{k}\, e^{2t},$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(0) = -3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k},\quad \dot{\boldsymbol{r}}(0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(0) = 16\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k},$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(0)| = 6\sqrt{10};$$

$$G(0) = \frac{1}{R(0)} = \frac{6\sqrt{10}}{3^3} = \frac{2\sqrt{10}}{9}.$$

A térgörbe $t = 0$ paraméterű pontjához tartozó simulósík egyenlete:

$$[\dot{\boldsymbol{r}}(0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(0)]\,[\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(0)] = 16(X-1) - 2Y + 10(Z-1) =$$
$$= 2(8X - Y + 5Z - 13) = 0.$$

B) A simulósík és a felület metszésvonalának megállapítására helyettesítsük be a felület paraméteres egyenletrendszerét a simulósík egyenletébe:

$$8e^u \cos v - e^u \sin v + 5e^v - 13 = 0, \qquad e^u = \frac{13 - 5e^v}{8\cos v - \sin v} = \varphi(v).$$

E megoldást visszahelyettesítve a felület egyenletébe, megkapjuk a metszésvonal v paraméteres egyenletét:

$$\boldsymbol{r}(v) = \boldsymbol{i}\,\frac{(13 - 5e^v)\cos v}{8\cos v - \sin v} + \boldsymbol{j}\,\frac{(13 - 5e^v)\sin v}{8\cos v - \sin v} + \boldsymbol{k}\,e^v.$$

Számítsuk ki most eme síkmetszet $v = (2t =)\ 0$ pontbeli görbületét:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(v) = \frac{\boldsymbol{i}}{(8\cos v - \sin v)^2}(13 - 5e^v - 40e^v\cos^2 v + 5e^v \cos v \sin v) +$$
$$+ \frac{\boldsymbol{j}}{(8\cos v - \sin v)^2}(104 - 40e^v \cos^2 v - 40\,e^v \cos v \sin v - 35e^v \sin^2 v) + \boldsymbol{k}\,e^v,$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{i}\,\frac{13 - 5 - 40}{64} + \boldsymbol{j}\,\frac{104 - 40}{64} + \boldsymbol{k} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(0)| = \frac{3}{2};$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(v) = \frac{\boldsymbol{i}}{(8\cos v - \sin v)^4}\,[(-5e^v - 40e^v\cos^2 v + 80e^v \cos v \sin v + 5e^v \cos v \sin v -$$
$$- 5e^v \sin^2 v + 5e^v \cos^2 v)(8\cos v - \sin v)^2 + (13 - 5e^v - 40e^v \cos^2 v +$$
$$+ 5e^v \cos v \sin v)\,2(8\cos v - \sin v)(8\sin v + \cos v)] +$$
$$+ \frac{\boldsymbol{j}}{(8\cos v - \sin v)^4}\,[(-40e^v \cos v \sin v + 40e^v \sin^2 v - 40e^v\cos^2 v -$$
$$- 40e^v\cos^2 v + 80e^v \cos v \sin v - 35e^v \sin^2 v - 70e^v \cos v \sin v)(8\cos v - \sin v)^2 +$$
$$+ 2(8\cos v - \sin v)(8\sin v + \cos v)(104 - 40e^v \cos v \sin v - 40e^v \cos^2 v -$$
$$- 35e^v \sin^2 v)] + \boldsymbol{k}\,e^v,$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{i}\,\frac{-40\cdot 64 - 8\cdot 64}{8^4} + \boldsymbol{j}\,\frac{-80\cdot 64 + 2\cdot 8\cdot(104-40)}{8^4} + \boldsymbol{k} = -\frac{3}{4}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(0) = 2\boldsymbol{i} - \frac{1}{4}\boldsymbol{j} + \frac{5}{4}\boldsymbol{k}, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(0)| = \frac{3\sqrt{10}}{4};$$

$$G(0) = \frac{1}{R(0)} = \frac{3\sqrt{10}/4}{(3/2)^3} = \frac{2\sqrt{10}}{9}.$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy az adott felületi görbe $t = 0$ pontbeli görbülete valóban megegyezik az ottani simulósíkkal képzett felületi síkmetszet ugyanazon pontbeli görbületével.

E számítással a II°-ben a (8) formula alapján kimondott tételt kívántuk szemléltetni.

C) Gyakorlásképpen végezzük el a B)-beli számítást más módszerrel.

A felület egyenlete implicit alakban is megadható, nevezetesen $y - x \operatorname{tg} \ln z = 0$. A B)-ben vizsgált síkmetszet tehát

$$\left.\begin{aligned} y - x \operatorname{tg} \ln z &= 0, \\ 8x - y + 5z - 13 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

módon is megadható. E metszésvonal $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ pontbeli görbületét az 1. §. b) *β)* III°-ban ismertetett módszerrel számítjuk ki.

Mindkét egyenletet x szerint deriváljuk:

$$\left.\begin{aligned} & y' - \operatorname{tg} \ln z - x \frac{1}{\cos^2 \ln z} \frac{1}{z} z' = 0 \\ & 8 - y' + 5\, z' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Az $\boldsymbol{r}_0(1, 0, 1)$ koordinátáinak behelyettesítésével nyert

$$y' - z' = 0, \quad -y' + 5\, z' = -8 \tag{I$_0$}$$

egyenletrendszer megoldása

$$y' = -2, \; z' = -2; \quad \text{tehát} \quad \dot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Az (I)-et újra deriváljuk x szerint:

$$\left.\begin{aligned} & y'' - \frac{1}{\cos^2 \ln z} \frac{1}{z} z' - \frac{1}{\cos^2 \ln z} \frac{1}{z} - x \frac{2}{\cos^3 \ln z} \sin \ln z \frac{1}{z^2} z'^2 + \\ & + x \frac{1}{\cos^2 \ln z} \frac{1}{z^2} z'^2 - x \frac{1}{\cos^2 \ln z} \frac{1}{z} z'' = 0, \\ & - y'' + 5z'' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Az $\boldsymbol{r}_0$ és $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ koordinátáinak behelyettesítésével nyert

$$y'' - z'' = -8, \quad -y'' + 5\, z'' = 0 \tag{II$_0$}$$

egyenletrendszer megoldása

$$y'' = -10, \; z'' = -2; \quad \text{tehát} \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_0 = -10\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

További segédszámítások:

$$|\dot{\boldsymbol{r}}_0| = 3, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_0 \times \ddot{\boldsymbol{r}}_0 = -16\, \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 10\, \boldsymbol{k}, \quad |\dot{\boldsymbol{r}}_0 \times \ddot{\boldsymbol{r}}_0| = 6\sqrt{10}.$$

Végül a kérdezett görbület :

$$G_0 = \frac{1}{R_0} = \frac{6\sqrt{10}}{3^3} = \frac{2\sqrt{10}}{9},$$

megegyezésben az A)-ban és B)-ben nyert eredménnyel.

4. Határozzuk meg az alábbi felületek megjelölt pontján átmenő és ott (az $\dot{u}/\dot{v}$ hányadossal) megadott érintőjű ferde metszetek ottani görbületét, a $\vartheta = \text{arc}\,(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\nu})$ függvényében:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(u^2 - 3v^2) + \boldsymbol{j}(uv - v^3) + \boldsymbol{k}(u^4 - 2v)$,
$u = -1,\ v = 1,\ \dot{u}/\dot{v} = 2$;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = 3\boldsymbol{i}\,\text{ch}\,u\cos v + 3\boldsymbol{j}\,\text{sh}\,u\sin v + \boldsymbol{k}\,\text{th}\,uv$,
$u = 0,\ v = \pi/2,\ \dot{u}/\dot{v} = 3(9 + \pi^2/4)^{-1}$;

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,e^u + \boldsymbol{j}\,e^v + \boldsymbol{k}\,(u - v)$,
$u = v = 0,\ \dot{u}/\dot{v} = 2$.

Használjuk fel a 2. példa számítási részleteit!

Megoldás. A MEUSNIER-féle tételt alkalmazzuk, amely szerint ($\dot{u}/\dot{v} = h$ jelöléssel)

$$R = R_0\cos\vartheta, \quad \text{ahol} \quad R_0 = \frac{Eh^2 + 2Fh + G}{Lh^2 + 2Mh + N}.$$

A) $E = 21,\ F = 16,\ G = 56;\ L = \dfrac{132}{\sqrt{920}},\ M = \dfrac{20}{\sqrt{920}},\ N = \dfrac{-12}{\sqrt{920}};\ h = 2;$

$$R_0 = \sqrt{920}\,\frac{21\cdot 2^2 + 2\cdot 16\cdot 2 + 56}{132\cdot 2^2 + 2\cdot 20\cdot 2 - 12} = \sqrt{920}\,\frac{204}{596} \approx 10{,}4; \quad R \approx 10{,}4\cos\vartheta.$$

B) $E = 9 + \pi^2/4,\ F = 0,\ G = 9;\ L = 0,\ M = 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}},\ N = 0;$
$h = 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}};$

$$R_0 = \frac{(9 + \pi^2/4)\cdot 9\,(9 + \pi^2/4)^{-1} + 9}{2\cdot 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}}} = 9 + \pi^2/4; \quad R = (9 + \pi^2/4)\cos\vartheta.$$

C) $R_0 = -2\sqrt{3},\quad R = -2\sqrt{3}\cos\vartheta.$

5. Határozzuk meg az alábbi felületek megjelölt pontján átmenő normálmetszetek ottani görbületét, az (érintő irányát megszabó) $\dot{u}/\dot{v} = h$ hányados függvényében:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(u^2 - 3v^2) + \boldsymbol{j}(uv - v^3) + \boldsymbol{k}(u^4 - 2v),\quad u = -1,\ v = 1;$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = 3\,\boldsymbol{i}\,\text{ch}\,u\cos v + 3\,\boldsymbol{j}\,\text{sh}\,u\sin v + \boldsymbol{k}\,\text{th}\,uv,\quad u = 0,\ v = \pi/2;$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,e^u + \boldsymbol{j}\,e^v + \boldsymbol{k}\,(u - v),\quad u = v = 0.$

Használjuk fel a 2. példa számítási részleteit!

Megoldás. A (11)-ből (v^2-tel való osztással és $\dot{u}/\dot{v} = h$ jelöléssel) nyert

$$\frac{1}{R} = \frac{L h^2 + 2 M h + N}{E h^2 + 2 F h + G}$$

formulát alkalmazzuk.

A) $E = 21,\quad F = 16,\quad G = 56;\quad L = \frac{132}{\sqrt{920}},\quad M = \frac{20}{\sqrt{920}},\quad N = \frac{-12}{\sqrt{920}};$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{920}}\,\frac{132 h^2 + 40 h - 12}{21 h^2 + 32 h + 56}.$$

B) $E = 9 + \pi^2/4,\quad F = 0,\quad G = 9;\quad L = 0,\quad M = 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}},\quad N = 0;$

$$\frac{1}{R} = \frac{6\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}} h}{(9 + \pi^2/4)\, h^2 + 9}.$$

C) $E = 2,\quad F = -1,\quad G = 2;\quad L = -1/\sqrt{3},\quad M = 0,\quad N = 1/\sqrt{3};$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{-h^2 + 1}{2 h^2 - 2 h + 2}.$$

6. Írjuk fel az alábbi felületek megjelölt pontjához tartozó DUPIN-féle indikátrix egyenletét és állapítsuk meg a pont jellegét:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(u^2 - 3 v^2) + \boldsymbol{j}(uv - v^3) + \boldsymbol{k}\,(u^4 - 2v),\quad u = -1,\ v = 1;$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = 3\,\boldsymbol{i}\,\mathrm{ch}\,u \cos v + 3\,\boldsymbol{j}\,\mathrm{sh}\,u \sin v + \boldsymbol{k}\,\mathrm{th}\,uv,\quad u = 0,\ v = \pi/2;$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,e^u + \boldsymbol{j}\,e^v + \boldsymbol{k}\,(u - v),\quad u = v = 0.$

Használjuk fel az előző példa részleteit!

Megoldás. A DUPIN-féle indikátrix egyenlete — a (13) szerint —

$$L\sigma^2 + 2 M\sigma\tau + N\tau^2 = \pm 1,$$

ahol $\sigma = \dot{u}\sqrt{|R|}/|\dot{\boldsymbol{r}}|$, $\tau = \dot{v}\sqrt{|R|}/|\dot{\boldsymbol{r}}|$. E kúpszelet és vele együtt a felületi pont jellegét a

$$D = LN - M^2$$

diszkrimináns előjele határozza meg, a IV° 3'-ben részletezett módon.

A) $L = \frac{132}{\sqrt{920}},\quad M = \frac{20}{\sqrt{920}},\quad N = \frac{-12}{\sqrt{920}};$

$$\frac{4}{\sqrt{920}}(33\sigma^2 + 10\sigma\tau - 3\tau^2) = \pm 1,$$

$$D = \frac{16}{920}(-33 \cdot 3 - 5^2) < 0.$$

B) $L = 0, \quad M = 3\,(9 + \pi^2/4)^{-\frac{1}{2}}, \quad N = 0;$

$$6\,(9 + \pi^2/4)\,\sigma\,\tau = \pm\,1, \quad \sigma\,\tau = \pm\,\frac{1}{6\,(9 + \pi^2/4)}$$

$$D = -9\,(9 + \pi^2/4)^{-1} < 0.$$

C) $L = -1/\sqrt{3}, \quad M = 0, \quad N = 1/\sqrt{3};$

$$-\sigma^2 + \tau^2 = \pm\,\sqrt{3}, \quad D = -\,1/3 < 0.$$

Mindhárom esetben az indikátrix konjugált hiperbolapár, a felületi pont hiperbolikus.

7. Határozzuk meg az

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,(a + b\cos u)\cos v + \boldsymbol{j}\,(a + b\cos u)\sin v + \boldsymbol{k}\,b\sin u, \quad a > b$$

egyenletű tóruszfelület elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait.

Megoldás. A felületi pont jellege — mint tudjuk — a

$$D = LN - M^2$$

diszkrimináns előjelétől függ.

A főmennyiségek kiszámítása:

$$\boldsymbol{r}_u = -\,\boldsymbol{i}\,b\sin u\cos v - \boldsymbol{j}\,b\sin u\sin v + \boldsymbol{k}\,b\cos u,$$
$$\boldsymbol{r}_v = -\,\boldsymbol{i}(a + b\cos u)\sin v + \boldsymbol{j}(a + b\cos u)\cos v,$$
$$\boldsymbol{r}_{uu} = -\,\boldsymbol{i}\,b\cos u\cos v - \boldsymbol{j}\,b\cos u\sin v - \boldsymbol{k}\,b\sin u,$$
$$\boldsymbol{r}_{uv} = \boldsymbol{i}\,b\sin u\sin v - \boldsymbol{j}\,b\sin u\cos v,$$
$$\boldsymbol{r}_{vv} = -\,\boldsymbol{i}\,(a + b\cos u)\cos v - \boldsymbol{j}\,(a + b\cos u)\sin v.$$

Minthogy $W = \sqrt{EG - F^2} = |\,\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| > 0$, ezért a másodrendű főmennyiségek W-szeresét vehetjük:

$$WL = \boldsymbol{r}_u\,\boldsymbol{r}_v\,\boldsymbol{r}_{uu} = \begin{vmatrix} -\,b\sin u\cos v & -\,b\sin u\sin v & b\cos u \\ -\,(a + b\cos u)\sin v & (a + b\cos u)\cos v & 0 \\ -\,b\cos u\cos v & -\,b\cos u\sin v & -\,b\sin u \end{vmatrix} =$$

$= b^2\cos^2 u\,(a + b\cos u) + b^2\sin^2 u\,(a + b\cos u) = b^2\,(a + b\cos u),$

$$WM = \boldsymbol{r}_u\,\boldsymbol{r}_v\,\boldsymbol{r}_{uv} = \begin{vmatrix} -\,b\sin u\cos v & -\,b\sin u\sin v & b\cos u \\ -\,(a + b\cos u)\sin v & (a + b\cos u)\cos v & 0 \\ b\sin u\sin v & -\,b\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$= b\cos u\,\left[b\,(a + b\cos u)\sin v\sin u\cos v - b(a + b\cos u)\cos v\sin u\sin v\right] = 0,$

$$WN = \boldsymbol{r}_u\,\boldsymbol{r}_v\,\boldsymbol{r}_{uv} = \begin{vmatrix} -\,b\sin u\cos v & -\,b\sin u\sin v & b\cos u \\ -\,(a + b\cos u)\sin v & (a + b\cos u)\cos v & 0 \\ -\,(a + b\cos u)\cos v & -\,(a + b\cos u)\sin v & 0 \end{vmatrix} =$$

$= b\cos u\,(a + b\cos u)^2\,(\sin^2 v + \cos^2 v) = b\cos u\,(a + b\cos u)^2.$

Ezek alapján a diszkrimináns W^2-szerese:

$$W^2 D = W^2 (LN - M^2) = W^2 b^3 \cos u \, (a + b \cos u)^3.$$

Keressük meg először a parabolikus pontokat, amelyek szétválasztják az elliptikus és a hiperbolikus pontokat.

Az $a + b \cos u$ tényező $a > b$ miatt nem lehet zérus; csak $\cos u = 0$ lehetséges, mégpedig $u = \pm \pi/2$ értéknél. Eszerint az

$$\boldsymbol{r}(\pm\pi/2, v) = \boldsymbol{i}\, a \cos v + \boldsymbol{j}\, a \sin v + \boldsymbol{k}\, b$$

egyenletű körök (a felső és az alsó középkör) pontjai parabolikusak.

A $D W^2$ (és $W^2 > 0$ lévén, a D) előjele, $a + b \cos u > 0$ miatt, a $\cos u$ előjelével azonos. Eszerint a külső gyűrűfelület ($0 \leqq |u| < \pi/2$) pontjai elliptikusak, a belső gyűrűfelület ($\pi/2 < |u| < \pi$) pontjai hiperbolikusak.

8. Határozzuk meg az alábbi felületek megjelölt pontjához tartozó főérintőket:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,(u^2 + v^2) + 2\boldsymbol{j}\, uv + \boldsymbol{k}\,(u - v), \quad u = -1, \; v = -1;$

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, u \cos v + \boldsymbol{j}\, u \sin v + \boldsymbol{k}\, bv, \quad u, \; v;$

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = 3\, \boldsymbol{i} \operatorname{ch} u \cos v + 3\boldsymbol{j} \operatorname{sh} u \sin v + \boldsymbol{k} \operatorname{th} uv, \quad u = 0, \; v = \pi/2.$

Mutassuk meg, hogy a főérintők konjugáltak és merőlegesek.

Megoldás. A főérintőket a (21) alatt tanult

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \dot{v}_1 (\boldsymbol{r}_u h_1 + \boldsymbol{r}_v), \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \dot{v}_2 (\boldsymbol{r}_u h_2 + \boldsymbol{r}_v)$$

formulák szolgáltatják, ahol v_1, v_2 tetszőleges, $h_1 = \dot{u}_1/\dot{v}_1$ és $h_2 = \dot{u}_2/\dot{v}_2$ pedig a

$$T(h) = \begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet gyökei.

A főérintők konjugáltságát és merőlegességét a (17) és a (18) formulából ($\dot{v}_i = \tau_i = 1$, $\dot{u}_i = \sigma_i = h_i$, $i = 1, 2$ választással) nyert

$$K(h_1, h_2) = L\, h_1 h_2 + M\,(h_1 + h_2) + N = 0,$$

$$P(h_1, h_2) = E\, h_1 h_2 + F\,(h_1 + h_2) + G = 0$$

egyenletek juttatják kifejezésre.

A) $\boldsymbol{r}_u(u\, v) = 2\, \boldsymbol{i}\, u + 2\boldsymbol{j}\, v + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_u(-1, -1) = -2\, \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$

$\boldsymbol{r}_v(u, v) = 2\, \boldsymbol{i}\, v + 2\boldsymbol{j}\, u - \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_v(-1, -1) = -2\, \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},$

$\boldsymbol{r}_{uu}(u, v) = \boldsymbol{r}_{uu}(-1, -1) = 2\, \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{r}_{uv}(u, v) = \boldsymbol{r}_{uv}(-1, -1) = 2\boldsymbol{j},$

$\boldsymbol{r}_{vv}(u, v) = \boldsymbol{r}_{vv}(-1, -1) = 2\boldsymbol{i};$

$$E(-1,-1)=9,\quad F(-1,-1)=7,\quad G(-1,-1)=9,\quad W(-1,-1)=\sqrt{32};$$

$$L(-1,-1)=\frac{8}{\sqrt{32}},\quad M(-1,-1)=-\frac{8}{\sqrt{32}},\quad N=\frac{8}{\sqrt{32}};$$

$$T(h)=\frac{8}{\sqrt{32}}\begin{vmatrix}1 & -h & h^2\\ 9 & 7 & 9\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\frac{128}{\sqrt{32}}(1-h^2)=0,\quad h_{1,2}=\pm 1;$$

$$\dot{\boldsymbol r}_1(-1,-1)=\dot v_1[(-2\boldsymbol i-2\boldsymbol j+\boldsymbol k)\cdot 1+(-2\boldsymbol i-2\boldsymbol j-\boldsymbol k)]=c\,(\boldsymbol i+\boldsymbol j),$$

$$\dot{\boldsymbol r}_2(-1,-1)=\dot v_2[(-2\boldsymbol i-2\boldsymbol j+\boldsymbol k)(-1)+(-2\boldsymbol i-2\boldsymbol j-\boldsymbol k)]=c\,\boldsymbol k;$$

$$K(1,-1)=\frac{1}{\sqrt{32}}[8\cdot 1\cdot(-1)-8\,(1-1)+8]=0,$$

$$P(1,-1)=9\cdot 1\cdot(-1)+7\,(1-1)+9=0.$$

B) $\boldsymbol r_u=\boldsymbol i\cos v+\boldsymbol j\sin v,\quad \boldsymbol r_v=-\boldsymbol i\,u\sin v+\boldsymbol j\,u\cos v+\boldsymbol k\,b,\quad \boldsymbol r_{uu}=0,$
$\boldsymbol r_{uv}=-\boldsymbol i\sin v+\boldsymbol j\cos v,\ \boldsymbol r_{vv}=-\boldsymbol i\,u\cos v-\boldsymbol j\,u\sin v;$

$$E=1,\quad F=0,\quad G=u^2+b^2,\quad W=\sqrt{u^2+b^2};$$

$$L=0,\quad M=-\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}},\quad N=0;$$

$$T(h)=\frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}\begin{vmatrix}1 & -h & h^2\\ 1 & 0 & u^2+h^2\\ 0 & -b & 0\end{vmatrix}=\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}}[(u^2+b^2)-h^2]=0,$$

$$h_1=\pm\sqrt{u^2+b^2};$$

$$\dot{\boldsymbol r}_1=\dot v_1\left[(\boldsymbol i\cos v+\boldsymbol j\sin v)\sqrt{u^2+b^2}+(-\boldsymbol i\,u\sin v+\boldsymbol j\,u\cos v+\boldsymbol k\,b)\right]=$$
$$=\dot v_1\left[\boldsymbol i\left(\sqrt{u^2+b^2}\cos v-u\sin v\right)+\boldsymbol j\left(\sqrt{u^2+b^2}\sin v+u\cos v\right)+\boldsymbol k\,b\right],$$
$$\dot{\boldsymbol r}_2=\dot v_2\left[(\boldsymbol i\cos v+\boldsymbol j\sin v)\left(-\sqrt{u^2+b^2}\right)+(-\boldsymbol i\,u\sin v+\boldsymbol j\,u\cos v+\boldsymbol k\,b)\right]=$$
$$=\dot v_2\left[-\boldsymbol i\left(\sqrt{u^2+b^2}\cos v+u\sin v\right)+\boldsymbol j\left(-\sqrt{u^2+b^2}\sin v+u\cos v\right)+\boldsymbol k\,b\right];$$

$$K(h_1,h_2)=-\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}}\left(\sqrt{u^2+b^2}-\sqrt{u^2+b^2}\right)=0,$$

$$P(h_1,h_2)=1\ \ (-u^2-b^2)+u^2+b^2=0.$$

C) $E=9+\pi^2/4,\quad F=0,\quad G=9,\ W=3\sqrt{9+\pi^2/4};$

$$L=0,\quad M=3\,(9+\pi^2/4)^{-\frac{1}{2}},\quad N=0;$$

$$T(h)=-3\,(9+\pi^2/4)^{-\frac{1}{2}}[9-(9+\pi^2/4)\,h^2]=0,\quad h_{1,2}=\pm 3\,(9+\pi^2/4)^{-\frac{1}{2}}.$$

9. Számítsuk ki az alábbi felületek megjelölt pontjára vonatkozó közép- és GAUSS-görbületet, valamint a főgörbületeket; az utóbbiak segítségével fejezzük ki a megjelölt ponton átmenő tetszőleges [$\alpha = \text{arc}\,(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}})$ szöggel megadott] normálmetszet ottani görbületét, valamint az ottani DUPIN-féle indikátrix normálegyenletét:

A) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}\, u \cos v + \mathbf{j}\, u \sin v + \mathbf{k}\, b\, v, \quad u, v;$

B) $\mathbf{r}(u, v) = 3\, \mathbf{i}\, \text{ch}\, u \cos v + 3\mathbf{j}\, \text{sh}\, u \sin v + \mathbf{k}\, \text{th}\, uv, \quad u = 0, \ v = \pi/2;$

C) $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}(u^2 - v^2) + \mathbf{j}(u + v) + \mathbf{k}\, u^2 v^2, \quad u = 0, \ v = -1.$

Megoldás. A közép- és GAUSS-görbület:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{EN - 2FM + GL}{W^2}, \qquad K = \frac{LN - M^2}{W^2} \qquad (W^2 = EG - F^2),$$

a főgörbületek pedig az

$$\frac{1}{R^2} - 2H\frac{1}{R} + K = 0$$

egyenlet $1/R_1$ és $1/R_2$ gyökei. Ezekkel tetszőleges normálmetszet görbülete — EULER-tétele szerint —

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha \qquad \left(\frac{1}{R_1} < \frac{1}{R_2}\right)$$

módon, a DUPIN-féle indikátrix normálegyenlete pedig

$$\frac{X^2}{R_1} + \frac{Y^2}{R_2} = \pm 1 \qquad (X = \sqrt{|R|}\cos\alpha, \quad Y = \sqrt{|R|}\sin\alpha)$$

módon fejezhető ki.

A) A 8. C) példában végzett számítások szerint

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + b^2, \quad W = (u^2 + b^2)^{1/2};$$

$$L = 0, \quad M = -b\,(u^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad N = 0;$$

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}}\,\frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot (-b) + (u^2 + b^2) \cdot 0}{u^2 + b^2} = 0 \quad \text{(minimálfelület!)};$$

$$K = \frac{1}{u^2 + b^2}\,\frac{0 \cdot 0 - b^2}{u^2 + b^2} = -\frac{b^2}{(u^2 + b^2)^2} < 0 \quad \text{(hiperbolikus pontok)};$$

$$\frac{1}{R^2} - 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{R} - \frac{b^2}{(u^2 + b^2)} = 0, \qquad \frac{1}{R_{1,2}} = \mp \frac{b}{u^2 + b^2};$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{b}{u^2 + b^2}\cos^2\alpha + \frac{b}{u^2 + b^2}\sin^2\alpha;$$

$$-\frac{b}{u^2 + b^2}(X^2 - Y^2) = \pm 1 \quad \text{(konjugált hiperbolapár)}.$$

B) A 8. C) példában végzett számítások szerint

$$E = 9 + \pi^2/4, \quad F = 0, \quad G = 9, \quad W = 3\sqrt{9 + \pi^2/4};$$

$$L = 0, \quad M = 3\,(9 + \pi^2/4)^{-1/2}, \quad N = 0;$$

$$H = 0, \quad K = -\frac{81}{(81 + 9\pi^2/4)^2} < 0 \text{ (hiperbolikus pont)};$$

$$\frac{1}{R^2} - \frac{81}{(81 + 9\pi^2/4)^2} = 0, \quad \frac{1}{R_{1,2}} = \mp \frac{1}{9 + \pi^2/4};$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{9 + \pi^2/4}(-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha);$$

$$\frac{1}{9 + \pi^2/4}(-X^2 + Y^2) = \pm 1 \text{ (konjugált hiperbolapár).}$$

C) $H = -\dfrac{5}{4}$, $K = 0$, (parabolikus pont);

$$\frac{1}{R^2} + \frac{5}{2}\frac{1}{R} = 0, \quad \frac{1}{R_1} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{1}{R_2} = 0;$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{5}{2}\cos^2\alpha; \quad -\frac{5}{2}X^2 = -1 \text{ (párhuzamos egyenespár).}$$

10. Számítsuk ki az alábbi [$z = f(x, y)$ alakú egyenlettel adott] felületek megjelölt pontjára vonatkozó első- és másodrendű főmennyiségeket:

A) $z = 4x^2y - 2xy^2$, $x = 1$, $y = 0$; **B)** $z = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{\cos nx}{\cos ny}$, (x, y).

Megoldás. Az V° 3′-ben tanultak szerint

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2;$$

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

A) $p(x, y) = 8xy - 2y^2$, $p(1, 0) = 0$, $q(x, y) = 4x^2 - 4xy$, $q(1, 0) = 4$,

$$E(1, 0) = 1, \quad F = 0, \quad G = 17, \quad EG - F^2 = 17;$$

$$r(x, y) = 8y, \quad r(1, 0) = 0, \quad s(x, y) = 8x - 4y,$$

$$s(1, 0) = 8, \quad t(x, y) = -4x, \quad t(1, 0) = -4;$$

$$L = 0, \quad M = \frac{8}{\sqrt{17}}, \quad N = -\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

B) $p = -\operatorname{tg} nx, \quad q = \operatorname{tg} ny,$

$$E = 1 + \operatorname{tg}^2 nx = \frac{1}{\cos^2 nx}, \quad F = -\operatorname{tg} nx \operatorname{tg} ny, \quad G = 1 + \operatorname{tg}^2 ny = \frac{1}{\cos^2 ny},$$

$$EG - F^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 nx + \operatorname{tg}^2 ny;$$

$$r = -\frac{n}{\cos^2 nx}, \quad s = 0, \quad t = \frac{n}{\cos^2 ny},$$

$$L = -\frac{n}{\cos^2 nx \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 nx + \operatorname{tg}^2 ny}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{n}{\cos^2 ny \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 nx + \operatorname{tg}^2 ny}}.$$

11. Számítsuk ki az alábbi felület megjelölt pontjára vonatkozólag A) a normálmetszetek görbületét; B) az $\dot{x}/\dot{y} = 1/3$ hányadossal megadott érintőjű ferde metszetek görbületét; C) az $\dot{x}/\dot{y} = 1/3$ hányadossal és a $\vartheta = \pi/4$ szöggel megadott (két) simulósíkú felületi görbék görbületét:

$$z = 4x^2y - 2xy^2, \quad x = 1, \quad y = 0.$$

Használjuk fel a 10. A) példában kiszámított főmennyiségeket.

Megoldás. **A)** A (11)-ből ($\dot{u}/\dot{v}$ helyett $\dot{x}/\dot{y} = h$ vételével) nyert

$$\frac{1}{R_0} = \frac{Lh^2 + 2Mh + N}{Eh^2 + 2Fh + G}$$

formulát alkalmazzuk;

$$\frac{1}{R_0(h)} = \frac{1}{\sqrt{17}} \frac{2 \cdot 8 \cdot h - 4}{1 \cdot h^2 + 17} = \frac{4}{\sqrt{17}} \frac{4h - 1}{h^2 + 17}, \quad \frac{1}{R_0\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{\sqrt{17}} \frac{12 - 9}{1 + 153} = \frac{6}{77\sqrt{17}}.$$

B) A (10b) alatti MEUSNIER-tétel szerint

$$R = R_0 \cos\vartheta, \quad \text{ahol} \quad R_0 = \frac{Eh^2 + 2Fh + G}{Lh^2 + 2Mh + N};$$

$$R_0\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{77\sqrt{17}}{6} \approx 52{,}8 \quad \text{és ezzel} \quad R \approx 52{,}8 \cos\vartheta.$$

C) Az előbbi formulából

$$\frac{\cos\vartheta}{R} = \frac{1}{R_0};$$

esetünkben $\cos\vartheta = \cos\alpha/4 = \sqrt{2}/2$, tehát

$$\frac{\sqrt{2}/2}{R} \approx \frac{1}{52{,}8} \quad \text{és} \quad \frac{1}{R} \approx \frac{\sqrt{2}}{52{,}8} \approx 0{,}0268.$$

12. Írjuk fel az alábbi felület megjelölt pontjához tartozó DUPIN-féle indikátrix egyenletét és állapítsuk meg a pont jellegét:

$$z = 4x^2y - 2xy^2, \quad x = 1, \quad y = 0.$$

Használjuk fel a 10. A) példában kiszámított főmennyiségeket!

Megoldás. A DUPIN-féle indikátrix egyenlete

$$L\sigma^2 + 2M\sigma\tau + N\tau^2 = \pm 1;$$

e kúpszelet és vele együtt a felületi pont jellegét a

$$D = LN - M^2$$

diszkrimináns határozza meg.

$$L = 0, \quad M = 8/\sqrt{17}, \quad N = -4/\sqrt{17}; \text{ ezekkel}$$

$$\frac{4}{\sqrt{17}}(2\sigma\tau - \tau^2) = \pm 1 \quad \text{és} \quad -\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 = -\frac{16}{17} < 0;$$

a felületi pont tehát hiperbolikus.

13. Határozzuk meg az alábbi felületek elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait:

A) $z = \left(1 - \frac{\varrho^2}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = 1 - (x^2+y^2) + \frac{(x^2+y^2)^2}{4}$.

B) $z = \arcsin\sqrt{x^2+y^2-4}$.

Megoldás. A felületi pontok jellege — a (36) értelmében — a

$$W^2 D = rt - s^2 \quad (W^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0)$$

mennyiség előjel- és zérushely-viszonyai alapján dönthető el.

A) $p = -2x + \frac{2(x^2+y^2)\cdot 2x}{4} = -2x + x^3 + xy^2, \quad q = -2y + x^2y + y^3,$

$$r = -2 + 3x^2 + y^2, \quad s = 2xy, \quad t = -2 + x^2 + 3y^2;$$

$$rt - s^2 = (-2 + 3x^2 + y^2)(-2 + x^2 + 3y^2) - 4x^2y^2 = 4 - 8\varrho^2 + 3\varrho^4,$$

ahol $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Parabolikus pontok:

$$rt - s^2 = 4 - 8\varrho^2 + 3\varrho^4 = 0, \quad \varrho_{1,2}^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{2}{3}, \ 2,$$

tehát a z tengelytől $\varrho_1 = \sqrt{2/3}$, $\varrho_2 = \sqrt{2}$ távolságban találhatók ilyen felületi pontok.

Elliptikus pontok:

$$rt - s^2 > 0, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq \varrho < \varrho_1 \quad \text{és} \quad \varrho_2 < \varrho < \infty.$$

Hiperbolikus pontok:

$$rt - s^2 < 0, \quad \text{ha} \quad \varrho_1 < \varrho < \varrho_2.$$

B) $p = \frac{1}{\sqrt{5 - x^2 - y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{5 - x^2 - y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}},$

$$r = \frac{1}{\sqrt{(5 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}} \left(\frac{1}{5 - x^2 - y^2} - \frac{x^2}{x^2 + y^2 - 4} \right),$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{(5 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}} \left(\frac{xy}{5 - x^2 - y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2 - 4} \right),$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{(5 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}} \left(\frac{y^2}{5 - x^2 - y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2 - 4} \right).$$

Az $rt - s^2$ kifejezése, a kiemelt pozitív tényezőt $P(x, y)$-nal jelölve:

$$rt - s^2 = P(x, y)\, [x^2 + y^2)^2 - 20\,] = P(x, y)\, (\varrho^4 - 20).$$

Eszerint a z tengelytől $0 < \varrho < \sqrt[4]{20}$ távolságú pontok hiperbolikusok, a $\varrho = \sqrt[4]{20}$ távolságúak parabolikusak, végül a $\varrho > \sqrt[4]{20}$ távolságúak elliptikusak.

15. Határozzuk meg az (implicit alakban adott)

$$F(x, y, z) = 3z + 3xz - yz + x + y = 0$$

egyenletű felület $P(0, 0, 0)$ pontjának jellegét.

Megoldás. A z parciális deriváltjai most

$$p = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad q = -\frac{F'_y}{F'_z}, \quad r = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xz}\, p)\, F'_z - (F''_{zx} + F''_{zz}\, p)\, F'_x}{F'^2_z}, \quad \text{s. í. t.}$$

módon nyerhetők.

$$p\,(x, y, z) = -\frac{3z + 1}{3 + 3x - y}, \quad p\,(0, 0, 0) = -\frac{1}{3},$$

$$q\,(x, y, z) = -\frac{-z + 1}{3 + 3x - y}, \quad q\,(0, 0, 0) = -\frac{1}{3};$$

$$r(x, y, z) = -\frac{3p\,(3 + 3x - y) - 3\,(3z + 1)}{(3 + 3x - y)^2}, \quad r\,(0, 0, 0) = \frac{2}{3},$$

$$s(x, y, z) = -\frac{3q\,(3 + 3x - y) - (3z + 1)(-1)}{(3 + 3x - y)^2}, \quad s(0, 0, 0) = \frac{2}{9},$$

$$t(x, y, z) = \frac{q\,(3 + 3x - y) - (z - 1)(-1)}{(3 + 3x - y)^2}, \quad t\,(0, 0, 0) = -\frac{2}{9};$$

$$(rt - s^2)_0 = \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{9}\right) - \frac{4}{81} < 0,$$

tehát a vizsgált pont hiperbolikus.

16. Határozzuk meg az alábbi felületek megjelölt pontjához tartozó főérintőket, és mutassuk meg, hogy ezek merőlegesek egymásra:

A) $z = xy,\ x = 2,\ y = 2$; B) $z = \sqrt{9 - 4x^2 - 4y^2},\ x = 1,\ y = -1.$

Megoldás. A főérintők:

$$\dot{r}_1 = \dot{y}_1 (r_x h_1 + r_y) \quad \text{és} \quad \dot{r} = \dot{y}_2 (r_x h_2 + r_y),$$

ahol $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ tetszőlegesek, $h_1 = \dot{x}_1/\dot{y}_1$ és $h_2 = \dot{x}_2/\dot{y}_2$ pedig a

$$T(h) = \begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet gyökei.

A) $p = y,\quad q = x;\quad r = 0,\quad s = 1,\quad t = 0;$

$$T(h) = \begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ 1+y^2 & xy & 1+x^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\ [(1+x^2) - h^2(1+y^2)] = 0,$$

$$h_{1,2}(x, y) = \pm \sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}} \quad \text{és} \quad h_{1,2}(2,2) = \pm 1;$$

$$\dot{r}_1 = \dot{y}_1 [(i + 2k) \cdot 1 + (j + 2k)] = \dot{y}_1 (i + j + 4k),$$

$$\dot{r}_2 = \dot{y}_2 [(i + 2k)(-1) + (j + 2k)] = \dot{y}_2 (-i + j),\quad \dot{r}_1 \dot{r}_2 = 0.$$

B) $p = -4,\quad q = 4,\quad r = -20,\quad s = -16,\quad t = -20;$

$$T(h) = \begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ 17 & -16 & 17 \\ -20 & -16 & -20 \end{vmatrix} = 37 \cdot 16 (1 - h^2) = 0,\quad h_{1,2} = \pm 1;$$

$$\dot{r}_1 = \dot{y}_1 [(i - 4k) \cdot 1 + (j + 4k)] = \dot{y}_1 (i + j);$$

$$\dot{r}_2 = \dot{y}_2 [(i - 4k)(-1) + (j + 4k)] = \dot{y}_2 (-i + j + 8k),\quad \dot{r}_1 \dot{r}_2 = 0.$$

17. Számítsuk ki a $z = xy$ felület $x = 2,\ y = 2$ pontjára vonatkozó közép- és Gauss-görbületet, valamint a fő görbületeket; az utóbbiak segítségével fejezzük ki a megjelölt ponton átmenő normálmetszetek görbületét, valamint az ottani Dupin-féle indikátrix normálegyenletét.

Megoldás. A közép- és Gauss-görbület:

$$H = \frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}},\quad K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

a fő görbületek pedig az

$$\frac{1}{R^2} - 2H\frac{1}{R} + K = 0$$

egyenlet $1/R_1$ és $1/R_2$ gyökei. Ezekkel a normálmetszetek görbülete — EULER tétele szerint —

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}\cos^2\alpha+\frac{1}{R_2}\sin^2\alpha \quad \left(\frac{1}{R_1}<\frac{1}{R_2}\right)$$

módon, a DUPIN-féle indikátrix normálegyenlete pedig

$$\frac{X^2}{R_1}+\frac{Y^2}{R_2}=\pm 1$$

módon fejezhető ki.

$$p=y,\quad q=x,\quad r=0,\quad s=1,\quad t=0;$$

$$H(x,y)=\frac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},\quad H(2,2)=\frac{-4}{27},$$

$$K(x,y)=\frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2}<0,\quad K(2,2)=\frac{-1}{81}$$

(minden pont hiperbolikus);

$$\frac{1}{R^2}+\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\frac{1}{R}-\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}=0,$$

$$\frac{1}{R_{1,2}(x,y)}=\frac{-xy\mp\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},\quad \frac{1}{R_1(2,2)}=-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{R_2(2,2)}=\frac{1}{27};$$

$$\frac{1}{R}=-\frac{1}{3}\cos^2\alpha+\frac{1}{27}\sin^2\alpha,\quad -\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{27}=\pm 1 \text{ (konjugált hiperbolapár).}$$

γ) Felület felszíne. Felületi integrálok

1°. A felszínmérés problémája. 1'. A térgörbe ívhosszát egyre finomodó beírt poligon hosszának határértékeként értelmezzük. Analóg értelmezés a felület felszínére egyre finomodó beírt poliéder felszínének határértéke lenne; e definíció azonban nem kielégítő. Pl. a 48*a*. ábrán látható háromszögelés az orsó felszíne helyett egy hengeréhez közelít.

Ki kell kötni tehát, hogy a leghosszabb háromszögoldal is zérushoz tartson; de ez a megszorítás sem elég a felszín értelmezésére.

2'. SCHWARZ híres példájára, a körhenger-palást háromszögelésére utalunk. Támaszkodjék ez egyenlő közű paralel körök (k számú) és alkotók (a számú) metszéspontjaira (48*b*. ábra). A bevonalkázott háromszög csúcspontjai

$$\boldsymbol{r}_1\left(r\cos\frac{2\pi}{a},\ r\sin\frac{2\pi}{a},\ 0\right),\quad \boldsymbol{r}_2\left(r\cos\frac{2\pi}{a},\ -r\sin\frac{2\pi}{a},\ 0\right),\quad \boldsymbol{r}_3\left(r,\ 0,\ \frac{m}{k}\right),$$

területe pedig

$$t=\frac{1}{2}\,|(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ r\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\right), & -r\sin\frac{2\pi}{a}, & \frac{m}{k}\\ r\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\right), & r\sin\frac{2\pi}{a}, & \frac{m}{k}\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2\frac{m^2}{k^2}\sin^2\frac{2\pi}{a}+4r^2\sin^2\frac{2\pi}{a}\left(1-\cos\frac{2\pi}{a}\right)^2}=\frac{r}{k}\sin\frac{2\pi}{a}\sqrt{m^2+4r^2k^2\sin^4\frac{\pi}{a}}.$$

Az *ak* számú egybevágó háromszögből álló poliéder felszíne tehát

$$F = ar \sin \frac{2\pi}{a} \sqrt{m^2 + 4\, r^2 k^2 \sin^4 \frac{\pi}{a}} = 2r\pi \frac{\sin \frac{2\pi}{a}}{\frac{2\pi}{a}} \sqrt{m^2 + 4\pi^4 r^2 \left(\frac{k}{a^2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{a}}{\frac{\pi}{a}}\right)^4}\,. \quad (1)$$

Ebből látható, hogy $k/a^2 \to 0$ esetén

$$F \to F_h = 2r\pi m, \quad (2a)$$

továbbá $k/a^2 \to C \neq 0$ esetén

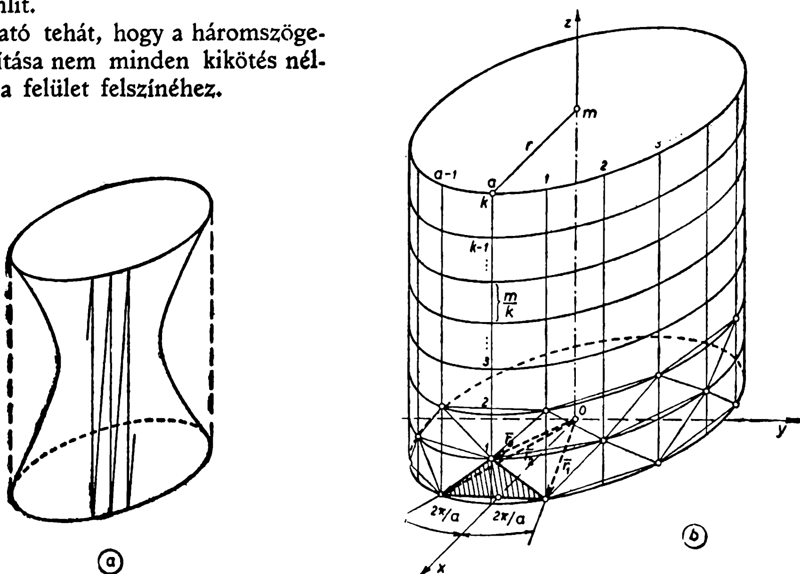
$$F \to F_c > F_h \quad (2b)$$

végül $k/a^2 \to \infty$ esetén

$$F \to \infty. \quad (2c)$$

Az utóbbi esetben a háromszöglapok nem a henger érintősíkjaihoz, hanem ezekre merőleges álláshoz közelednek, s így a poliéder egyre jobban összecsukott harmonikához hasonlít.

Látható tehát, hogy a háromszögelés finomítása nem minden kikötés nélkül vezet a felület felszínéhez.



48. ábra

3'. Végeredményben megállapíthatjuk, hogy *a háromszögelés finomítását*

$$\left.\begin{array}{lll} 1. & \text{maximális élhossz} & \to 0 \\ 2. & \text{maximális élszög} & < \pi - \eta \\ 3. & \text{maximális lapszög} & < \pi - \eta' \end{array}\right\} \quad (3)$$

módon kell eszközölni; itt η és η' rögzített pozitív szám. Az így nyert poliéder felszínének határértéke — ha egyáltalán létezik — a felület felszíne lesz.

II°. Felület felszínének kiszámítása. 1'. Keressük valamely $r = r(u, v)$ egyenletű felület $T(u, v)$ tartományhoz tartozó darabjának felszínét.

A $T(u, v)$ tartományról tegyük fel, hogy 1. egyszeresen összefüggő, 2. korlátos és zárt, 3. mérhető területű.

Az $r(u, v)$ függvényről tegyük fel, hogy 1'. kölcsönösen egyértelmű, 2'. egyidejűleg folytonos u-ban és v-ben, 3'. az r_u és az r_v parciális derivált T-ben mindenütt létezik és egyidejűleg folytonos u-ban és v-ben, 4'. a T-ben mindenütt $r_u \times r_v \neq 0$.

Tétel. *Az előbbi feltételek mellett az $r = r(u, v)$ felület $T(u, v)$ tartományhoz tartozó darabjának F felszíne létezik, mégpedig*

$$F = \iint_{(F)} |r_u \times r_v| \, du \, dv. \tag{4}$$

2'. *Igazolása* bonyolult, s itt csak röviden vázoljuk.*

Előkészítésül *néhány segédtételt* ismertetünk bizonyítás nélkül.

I. Legyen egy $r(t)$ függvénnyel kapcsolatban $|\dot{r}(t) - \dot{r}(t_0)| < \varepsilon |\dot{r}(t_0)|$; akkor ($\Delta r = r(t) - r(t_0)$, $\Delta t = t - t_0$ jelöléssel)

$$|\Delta r - \dot{r}(t_0) \Delta t| < \varepsilon |\dot{r}(t_0) \Delta t|.$$

II. Legyen $a \neq 0$ és $b \neq 0$; akkor

$$|a + b| \geqq \frac{|a \times b|}{2|a||b|} (|a| + |b|).$$

III. Jelölje Δr a felületbe írt háromszög egyik élvektorát, Δu és Δv pedig a paraméterek megfelelő növekményét; akkor

$$|\Delta r| \to 0 \text{ esetén } |\Delta u| \to 0 \text{ és } |\Delta v| \to 0.$$

IV. Legyen Δr_1 (az 1—3 és 1'—4' feltételeket kielégítő) felületnek egy húrvektora Δu_1 és Δv_1 a paraméterek megfelelő növekménye; akkor adott ε-hoz található olyan $h(\varepsilon)$ hogy

$$|\Delta r_1| < h(\varepsilon) \text{ esetén } |\Delta r_1 - (r_u \Delta u_1 + r_v \Delta v_1)| < \varepsilon |r_u \Delta u_1 + r_v \Delta v_1|.$$

Megjegyzendő, hogy — a 3' és 4' feltétel értelmében — a T-ben $r_u \neq 0$, $r_v \neq 0$, $r_u \neq r_v$, ott mindkettő folytonos, és így

$$0 < m < |r_u|, \quad |r_v| < M, \quad \mu < |r_u \times r_v| < M^2.$$

V. Ha $|a' - a| < \varepsilon |a|$ és $|b' - b| < \varepsilon |b|$, továbbá $\eta' < \text{arc}(a, b) < \pi - \eta'$, akkor

$$|a' \times b' - a \times b| < \frac{3\varepsilon}{\sin \eta'} |a \times b|.$$

VI. Ha $|a' - a| < \varepsilon |a|$, akkor $\text{arc}(a, a') < \text{arc} \sin \varepsilon$.

Ezek után rátérhetünk *a felszín tételének* rövid vázlatos igazolására.

A felület $\overrightarrow{PQ_1} = \Delta r_1$ és $\overrightarrow{PQ_2} = \Delta r_2$ húrvektorára, adott ε mellett — a IV. értelmében — írható, hogy

$$|\Delta r_i - (r_u \Delta u_i + r_v \Delta v_i)| < \varepsilon (r_u \Delta u_i + r_v \Delta v_i) \quad (i = 1, 2), \tag{a}$$

* L. részletesen pl. *Hajós* [(M. 2.)].

hacsak $|\Delta r_i| < h(\varepsilon)$. A Δr_i és az $r_u \Delta u_i + r_v \Delta v_i$ vektorok által felfeszített háromszögek területvektora

$$t = \frac{1}{2}(\Delta r_1 \times \Delta r_2), \text{ illetve } t' = \frac{1}{2}(r_u \Delta u_1 + r_v \Delta v) \times (r_u \Delta u_2 + r_v \Delta v_2) =$$

$$= (r_u \times r_v) \cdot \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta u_1 & \Delta v_1 \\ \Delta u_2 & \Delta v_2 \end{vmatrix} = (r_u \times r_v)\, \Delta T. \quad \text{(b)}$$

Tegyük fel, hogy a $PQ_1Q_2\triangle$-ben a P-nél levő arc $(\Delta r_1, \Delta r_2)$ szög a legnagyobb. Ezt és az élszög-korlátozást felhasználva írhatjuk, hogy

$$\eta < 60° \leqq \text{arc}\,(\Delta r_1\, \Delta r_2) < \pi - \eta.$$

Az (a) alapján — a VI. értelmében — megállapítható továbbá, hogy

$$\text{arc}\,(\Delta r_i, r_u \Delta u_i + r_v \Delta v) < \text{arc sin}\, \varepsilon \quad (i = 1, 2).$$

Ezeket egybevetve, elég kis ε esetén található olyan η', hogy

$$\eta' < \text{arc}\,(r_u \Delta u_1 + r_v \Delta v_1,\; r_u \Delta u_2 + r_v \Delta v_2) < \pi - \eta', \quad \text{(c)}$$

a triéderre érvényes egyenlőtlenségnek megfelelően.

Az $a' = \Delta r_1$, $b' = \Delta r_2$, $a = r_u \Delta u_1 + r_v \Delta v_1$, $b = r_u \Delta u_2 + r_v \Delta v_2$ jelölések bevezetésével — az V. értelmében — írható, hogy

$$\big||t| - |t'|\big| \leqq |t - t'| < \frac{3\varepsilon}{\sin \eta'}|t'| = \varepsilon^*|t'|, \quad \text{(d)}$$

vagyis a (b) alatti két háromszög területe viszonylag jól megközelíti egymást. A (d)-hez hasonló alakú egyenlőtlenség érvényes — bizonyíthatóan — akkor is, ha a $PQ_1Q_2\triangle$ legnagyobb szöge nem P-nél van. A (d)-ből ($|t| = \Delta F$ jelöléssel) nyerjük, hogy

$$\big|\Delta F - |r_u \times r_v|\,|\Delta T|\big| < \varepsilon^*|r_u \times r_v|\,|\Delta T| < \varepsilon M^2 |\Delta T|,$$

az egész beírt poliéderre nézve pedig

$$\Big|\sum_k \Delta F_k - \sum_k |r_u \times r_v|\,|\Delta T_k|\Big| < \varepsilon M^2 \sum_k |\Delta T_k|. \quad (e_1)$$

Belátható, hogy a ΔT területű háromszögek a T tartományt egyrétűen fedik be. Még ellenkező előjelű szomszédos ΔT-k sem fedhetik egymást, mert — kimutathatóan —

$$\text{sign}\, \Delta T = \frac{1}{2}\, \text{sign} \begin{vmatrix} \Delta u_1 & \Delta v_1 \\ \Delta u_2 & \Delta v_2 \end{vmatrix} = \text{const}, \quad \text{(f)}$$

azaz ΔT előjeltartó, mégpedig — ami a felület alkalmas irányításával elérhető — a $\Delta T > 0$. Ily módon az (e_1)

$$\Big|\sum_k \Delta F_k - \sum_k |r_u \times r_v|\, \Delta T_k\Big| < \varepsilon M^2 \sum_k \Delta T_k \quad (e_2)$$

alakba írható át.

Megfontolandó még, hogy egyes ΔT_k háromszögek a T tartományon kívüli területet is lefednek (B), viszont olyan részek is lehetnek T-ben, melyeket nem fed be egy ΔT_k sem (A). Ezért a $\sum_k |r_u \times r_v|\, \Delta T_k$ még nem közelítő összege az $\iint_{(T)} |r_u \times r_v|\, du\, dv$-nek, hanem

$$\sum_k |r_u \times r_v|\, \Delta T_k + \sum_k |r_u \times r_v|\, \Delta A_k - \sum_k |r_u \times r_v|\, \Delta B_k \approx \iint_{(T)} |r_u \times r_v|\, du\, dv$$

(a kettős integrál értelmezése szerint). A ΔT_k beosztás finomításakor $A \to 0$, $B \to 0$ és $|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| < M^2$ miatt a két utóbbi Σ is $\to 0$; következésképpen határátmenetkor

$$\sum_k |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \Delta T_k \to \iint_{(T)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv. \tag{g}$$

Minthogy T mérhető és befedése egyrétű, így $\sum \Delta T_k = T$.
Végeredményben az (e_2) határátmenetkor

$$|F - \iint_{(T)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv| < \varepsilon M^2 T \to 0 \tag{e_3}$$

alakot ölt, mert ε bármilyen kicsiny lehet, tehát az $\boldsymbol{r}(u, v)$ egyenletű felület T tartományhoz tartozó darabjának felszíne valóban

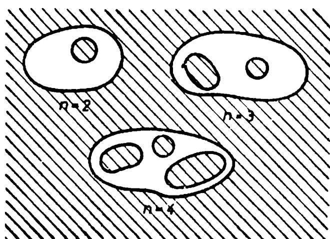
$$F = \iint_{(T)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv, \tag{h}$$

amint állítottuk.

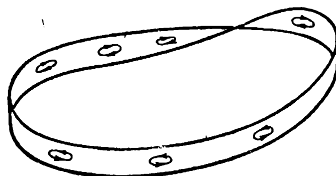
3'. Most még néhány megjegyzést teszünk a felszínre vonatkozólag.

Kimutatható, hogy ha egy F felszínű felületet egy F_1 és egy F_2 felszínű részre osztunk, akkor $F_1 + F_2 = F$, más szóval *a felszín additív mennyiség.*

Eddig csak egyszeresen összefüggő felületek felszínéről beszéltünk. Valamely *n-szeresen összefüggő felület felszínét* úgy értelmezzük, hogy n egyszeresen összefüggő darabra vágjuk, s ezek felszínét összegezzük; az így nyert felszín független a felvágás módjától (49. ábra).



49. ábra



50. ábra

Az ún. *egyoldalú felületek* (pl. a MOEBIUS-szalag) *felszínét* úgy értelmezzük, hogy a felületet elemi darabokra vágjuk, s ezek felszínét összegezzük (50. ábra).

Előfordul még egyszerű felületeknél is, hogy az $\boldsymbol{r}(u, v)$ függvény megkívánt *kölcsönös egyértelműsége* a felület valamely pontjában, görbéjén megszűnik. Képletünk mégis alkalmazható — a szinguláris pont, görbe kirekesztésével nyert felületre.

4'. Hozzuk végül a fentebb nyert

$$F = \iint_{(T)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv$$

felszín-formulát *gyakorlati alak*ra. Az

$$(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)^2 = |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 \sin^2 (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) = |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 [1 - \cos^2 (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)] =$$
$$= \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2 = EG - F^2$$

átalakítás felhasználásával formulánk így alakul:

$$F = \iint_{(T)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{5}$$

A felület $z = f(x, y)$, azaz $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y) = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}f(x, y)$ *alakú megadása* esetén

$$(\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y)^2 = EG - F^2 = (1 + p^2)(1 + q^2) - p^2q^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

tehát formulánk így írható:

$$F = \iint_{(T)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \tag{6}$$

III°. Felületi integrálok. 1'. Legyen az $\boldsymbol{r}(u, v)$ felület T tartományhoz tartozó darabja *mérhető* F felszínű, és legyen $u(\boldsymbol{r})$ *folytonos* függvény. A felületdarabot osszuk fel ΔF_k felszínű részekre és képezzük a $\sum_k u_k \Delta F_k$ összeget (51*a*. ábra). Ezzel kapcsolatban igazolható* a következő

tétel. *Feltételeink mellett létezik a*

$$\lim_{\max \Delta F_k \to 0} \sum_k u_k \Delta F_k = \iint_{(F)} u\, dF \tag{7a}$$

jelű határérték, az $u(\boldsymbol{r})$ függvény ún. felszíni integrálja és a T tartományban

$$\iint_{(F)} u\, dF = \iint_{(T)} u\, |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv \tag{7b}$$

módon számítható ki.

51. ábra

2'. *Legyen $u(\boldsymbol{r})$ folytonos* függvény, amely az $\boldsymbol{r}(u, v)$ felületen értelmezve van. Írjunk be a felületbe egy — a szögkorlátozásoknak megfelelően finomodó — *poliédert*. Jelöljük ΔS_k-val egyik háromszöglapjának területét, u_k^*-val pedig ennek valamelyik csúcspontjában az $u(\boldsymbol{r})$ értéket.

Igazolható,** hogy

$$\lim_{\max \Delta S_k \to 0} \sum_k u_k^* \Delta S_k = \iint_{(F)} u\, dF, \tag{8}$$

vagyis *a beírt poliéderen vett szumma határértéke is a felszíni integrállal egyenlő.*

*L. pl. *Hajós* [M. 2.].
**L. pl. *Hajós* [M. 2.].

3'. Legyen az $\boldsymbol{r}(u, v)$ felület T tartományhoz tartozó darabja *mérhető* F felszínű, és legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *folytonos* függvény. A felületdarabot osszuk fel $\Delta \boldsymbol{F}_k$ felületvektorú részekre ($|\Delta \boldsymbol{F}_k|$ a rész felszíne, $\Delta \boldsymbol{F}_k$ iránya merőleges a felületrészre, $\Delta \boldsymbol{F}_k$ értelme a felületrész körüljárási értelmével jobbrendszert alkot) és képezzük a $\sum_k \boldsymbol{v}_k \Delta \boldsymbol{F}_k$ összeget (51*b*. ábra). Ezzel kapcsolatban igazolható* az alábbi

tétel. *Feltételeink mellett létezik a*

$$\lim_{\max|\Delta \boldsymbol{F}_k| \to 0} \sum_k \boldsymbol{v}_k \Delta \boldsymbol{F}_k = \iint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} \tag{9a}$$

felü határérték, a $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{r}$) *függvény ún. felületi integrálja és a* T *tartományban*

$$\iint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \iint_{(T)} \boldsymbol{v} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv \tag{9b}$$

módon számítható ki.

4'. Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *folytonos* függvény, amely, az $\boldsymbol{r}(u, v)$ felületen értelmezve van. Írjunk be a felületbe egy — a szögkorlátozásoknak megfelelően finomodó — *poliédert*. Jelöljük $\Delta \boldsymbol{S}_k$-val egyik háromszöglapjának területvektorát, $\boldsymbol{v}_k^*$-val pedig ennek valamelyik csúcspontjában a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ értékét.

Igazolható,* hogy

$$\lim_{\max|\Delta \boldsymbol{S}_k| \to 0} \sum_k \boldsymbol{v}_k^* \Delta \boldsymbol{S}_k = \iint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}, \tag{10}$$

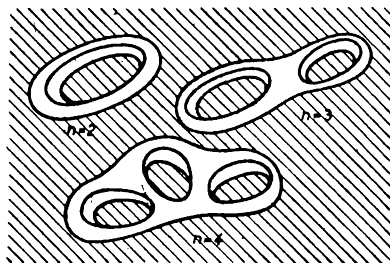
vagyis *a beírt poliéderen vett szumma határértéke is a felületi integrállal egyenlő.*

IV°. A felület különböző típusai. 1'. Legyen adva egy, a felszínszámításnál megkívánt tulajdonságú $T(u, v)$ tartomány. A nyújtás, zsugorítás, hajlítás útján (de ragasztás, szakítás nélkül) ebből származtatható felület *elemi felület*nek nevezzük.

Az említett T tartományt egy, a felszínszámításnál megkívánt tulajdonságú $\boldsymbol{r}(u, v)$ függvény elemi felületre képezi le.

Mi itt csak elemi és ilyenekből illesztéssel *összetett felület*ekkel foglalkozunk (az utóbbiaknál kikötve, hogy az illesztéseknél csak két-két felület csatlakozhatik egymáshoz).

*Zárt felület*ről beszélünk, ha nincs határvonala; ilyen pl. a teljes gömb, ellipszoid, tórusz stb. A zárt felületen páros számú lyukat végva, és ezeket páronként csőszerű felülettel összekötve, ún. többszörösen összefüggő zárt felületet kapunk; ilyen pl. a gyűrű, a 8-as, a perec stb. alakú test felülete (52. ábra).



52. ábra

* L. pl. *Hajós* [M. 2.].

*Nyílt felület*ről beszélünk, ha van határvonala; ilyen pl. a gömb-, ellipszoid-, tórusz-szelet stb. Ha a nyílt felületen lyukakat vágunk, többszörösen összefüggő nyílt felületet kapunk; ilyen pl. tésztaszűrő.

*Egyszeresen összefüggő felület*ről beszélünk, ha az bármely körülvágásnál (zárt) vagy átvágásnál (nyílt) két különálló darabra esik szét; ilyen pl. a gömb, gömbszelet stb.

*n-szeresen összefüggő felület*ről beszélünk, ha az $n-1$ alkalmas körülvágással (zárt) vagy átvágással (nyílt) egyszeresen összefüggővé tehető; pl. a félgömb 2 lyukkal 3-szorosan összefüggő.

Kétoldalú felület esetén a felület két oldala (pl. festéssel) megkülönböztethető; ilyenek az eddig példaként említett felületek.

Egyoldalú felület esetén a felület két oldala átfordul egymásba, s így (pl. festéssel) nem lehet őket megkülönböztetni; ilyen pl. az egyszeri megsodrás után összeillesztett, ún. MOEBIUS-féle szalag.

Példák és feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi felületdarabok felszínét:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}a \cos u \cos v + \boldsymbol{j}a \cos u \sin v + \boldsymbol{k}a \sin u$, teljes gömb;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(\cos u - v \sin u) + \boldsymbol{j}(\sin u + v \cos u) + \boldsymbol{k}(u + v)$, kifejthető csavarfelület egy menete, midőn $0 \leqq v \leqq 1$;

C) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} \cos v + \boldsymbol{j}u \sin v + \boldsymbol{k}v$, közönséges csavarfelület egy menete, az $x^2 + y^2 = 1$ hengeren belül;

D) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}(a + b \cos u) \cos v + \boldsymbol{j}(a + b \cos u) \sin k + \boldsymbol{k}b \sin u$, teljes tórusz $(a > b)$.

Megoldás. A $T(u, v)$ tartomány megállapítása után az

$$F = \iint\limits_{T(u\,v)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

formula alkalmazandó.

A) Az u mint földrajzi szélesség a $-\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2$, a v mint földrajzi hosszúság a $0 \leqq v \leqq 2\pi$ közön változik.

$$\boldsymbol{r}_u = -\boldsymbol{i}a \sin u \cos v - \boldsymbol{j}a \sin u \sin v + \boldsymbol{k}a \cos u,$$

$$\boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}a \cos u \sin v + \boldsymbol{j}a \cos u \cos v;$$

$$E = \boldsymbol{r}_u^2 = a_4 [\sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \cos^2 u] = a^2,$$

$$G = \boldsymbol{r}_v^2 = a^2 \cos^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) = a^2 \cos^2 u,$$

$$F = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = a^2 (\sin u \cos v \cos u \sin v - \sin u \cos u \cos v) = 0,$$

$$EG - F^2 = a^4 \cos^2 u;$$

$$F = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{2\pi} a^2 \cos u\, du\, dv = 2\pi a^2 \Big[\sin u\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4 a^2 \pi.$$

B) Az $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ egy menetnél a $0 \leqq u \leqq 2\pi$ közön változik; $0 \leqq v \leqq 1$.

$$\boldsymbol{r}_u = -\boldsymbol{i}(\sin u + v\cos u) + \boldsymbol{j}(\cos u - v\sin u) + \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}\sin u + \boldsymbol{j}\cos u + \boldsymbol{k};$$

$$E = v^2 + 2, \quad F = 2, \quad G = 2, \quad EG - F^2 = 2v^2;$$

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\, v\, du\, dv = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

C) $0 \leqq v = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} < 2\pi$, $0 \leqq u = \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 1$;

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{i}\cos v + \boldsymbol{j}\sin v, \quad \boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}u\sin v + \boldsymbol{j}u\cos v + \boldsymbol{k};$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + 1, \quad EG - F^2 = u^2 + 1;$$

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du\, dv = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du = 2\pi\int_0^{\operatorname{ar\,sh} 1} \operatorname{ch}^2 t\, dt = \pi\int_0^{\operatorname{ar\,sh} 1} (\operatorname{ch} 2t + 1)\, dt =$$

$$= \pi\left[\operatorname{sh} t\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} + t\right]_0^{\operatorname{ar\,sh} 1} = \pi\left(\sqrt{2} + \operatorname{ar\,sh} 1\right).$$

D) $0 \leqq u < 2\pi$, $0 \leqq v < 2\pi$;

$$\boldsymbol{r}_u = -\boldsymbol{i}b\sin u\cos v - \boldsymbol{j}b\sin u\sin v + \boldsymbol{k}b\cos u,$$

$$\boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}(a + b\cos u)\sin v + \boldsymbol{j}(a + b\cos u)\cos v;$$

$$E = b^2, \quad G = (a + b\cos u)^2, \quad F = 0, \quad EG - F^2 = b^2(a + b\cos u)^2;$$

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\cos u)\, du\, dv = 2\pi\left[abu + b^2\sin u\right]_0^{2\pi} = 4ab\pi^2.$$

2. Számítsuk ki az $x^2 + (y - a/2)^2 = (a/2)^2$ egyenletű egyenes körhenger, az $x^2 + y^2 = a^2 z^2/h^2$ egyenletű egyenes körkúp és az x, y sík határolta térrész teljes felszínét, alkalmas paraméterek bevezetésével.

Megoldás. A kúpfelület egyenlete $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ paraméterekkel:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}u\cos v + \boldsymbol{j}u\sin v + \boldsymbol{k}\frac{h}{a}u,$$

a hengerfelületé pedig $u = z$, $v = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ paraméterekkel:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}a\cos v\sin v + \boldsymbol{j}a\sin^2 v + \boldsymbol{k}u.$$

A vizsgált felület részei: a henger alapköre ($F_1 = a^2\pi/4$), a kúppalást egy darabja (F_2) és a hengerpalást egy darabja.

A kúppalást-darab felszínének számítása:

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{i}\cos v + \boldsymbol{j}\sin v + \boldsymbol{k}\frac{h}{a}, \quad \boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}\, u\sin v + \boldsymbol{j}\, u\cos v;$$

$$E = 1 + \frac{h^2}{a^2}, \quad F = 0, \quad G = u^2, \quad EG - F^2 = u^2\left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right);$$

rögzített v-nél $0 \leqq u \leqq a\sin v$ továbbá $0 \leqq v \leqq \pi$;

$$F_2 = \int_0^{\pi}\int_0^{a\sin v} u\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\,du\,dv = a^2\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\int_0^{\pi/2}\sin^2 v\,dv = \frac{a^2\pi}{4}\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}.$$

A hengerpalást-darab felszínének számítása:

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{i}\, a\cos 2v + \boldsymbol{j}\, a\sin 2v;$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = a^2, \quad EG - F^2 = a^2;$$

a hengeralkotók az x, y síktól a kúppalástig terjednek, vagyis

$$0 \leqq u = z \leqq \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{h}{a}\sqrt{a^2\sin^2 v\,(\cos^2 v + \sin^2 v)} = h\sin v,$$

továbbá $0 \leqq v \leqq \pi$;

$$F_3 = \int_0^{\pi}\int_0^{h\sin v} a\,du\,dv = ah\int_0^{\pi}\sin v\,dv = 2\,ah.$$

Az említett áthatási térrész teljes felszíne tehát:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{a^2\pi}{4}\left(1 + \sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right) + 2\,ah.$$

3. Mutassuk meg, hogy az

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\frac{au}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{j}\frac{av}{\sqrt{u^2+v^2}} + \boldsymbol{k}\, b\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{v}{u}$$

egyenletű felület nem mérhető felszínű.

Megoldás. A paraméter-görbék

$$\boldsymbol{r}_u = v\left[\boldsymbol{i}\frac{av}{(u^2+v^2)^{3/2}} - \boldsymbol{j}\frac{au}{(u^2+v^2)^{3/2}} - \boldsymbol{k}\frac{b}{u^2+v^2}\right],$$

$$\boldsymbol{r}_v = -u\left[\boldsymbol{i}\frac{av}{(u^2+v^2)^{3/2}} - \boldsymbol{j}\frac{au}{(u^2+v^2)^{3/2}} - \boldsymbol{k}\frac{b}{u^2+v^2}\right]$$

érintővektorai láthatóan párhuzamosak, ezért

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \sqrt{EG - F^2} \equiv 0;$$

a felület tehát valóban nem mérhető felszínű.

4. Számítsuk ki az alábbi [$z = f(x, y)$ alakú egyenlettel adott] felületek megjelölt darabjának felszínét:

A) $z = \frac{x^2}{2y}$, $0 \leqq x \leqq 1$, $1 \leqq y \leqq 2$;

B) $z = (x + y)^{3/2}$, az $x = 0$, $y = 0$ és $x + y = 3$ síkok között;

C) $z = xy$, hiperbolikus paraboloid, az $x^2 + y^2 = 4$ körhengeren belül;

D) $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$, elliptikus paraboloid, az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elliptikus hengeren belül;

E) $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid, az $x^2 + y^2 = a^2$ körhengeren belül.

Megoldás. A (6) alatt közölt

$$F = \iint\limits_{T(x,y)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

formulát alkalmazzuk.

A) $p = \frac{x}{y}$, $q = -\frac{x^2}{2y^2}$; $1 + p^2 + q^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^4}{y^4} + 1 = \left(\frac{x^2}{2y^2} + 1\right)^2$;

$$F = \int_1^2 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2y^2} + 1\right) dx\, dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{6y^2} + x\right]_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{6y^2} + 1\right) dy =$$

$$= \left[-\frac{1}{6y} + y\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{6} - 1 = \frac{13}{12}.$$

B) $0 \leqq y \leqq 3 - x$, $0 \leqq x \leqq 3$; $p = q = \frac{3}{2}(x + y)^{1/2}$;

$$F = \int_0^3 \int_0^{3-x} \sqrt{1 + \frac{9}{2}(x + y)}\, dx\, dy = \int_0^3 \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9}\left(1 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}y\right)^{3/2}\right]_0^{3-x} dx =$$

$$= \frac{4}{27} \int_0^3 \left[\left(1 + \frac{27}{2}\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{2}x\right)^{3/2}\right] dx =$$

$$= \frac{4}{27}\left[\left(1 + \frac{27}{2}\right)^{3/2} x - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9}\left(1 + \frac{9}{2}x\right)^{5/2}\right]_0^3 =$$

$$= \frac{4}{27}\left[\left(1 + \frac{27}{2}\right)^{3/2} \cdot 3 - \frac{4}{45}\left(1 + \frac{27}{2}\right)^{5/2} + \frac{4}{45}\right].$$

C) $p = y$, $q = x$; $1 + p^2 + q^2 = 1 + x^2 + y^2 = 1 + r^2$;

$$F = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\varphi = \pi \int_0^2 2r\,(1 + r^2)^{1/2}\, dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[(1 + r^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

D) Transzformáció: $x = au\cos v,\ y = bu\sin v,\ 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v < 2\pi$;

$$p = \frac{x}{a} = u\cos v,\ q = \frac{y}{b} = u\sin v;\ 1 + p^2 + q^2 = 1 + u^2;$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a\cos v & b\sin v \\ -au\sin v & b\,u\cos v \end{vmatrix} = abu;$$

$$F = ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,du\,dv = \frac{2}{3}\pi ab\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

E) $F = \frac{\pi}{6}(1 + 4a^2)^{3/2} - 1.$

5. Határozzuk meg az alábbi homogén felületdarabok súlypontját:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}a\cos u\cos v + \boldsymbol{j}a\cos u\sin v + \boldsymbol{k}a\sin u,\ 0 \leqq u \leqq \pi/2,\ 0 \leqq v \leqq \leqq \pi/2$, nyolcad gömbhéj;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\cos v + \boldsymbol{j}\,u\sin v + \boldsymbol{k}\,hv,\ 0 \leqq u \leqq a,\ 0 \leqq v \leqq \pi$, csavarfelület fél menete.

Megoldás. A homogén felületdarab súlypontjának helyzetvektora:

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\iint \boldsymbol{r}\,dF}{F} = \frac{\iint\limits_{T(u,v)} \boldsymbol{r}\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv}{\iint\limits_{T(u,v)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv}.$$

A) A teljes szimmetria miatt elegendő a súlypont egyik, pl. a $z_0 = \dfrac{\iint z\,dF}{F}$ koordinátájának kiszámítása.

Az 1. A) példa szerint

$$\sqrt{EG - F^2} = a^2\cos u;\ \text{továbbá}\ z = a\sin u,\ F = \frac{a^2\pi}{2}.$$

Ezek felhasználásával

$$z_0 = \frac{2}{a^2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a\sin u\cdot a^2\cos u\,du\,dv = \frac{a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2u\,du = \frac{a}{2},$$

és hasonlóan $x_0 = y_0 = a/2$. A súlypont helyzetvektora tehát:

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i}\frac{a}{2} + \boldsymbol{j}\frac{a}{2} + \boldsymbol{k}\frac{a}{2}.$$

B) $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{j}\dfrac{\pi h}{2}\dfrac{4}{3\pi} + \boldsymbol{k}\dfrac{c^3 - h^3}{ac + h^2\ln\dfrac{a+c}{h}}$, ahol $c = \sqrt{a^2 + h^2}$.

6. Határozzuk meg az alábbi homogén felületdaraboknak a megjelölt tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát:

A) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, au \cos v + \boldsymbol{j}\, au \sin v + \boldsymbol{k}\, hu$, $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$, körkúpfelület, a z tengelyre vonatkozólag;

B) $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\, a \cos u \cos v + \boldsymbol{j}\, a \cos u \sin v + \boldsymbol{k}\, a \sin u$, $-\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2$, $0 \leqq$ $\leqq v \leqq 2\pi$, teljes gömbhéj, egy átmérőjére, pl. a z tengelyre vonatkozólag.

Megoldás. Mindkét esetben az

$$I_z = \iint\limits_{T(u,v)} (x^2 + y^2) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

formulát alkalmazzuk.

A) $\sqrt{EG - F^2} = au\sqrt{a^2 + h^2}$, $x^2 + y^2 = a^2u^2$;

$$I_z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} a^2 u^2 \cdot au\sqrt{a^2 + h^2}\, du\, dv = 2\pi a^3 \sqrt{a^2 + h^2} \int_0^1 u^3\, du = \frac{\pi a^3}{2}\sqrt{a^2 + h^2}.$$

B) $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \cos u$, $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 u$;

$$I_z = a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^3 u\, du\, dv = 2\pi a^4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi a^4}{3}.$$

7. Számítsuk ki az alábbi felszíni integrálokat:

A) az $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} a \cos u \cos v + \boldsymbol{j} a \cos u \sin v + \boldsymbol{k} a \sin u$, $-\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2$ $0 \leqq v \leqq 2\pi$ teljes gömbfelületen $\iint dF/\varrho^n$, ahol $\varrho = |\boldsymbol{r} - c\boldsymbol{k}|$;

B) az $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i} a \cos u \cos v + \boldsymbol{j} b \cos u \sin v + \boldsymbol{k} c \sin u$, $-\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2$, $0 \leqq v < 2\pi$ teljes ellipszoidfelületen $\iint dF/\varrho$, ahol $\varrho = |\boldsymbol{r}\bar{\boldsymbol{\nu}}|$ és $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ a felületi normális egységvektor.

Útmutatás. A következő formulát alkalmazzuk:

$$I = \iint\limits_{(F)} w\, dF = \iint\limits_{T(u,v)} w \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

ahol $w = 1/\varrho^n$, illetve $w = 1/\varrho$.

A) $\varrho = \sqrt{a^2 \cos^2 u\, (\cos^2 v + \sin^2 v + a\, (\sin u - c)^2} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\, ac \sin u}$,

$$\sqrt{EG - F^2} = a^2 \cos u;$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^2 \cos u\, du\, dv}{(a^2 + c^2 - 2\, ac \sin u)^{n/2}} = \frac{2\pi a}{c\,(n-2)} \left[\frac{1}{(c-a)^{n-2}} - \frac{1}{(c+a)^{n-2}} \right], \; n \neq 2;$$

az integrálási eredményt táblázatból vettük.

B) $I = \dfrac{4\pi}{3} abc \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \right).$

8. Integráljuk az alábbi vektor függvényeket a megadott (irányított) felületdarabon:

A) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, x + \boldsymbol{j}\, y + \boldsymbol{k}\, z$, $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\,(3 + \cos u)\cos v + \boldsymbol{j}\,(3 + \cos u)\sin v + \boldsymbol{k}\sin u$, $0 \leqq u \leqq \pi$, $0 \leqq v < 2\pi$ (fél tóruszfelület);

B) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\, y + \boldsymbol{j}\, z + \boldsymbol{k}\, x$, $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{i}\cos u \cos v + \boldsymbol{j}\cos u \sin v + \boldsymbol{k}\sin u$, $0 \leqq u \leqq \pi/2$, $0 \leqq v \leqq \pi$ (fél gömbfelület);

C) $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i}\, xy + \boldsymbol{j}\, xy + \boldsymbol{k}\, z$, $z = x^2 - y^2$, $-2 \leqq x \leqq 2$, $-3 \leqq y \leqq 3$.

Megoldás. A következő formulát alkalmazzuk:

$$I = \iint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \iint_{T(u,v)} \boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{r}(u, v)]\,(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv.$$

A) $\boldsymbol{r}_u = -\boldsymbol{i}\sin u \cos v - \boldsymbol{j}\sin u \sin v + \boldsymbol{k}\cos u,$

$$\boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}\,(3 + \cos u)\sin v + \boldsymbol{j}\,(3 + \cos u)\cos v;$$

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}\,(3 + \cos u)\cos u \cos v - \boldsymbol{j}\,(3 + \cos u)\cos u \sin v - \boldsymbol{k}\,(3 + \cos u)\sin u;$$

$$\boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{r}(u, v)] = \boldsymbol{i}\,(3 + \cos u)\cos v + \boldsymbol{j}\,(3 + \cos u)\sin v + \boldsymbol{k}\sin u;$$

$$I = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [(3 + \cos u)^2 \cos u \cos^2 v + (3 + \cos u)^2 \cos u \sin^2 v + (3 + \cos u)\sin^2 u]\, du\, dv =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (9\cos u + 6\cos^2 u + \cos^3 u + 3\sin^2 u + \cos u \sin^2 u]\, du\, dv =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (3 + 10\cos u + 3\cos^2 u)\, du\, dv =$$

$$= -2\pi\left[3u + 10\sin u + \frac{3}{2}u + \frac{3}{4}\sin 2u\right]_0^{\pi} = -2\pi \cdot \frac{9}{2}\pi = -9\pi^2.$$

B) $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}\cos^2 u \cos v - \boldsymbol{j}\cos^2 u \sin v - \boldsymbol{k}\sin u \cos u,$

$$\boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{r}(u, v)] = \boldsymbol{i}\cos u \sin v + \boldsymbol{j}\sin u + \boldsymbol{k}\cos u \cos v;$$

$$I = -\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} (\cos^3 u \cos v \sin v + \cos^2 u \sin u \sin v + \cos^2 u \sin u \cos v)\, du\, dv,$$

$$I = -\frac{2}{3}.$$

C) $p = 2x$, $q = -2y$, $\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = -\boldsymbol{i}\, p - \boldsymbol{j}\, q + \boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{i}\, x + 2\boldsymbol{j}\, y + \boldsymbol{k};$

$$\boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{r}(x, y)] = -\boldsymbol{i}\, xy + \boldsymbol{j}\, xy + \boldsymbol{k}\,(x^2 - y^2);$$

$$I = \int_{-3}^{3}\int_{-2}^{2} (2x^2 y + 2xy^2 + x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_{-3}^{3}\left[\frac{2}{3}x^3 y + x^2 y^2 + \frac{x^3}{3} - xy^2\right]_{-2}^{2} dy =$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(\frac{32}{3}y + \frac{16}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\frac{16}{3}y^2 + \frac{16}{3}y - \frac{4}{3}y^3\right]_{-2}^{2} = -40.$$

c) Szemináriumi tárgykörök

α) A felületek egyes speciális kérdései

I°. Néhány nevezetes formula. Tanulmányozzuk az r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} vektorokat, illetve a $\bar{\nu}_u, \bar{\nu}_v$ vektorokat az $r_u, r_v, \bar{\nu}$ koordinátarendszerében előállító GAUSS, illetve WEINGARTEN-féle formulákat. Tárgyaljuk továbbá az E, F, G, L, M, N és u, v szerinti deriváltjaik között összefüggést szolgáltató GAUSS-féle „theoria egregium"-ot és a CODAZZI—MAINARDI-féle egyenleteket.

Ajánlott irodalom: HAJÓS (M. 2.) II. 13—14. §. — SÁRKÖZY (M. 3.) II. 43—44., 70—71. §. — BAULE (M. 12.) 21. §.

II°. Jellegzetes felületi görbék. Ismerkedjünk meg a felület ún. aszimptotikus, minimális, izotermikus, konjugált, görbületi, geodetikus görbéinek értelmezésével és főbb sajátságaival.

Ajánlott irodalom: SÁRKÖZY (M. 3.) II. 46—53. §. — HAJÓS (M. 2.) II. 15., 17. § — BAULE (M. 12.) 13. §.

III°. Teljes görbületek. GAUSS-BONNET-tétel. Tárgyaljuk a felületi görbe geodetikus görbületét, a zárt felületi görbe teljes geodetikus görbületét, a felületdarab teljes GAUSS-görbületét; a GAUSS—BONNET-tételt és alkalmazását, pl. a geodetikus háromszögre.

Ajánlott irodalom: HAJÓS (M. 2.) II. 16., 18., 19. §. — SÁRKÖZY (M. 3.) 54- 58. §. — BAULE (M. 12.) 22., 23. §.

IV°. Jellegzetes görbületű felületek. Tárgyaljuk a gyűrű-(tórusz-) felület görbületi viszonyait, tetszőleges felület gömbi pontjait, az állandó GAUSS-görbületű felületeket, az állandó közép-, illetve GAUSS-görbületű forgásfelületeket, a minimális forgásfelületet.

Ajánlott irodalom: HAJÓS (M. 2.) II. 20., 21. §. — SÁRKÖZY (M. 3.) 68., 69., 74—76. §. — BAULE (M. 12.) 17—20. §.

V°. Vonalfelületek. Sugárkongruenciák. Tárgyaljuk a vonalfelületekkel kapcsolatban a következőket: Egyenlet, alapmennyiségek. Oromvonal. Aszimptotikus vonalak. Kifejthető vonalfelületek, síkok burkolói, görbületi vonalak, kifejtés a síkba. Térgörbéhez tartozó kifejthető és nem kifejthető vonalfelületek. Példák.

A sugárkongruenciákkal kapcsolatban az alábbiak tárgyalandók: Értelmezés, alapformulák. SANNIA formulái. A felület normálisaiból álló sugárkongruencia. Határpontok és fősíkok. Gyújtópontok és gyújtófelületek. Példák.

Ajánlott irodalom: SÁRKÖZY (M. 3.) III. rész.

β) Geodéziai és kartográfiai alkalmazások

I°. A geodetikus vonal. Ezzel kapcsolatban a következőket tanulmányozzuk: Értelmezések, differenciálegyenlet, Forgásfelületek geod. vonala. Geod. párhuzamosok és paralelkoordináta-rendszerek. Geod. körök és poláris koordináta-rendszerek. A differenciálegyenlet GAUSS-féle alakja. Állandó GAUSS-görbületű felületek. Geod. háromszög teljes görbülete. Példák.

Ajánlott irodalom: SÁRKÖZY (M. 3.) 77—86.§. — BAULE (M. 12.) 13., 22., 23. §. — HAJÓS (M. 2.) II. 15—17. §.

II°. Felületek leképzése egymásra. A következők tanulmányozandók: A felületek leképzéséről általában. Területtartó leképzések: tetszőleges felületé, forgásfelületé, síké, gömbé stb. síkra. Konform leképzések: síké stb. síkra, szferoidé síkra, gömbre, szferoidra stb. Geodetikus, sztereografikus, konikus stb. leképzések. Példák.

Ajánlott irodalom: SÁRKÖZY (M. 3.) 59—67., 86—90. §. — BAULE (M. 12.) 24. §. — KÖNIG—WEISE (T. 13.) III., VI—IX. fej.

γ) A rugalmas vékony héjak elméletéből

I°. A héjelmélet alapegyenletei. Tárgyalandók: A felületelméleti vonatkozások rövid összefoglalása. Statikai, geometriai, fizikai (rugalmassági) egyenletek. Általános elméletek. A héjelmélet alapegyenletei.

Ajánlott irodalom: Гольденвеизер (T. 12.) I. rész.

II°. Feszültségi állapot a héjakban. Tárgyalandók: Feszültségek a héjakban. A koordináta-vonalak geodetikus görbülete. Egyensúly az elmozdulással szemben. Kísérő triéder. Egyensúly a héjra merőlegesen. Forgásfelület-héjak szimmetrikus terheléssel. Kúp-, henger- és gömbhéj.

Ajánlott irodalom: BAULE (M. 12.) D.

B. III.

SKALÁR-, VEKTOR- ÉS TENZORMEZŐK

3. §. VEKTORVÁLTOZÓ (HÁROM SKALÁRVÁLTOZÓ) SKALÁR- ÉS VEKTORFÜGGVÉNYE (SKALÁR- ÉS VEKTORMEZŐK)

a) A vektorváltozós függvények (a mezők) alapfogalmai

α) A skalár-vektor függvény. A skalármező

1°. A függvény és szemléltetése. 1'. **Definició.** *Az u skalárváltozót az $\boldsymbol{r}$ vektorváltozó függvény-ének mondjuk, ha valamely* (rendszerint képlet formájában megadott) *utasítással az $\boldsymbol{r} \subset T$ vektorokhoz meghatározott u skalárokat rendelünk.* Jelekkel:

$$u = u(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \subset T. \tag{1}$$

A T az origóból felrakott $\boldsymbol{r}$ vektorok végpontjai által betöltött *értelmezési tartomány.* A továbbiakban csak *egyértékű* függvényeket vizsgálunk, amelyeknél minden $\boldsymbol{r}$ vektorhoz csak egy-egy u skalár tartozik.

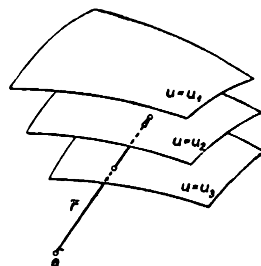
2'. *Az (1) függvény T értelmezési tartományában* minden ponthoz egy-egy skalárt rendel, azaz ott ún. *skalármezőt,* vagy *skalárteret* létesít.*

A műszaki gyakorlatban előforduló legfontosabb skalárterek: *hőfoktér, nyomástér, potenciáltér* stb.

A skalártér szemléltetése lehetséges tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pontokban az u skalárérték feltüntetésével. Ennél sokkal áttekinthetőbb szemléltetést adnak a skalártérről *az egyenlő skalárú pontok geometriai helyei, az ún. szintfelületek* (53. ábra). Ezek egyenlete nyilván

$$u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z) = \text{const.} \tag{2}$$

Az előbb említett skalárterekben a szintfelületeket rendre *izoterma, izobár, ekvipotenciális felületek* néven emlegetik.



53. ábra

3'. Az (1) skalár-vektor függvényt *homogén lineáris*nak nevezzük, ha eleget tesz az

$$u(c\,\boldsymbol{r}) = c\,u(\boldsymbol{r}) \quad \text{és} \quad u(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = u(\boldsymbol{r}_1) + u(\boldsymbol{r}_2), \tag{3a}$$

vagy összevonva az

$$u(c_1\boldsymbol{r}_1 + c_2\boldsymbol{r}_2) = c_1\,u(\boldsymbol{r}_1) + c_2\,u(\boldsymbol{r}_2) \tag{3b}$$

feltételnek.

Az ilyen függvényre igazolhatók** az alábbi ***tételek:***

Az $u(\boldsymbol{r})$ függvény akkor és csak akkor homogén lineáris, ha előállítható

$$u(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{r} \tag{4}$$

alakban, ahol $\boldsymbol{a}$ konstans vektor.

* A szövegben ez utóbbit használjuk, mert a műszaki oktatásban most még ez a szokásosabb.
** L. pl. *Hajós* [M. 2.].

Ha $u(\boldsymbol{r})$ homogén lineáris függvény, akkor az

$$u(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{r} = 0 \tag{5}$$

szintfelület az origón átmenő $\boldsymbol{a}$ normálisú sík.

II°. A skalár-vektor függvény differenciálása. 1'. A skaláranalízis mintájára az u_0 skalárt az $u(\boldsymbol{r})$ függvény $\boldsymbol{r}_0$ helyi *határértékének* mondjuk és

$$u_0 = \lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_0} u(\boldsymbol{r}) \tag{6a}$$

módon jelöljük, ha

$$|u - u_0| < \varepsilon, \text{ midőn } |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| < \delta(\varepsilon). \tag{6b}$$

Ha ezenkívül még

$$\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_0} u(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r}_0),$$

akkor az $u(r)$ függvényt az $\boldsymbol{r}_0$ helyen *folytonos*nak nevezzük.

2'. Lássuk ezek után a skalár-vektor függvény deriváltjának értelmezését!

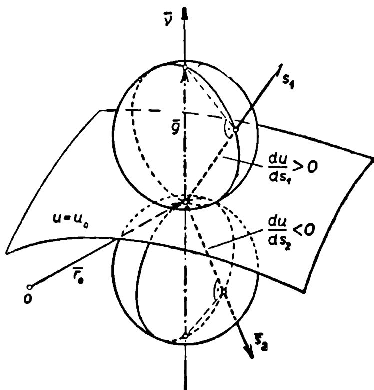
Definíció. *Az $u(\boldsymbol{r})$ függvényt az $\boldsymbol{r}_0$ helyen $\boldsymbol{r}$ szerint differenciálható-nak, a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ vektort pedig a függvény ottani $\boldsymbol{r}$ szerinti deriváltjának mondjuk, ha a függvény növekménye előállítható*

$$\Delta u = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)\Delta\boldsymbol{r} + \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}_0,\Delta\boldsymbol{r})\Delta\boldsymbol{r}, \quad \lim_{\Delta\boldsymbol{r}\to 0} \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}_0, \Delta\boldsymbol{r}) = 0 \tag{7a}$$

módon, ahol $\Delta u = u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r}_0)$, $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$. Ugyanez $\Delta\boldsymbol{r} \approx 0$ esetén, $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{dr}$ jelöléssel és $\bar{\varepsilon} \approx 0$ figyelembevételével

$$\Delta u \approx du = \boldsymbol{g}\, \boldsymbol{dr} \tag{7b}$$

alakban is írható.



54. ábra

Megjegyzendő, hogy a szokásosabb $\lim \Delta u/\Delta\boldsymbol{r}$ definíció most alkalmatlan, mivel a vektorral való osztás nincs értelmezve. Ennek ellenére a $\frac{du}{\boldsymbol{dr}}$ szimbólium is használatos a derivált jelölésére.

Kimutatható*, hogy a (7a) formula által a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ deriváltvektor — ha egyáltalán létezik — *egyértelműen* van meghatározva.

3'. Rögzített $\boldsymbol{s}^0$ egységvektorral egyirányú határátmenetnél $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}^0 \Delta s = \boldsymbol{dr} = \boldsymbol{s}^0 ds \to 0$, s így — a (7a, b)-ből — az $u(\boldsymbol{r})$ függvény $\boldsymbol{s}^0$ *rány menti deriváltj*a a $\boldsymbol{g}$-vel kifejezve

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{du}{ds} = \boldsymbol{g}\, \boldsymbol{s}^0 = |\boldsymbol{g}| \cos(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{s}^0) \tag{8a}$$

módon alakul. E formula egyszerű szerkesztési utasítást is ad, amennyiben bármely $\boldsymbol{s}^0$ iránymenti derivált értéke a $\boldsymbol{g}$ vektor előjeles vetületeként nyerhető (54. ábra).

* L. pl. *Stachó* [M. 11.].

A (8) alapján meghatározhatók a $\boldsymbol{g}$ deriváltvektor koordinátái, a $\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{s}^0\, ds$-et rendre $\boldsymbol{i}\, dx$, $\boldsymbol{j}\, dy$, $\boldsymbol{k}\, dz$ alakúnak véve:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{i}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{j}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{k}.$$

A $\boldsymbol{g}$ deriváltvektor *koordinátás alakja* végül így írható fel:

$$\boldsymbol{g} = \frac{du}{\boldsymbol{dr}} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{9a}$$

Az u három parciális deriváltjának létezése a $\boldsymbol{g}$ létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele. Igazolható* viszont, hogy *a parciális deriváltak folytonossága a deriváltvektor létezésének elégséges feltétele.*

Szokás bevezetni a *nabla* nevű, ∇ jelű és

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{10}$$

alakú differenciáloperátor-vektort. Ezzel a $\boldsymbol{g}$ nyilván

$$\boldsymbol{g} = \nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) u \tag{9b}$$

módon is előállítható. [A γ)-ban még bővebben szólunk majd a ∇-ról.]

4'. A fentiek alapján egyszerűen meghatározható a $\boldsymbol{g}$ deriváltvektornak a szintfelületekhez viszonyított iránya és értelme, valamint az irány menti deriváltakhoz viszonyított nagysága.

Ha $\boldsymbol{dr}$ az $\boldsymbol{r}_0$ ponton átmenő szintfelület ottani érintősíkjába esik, azaz $\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{dr}_t$, akkor $du = 0$ miatt — a (7b) értelmében —

$$\boldsymbol{g}\, \boldsymbol{dr}_t = 0, \quad \text{tehát} \quad \boldsymbol{g} \perp \boldsymbol{dr}_t; \tag{11a}$$

eszerint *a* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ *vektor az* $\boldsymbol{r}_0$ *helyen merőleges az e ponton átmenő szintfelületre.*

Ha $\boldsymbol{dr}$ párhuzamos a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ vektorral és a magasabb skalárú szintfelület felé mutat, azaz $\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{dr}_{n+}$, akkor $du > 0$ miatt — a (7b) értelmében —

$$\boldsymbol{g}\, \boldsymbol{dr}_{n+} > 0, \quad \text{tehát} \quad \boldsymbol{g} \text{ és } \boldsymbol{dr}_{n+} \text{ egyértelmű;} \tag{11b}$$

eszerint *a* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ *vektor az* $\boldsymbol{r}_0$ *helyen a magasabb skalárú szintfelület felé mutat.*

Végül $\cos(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{s}^\circ_{n+}) = 1$ miatt — a (8a) és a (9a) értelmében —

$$\frac{du}{ds_{n+}} = \max\left(\frac{du}{ds}\right) = |\boldsymbol{g}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}; \tag{11c}$$

eszerint *az* $\boldsymbol{r}_0$ *helyi irány menti deriváltak közül a* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ *vektor menti a legnagyobb, s nagysága éppen* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0)$ *abszolút értékével egyenlő* (54. ábra).

* L. pl. *Hajós* [M. 2.].

Az előbbi tulajdonságok alapján *a* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ *deriváltvektort az* $u(\boldsymbol{r})$ *skalártér* *g r a d i e n s-ének szokás nevezni;* jelölése:

$$\boldsymbol{g}=\frac{du}{d\boldsymbol{r}}=\nabla u=\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{12}$$

A gradiens alkalmazásával az *irány menti derivált* (8a) formulája

$$\frac{du}{ds}=\boldsymbol{s}^0\,\mathbf{grad}\,u \tag{8b}$$

alakban írható.

5'. A differenciálhatóság feltételével együtt értelemszerűen a *differenciálási szabályok* is ugyanazok, mint a skaláranalízisben:

$$\mathbf{grad}\,cu=c\,\mathbf{grad}\,u,\quad \mathbf{grad}\,(u+v)=\mathbf{grad}\,u+\mathbf{grad}\,v,$$

$$\mathbf{grad}\,uv=v\,\mathbf{grad}\,u+\mathbf{grad}\,v, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}u[\boldsymbol{r}(t)]=\mathbf{grad}\,u\cdot\dot{\boldsymbol{r}},\quad \mathbf{grad}\,u[t(\boldsymbol{r})]=\frac{du}{dt}\cdot\mathbf{grad}\,t.$$

III°. A z (e l s ő) g r a d i e n s-t é t e l. 1'. Mint tudjuk, *valamely* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *vektorfüggvény* $\boldsymbol{r}_0$ *és* $\boldsymbol{r}$ *pont között, különböző* G_i *görbék mentén vett integrálja általában függ e görbék alakjától,* azaz

$$(G_1)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}\neq(G_2)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}; \tag{14a}$$

vagy ami ugyanaz, *e görbékből képzett G zárt görbe mentén vett integrálja általában zérustól különböző,* azaz

$$(G_1)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}-(G_2)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}=(G_1)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}+(G_2)\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}_0}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}=(G)\oint\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}\neq 0. \tag{14b}$$

2'. Vizsgáljuk most a

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=\mathbf{grad}\,u(\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

módon megadható, ún. *potenciális vektorfüggvény* G_i és G menti integrálját, egyelőre feltételezve, hogy az $u(\boldsymbol{r})$ ún. *potenciálfüggvény egyértékű* a G_i görbéket magába foglaló V térrészben. Ekkor — a gradiens értelmezésének felhasználásával — írható, hogy

$$(G_i)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\mathbf{grad}\,u\,d\boldsymbol{r}=(G_i)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}du=\Big[u(\boldsymbol{r})\Big]_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}=u(\boldsymbol{r})-u(\boldsymbol{r}_0), \tag{16a}$$

vagy ami ugyanaz

$$(G)\oint\mathbf{grad}\,u\,d\boldsymbol{r}=(G)\oint du=\Big[u(\boldsymbol{r})\Big]_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_0}=0. \tag{16b}$$

Ebből következik az ún. ***(első) gradiens-tétel***:* *A V térrészben egyértékű $u(\boldsymbol{r})$ potenciálfüggvény esetén a* **grad** $u(\boldsymbol{r})$ *potenciálos vektorfüggvény V-beli görbe menti integrálja f ü g g e t l e n a görbe alakjától (csak változó végpontjától függ), vagy ami ugyanaz, zárt görbe menti integrálja z é r u s-sal egyenlő.*

3'. Lássuk most a *fordított kérdést*: milyen következménnyel jár, ha a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektorfüggvény integrálja a V térrészbeli bármely zárt görbe mentén zérussal egyenlő, azaz

$$(G)\oint \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = 0. \tag{17}$$

Ekkor — a fentebbiek szerint — írhatjuk, hogy

$$(G_1)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = (G_2)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r}_0),$$

következésképpen

$$\delta u = u(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\delta\boldsymbol{r}.$$

Ebből — a gradiens értelmezése szerint — nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, u. \tag{1}$$

Igaz tehát az alábbi ***fordított tétel:*** *Ha a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vek o-függvény integrálja a V térrészben bármely zárt görbe mentén zérussal egyenlő, akkor e térrészben $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ valamely egyértékű $u(\boldsymbol{r})$ potenciálfüggvénynek g r a d i e n s-e.*

4'. Fontos megjegyezni, hogy a **grad** $u(\boldsymbol{r})$ egyértékűségéből csak *egyszeresen összefüggő tartományban* következik biztosan az $u(\boldsymbol{r})$ egyértékűsége, többszörösen összefüggő tartományban azonban már nem.

Kétszeresen összefüggő tartományban — pl. tórusz belsejében — bármely, belső pontra nem zsugorítható G zárt görbe mentén egyszer, pozitív értelemben integrálva az egyértékű **grad** u-t, a

$$(G)\oint \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} = \Gamma = \text{const}$$

eredményt, $|k|$-szer, sign k értelemben integrálva, a

$$(G)\oint \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} = k\,\Gamma \tag{19}$$

eredményt kapjuk, ahol Γ az ún. *ciklikus állandó*. Ui. a tóruszt egy *átvágás*sal egyszeresen összefüggővé téve, a G és a G' zárt görbe mentén egyszer pozitív értelemben vett integrál között az

$$(G)\oint - (G')\oint + (l)\int - (l)\int = (G)\oint - G'\oint = 0$$

összefüggés adódik, ahonnan

$$(G)\oint = (G')\oint = \Gamma = \text{const, q. e. d.}$$

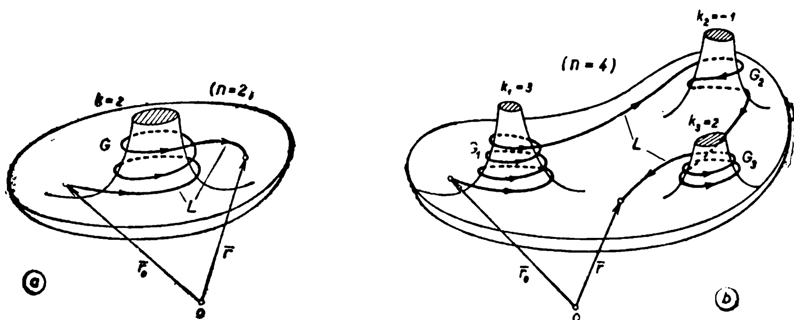
* A (második) gradiens-tételt l. a 3. §. b) β) pontban.

Integráljuk most a **grad** u-t tórusz belsejének $\boldsymbol{r}_0$ és $\boldsymbol{r}$ pontjai között, tetszőleges görbe ($C = L + k\,G$) mentén; az így nyert

$$u(\boldsymbol{r})_C - u(\boldsymbol{r}_0)_C = (C)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} = (L)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} + k\,\Gamma \qquad (20)$$

függvény már *a C görbe alakjától* (pontosabban az általa meghatározott k körüljárási indextől) *függő többértékű, ún.* c i k l i k u s   p o t e n c i á l (55a. ábra).

A ciklikus potenciál valamely *egyértékű ágának* kiválasztása céljából rögzítjük a körüljárások számát és értelmét (vagyis a k körüljárási indexet), majd a tórusz-tartományt egy *átvágás*sal egyszeresen összefüggővé tesszük; ebben $u(\boldsymbol{r})$ egyértékű lesz, mégpedig az átvágásnál $\pm\,\Gamma$ *ugrás*sal, az áthaladás irányától függően.



55. ábra

5′. A fentebbiek értelemszerűen *n-szeresen összefüggő tartományra* is általánosíthatók. Ekkor a *ciklikus potenciál*

$$u(\boldsymbol{r})_C - u(\boldsymbol{r}_0)_C = (C)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} = (L)\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} + \sum_{i=1}^{n-1} k_i \Gamma_i \qquad (21a)$$

alakú, ahol k_i az i-edik lyuk körüljárási indexe,

$$\Gamma_i = (G_i)\oint \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} \qquad (21b)$$

pedig ciklikus állandója (55b. ábra).

P é l d á k   é s   f e l a d a t o k

1. Állapítsuk meg az alábbi skalárterekkel kapcsolatban a szintfelületek jellegét, az adott $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ ponthoz tartozó skalárértékeket és ezek különbségét:

A) $u = 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1/r,\quad \boldsymbol{r}_1(1, 0, 0),\quad \boldsymbol{r}_2(3, 4, 0)$;

B) $u = z - x^2 - y^2\quad \boldsymbol{r}_1(1, 1, 0),\quad \boldsymbol{r}_2(2, 2, 1)$;

C) $u = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9},\quad \boldsymbol{r}_1(2, 3, 1),\quad \boldsymbol{r}_2(4, 6, 2)$;

D) $u = x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9},\quad \boldsymbol{r}_1(10, 4, -3),\quad \boldsymbol{r}_2(11, -2, 3)$.

Ábrázoljuk e skalárterek néhány szintfelületét!

Megoldás. A szintfelület-sereg egyenlete: $u(\boldsymbol{r}) = C$, egyes szintfelületeké pedig: $u(\boldsymbol{r}) = C_1$, $u(\boldsymbol{r}) = C_2$ s. í. t. Az $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ pontbeli skalárértékek: $u(\boldsymbol{r}_1)$, $u(\boldsymbol{r}_2)$.

$$\text{A)}\ u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C > 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{C^2}, \quad O(0, 0, 0)$$

középpontú, $R = 1/C$ sugarú gömbsereg;

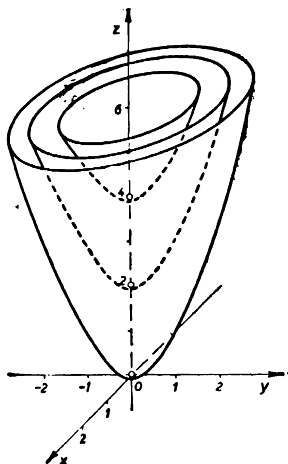
$$C_1 = 1: \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad C_2 = 2: \ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4};$$

$$u(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{\sqrt{1^2}} = 1, \quad u(\boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}, \quad \Delta u = u(\boldsymbol{r}_2) - u(\boldsymbol{r}_1) = -\frac{4}{5}.$$

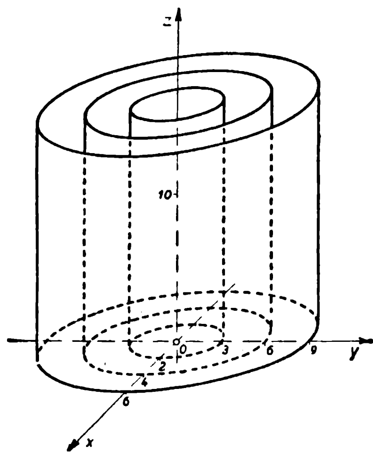
B) $u = z - x^2 - y^2 = C$, $z = x^2 + y^2 + C$, forgási paraboloid sereg;

$C_1 = 0$: $z = x^2 + y^2$, $C_2 = 2$: $z = x^2 + y^2 + 2$, $C_3 = 4$: $z = x^2 + y^2 + 4$ (56. ábra);

$$u(\boldsymbol{r}_1) = -1^2 - 1^2 = -2, \quad u(\boldsymbol{r}_2) = -2^2 - 2^2 + 1 = -7, \quad \Delta u = -5.$$



56. ábra



57. ábra

C) $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = C > 0$, $\frac{x^2}{(2\sqrt{C})^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{C})^2} = 1$, $a = 2\sqrt{C}$ és $b = 3\sqrt{C}$ féltengelyű elliptikus hengersereg;

$C_1 = 1$-nél $a = 2$, $b = 3$, $C_2 = 4$-nél $a = 4$, $b = 6$ (57. ábra); $u(\boldsymbol{r}_1) = 2$, $u(\boldsymbol{r}_2) = 8$

D) $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = C > 0$, $\frac{x^2}{(\sqrt{C})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{C})^2} + \frac{z^2}{(3\sqrt{C})^2} = 1$; O(0, 0, 0)

középpontú, $a = \sqrt{C}$, $b = 2\sqrt{C}$, $c = 3\sqrt{C}$ féltengelyű ellipszoid-sereg; $C_1 = 1$-nél $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $C_2 = 4$-nél $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$; $u(\boldsymbol{r}_1) = 105$, $u(\boldsymbol{r}_2) = 123$.

2. Állapítsuk meg az alábbi skalárterek gradiens-vektorterét:

A) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} = r^n$; B) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \ln r$;
C) $u = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\, r^n$; D) $u = 7 \cos r^2$; E) $u = 2xy^2 - 3y^2 z^3$.

Megoldás. Az $u = u(\boldsymbol{r})$ skalártér gradiens-vektortere:

$$\operatorname{grad} u(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial z} \left[= \frac{du(\boldsymbol{r})}{d\boldsymbol{r}} \right].$$

Felhasználandók az $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ függvény

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

parciális deriváltjai.

A) $$\operatorname{grad} r^n = n \cdot r^{n-1}\left(\boldsymbol{i}\frac{x}{r} + \boldsymbol{j}\frac{y}{r} + \boldsymbol{k}\frac{z}{r} \right) = nr^{n-2}\,\boldsymbol{r},$$

vagy direkt, $\boldsymbol{r}$ szerinti deriválással

$$\frac{d}{d\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}^2)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}(\boldsymbol{r}^2)^{\frac{n-2}{2}} \cdot 2\,\boldsymbol{r} = n(\boldsymbol{r}^2)^{\frac{n-2}{2}}\,\boldsymbol{r} = nr^{n-2} \cdot \boldsymbol{r}.$$

Speciálisan $n = 1$ esetén $\operatorname{grad} u = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{r}^0$,

$n = 2$ esetén $\operatorname{grad} u = 2\boldsymbol{r}$,

$n = -1$ esetén $\operatorname{grad} u = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2}$.

Ez utóbbi — a faktortól eltekintve — a nehézségi és elektromos potenciáltér esete.

B) $$\operatorname{grad} \ln r = \frac{1}{r}\left(\boldsymbol{i}\frac{x}{r} + \boldsymbol{j}\frac{y}{r} + \boldsymbol{k}\frac{z}{r} \right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \frac{\boldsymbol{r}^0}{r},$$

vagy direkt deriválással

$$\frac{d}{d\boldsymbol{r}}\left(\ln\sqrt{\boldsymbol{r}^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{r}^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{r}^2}} \cdot 2\,\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \frac{\boldsymbol{r}^0}{r}.$$

C) Direkt módszerrel

$$\frac{d}{d\boldsymbol{r}}\left[(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\left(\sqrt{\boldsymbol{r}^2}\right)^n\right] = \boldsymbol{a}\left(\sqrt{\boldsymbol{r}^2}\right)^n + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) \cdot n\left(\sqrt{\boldsymbol{r}^2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{r}^2}} \cdot 2\,\boldsymbol{r} =$$

$$= \boldsymbol{a}\, r^n + \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) \cdot n\, r^{n-2}.$$

Ellenőrizzük az eredményt koordinátás módszerrel!

D) $\operatorname{grad}(7 \cos \boldsymbol{r}^2) = -7 \sin \boldsymbol{r}^2 \cdot 2\boldsymbol{r} = -14\,\boldsymbol{r} \sin \boldsymbol{r}^2$;

E) $\operatorname{grad} u = 2\boldsymbol{i}\,y^2 + \boldsymbol{j}(4xy - 6yz^3) - 9\boldsymbol{k}\,y^2z^2$.

3. Számítsuk ki az alábbi skalárterek gradiensét, a megjelölt irányban vett deriváltját és a legnagyobb iránymenti deriváltat — a megadott helyen:

A) $u = \frac{90}{r}$, $\boldsymbol{r}_0 = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$;

B) $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$;

C) $u = xy^3 - 2e^x + \sin z$, $\boldsymbol{r}_0 = 2\boldsymbol{j} + \pi\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{s}_1 = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}$.

Megoldás. A keresett gradiens és irány menti derivált:

$$(\mathrm{grad}\, u)_0 = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0, \quad \left(\frac{du}{ds}\right)_0 = (\mathrm{grad}\, u)_0\, \boldsymbol{s}^0.$$

A) $$\mathrm{grad}\, u = -90\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad (\mathrm{grad}\, u)_0 = -90\frac{2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\left(\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}\right)^3} =$$

$$= -\frac{10}{3}(2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}), \quad |(\mathrm{grad}\, u)_0| = \max\left(\frac{du}{ds}\right)_0 = \frac{10}{3}\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 10.$$

$$\left(\frac{du}{ds_1}\right)_0 = -\frac{10}{3}(2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \cdot \frac{1}{3}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}) = -\frac{10}{9}(2 + 4 - 2) = -\frac{40}{9} < 10,$$

$$\left(\frac{du}{ds_2}\right)_0 = -\frac{10}{3}(2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{18}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) = -\frac{10}{3\sqrt{18}}(2 + 2 - 4) = 0.$$

Ez utóbbi eredmény értelmében $(\mathrm{grad}\, u)_0 \perp \boldsymbol{s}_2$, vagyis $\boldsymbol{s}_2$ párhuzamos az $\boldsymbol{r}_0$ ponton átmenő, $u = 30$ skalárú szintfelület $\boldsymbol{r}_0$-beli érintősíkjával.

B) $$\mathrm{grad}\, u = 2\boldsymbol{i}\, x + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\, y + \frac{2}{9}\boldsymbol{k}\, z, \quad (\mathrm{grad}\, u)_0 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k},$$

$$\max\left(\frac{du}{ds}\right)_0 = \sqrt{4 + 1 + \frac{4}{9}} = \frac{7}{3},$$

$$\left(\frac{du}{ds_1}\right)_0 = \left(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = \frac{6}{\sqrt{14}}.$$

C) $$(\mathrm{grad}\, u)_0 = 6\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}, \quad \max\left(\frac{du}{ds}\right)_0 = \sqrt{37}, \quad \left(\frac{du}{ds_1}\right)_0 = \frac{6}{13}.$$

4. Határozzuk meg az alábbi skalárterek $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő szintfelületének ottani érintősíkját:

A) $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$; B) $u = \ln r$.

Megoldás. A keresett érintősík egyenlete:

$$(\mathbf{grad}\, u)_0 (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

A) $u_0 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}$, $(\mathbf{grad}\, u)_0 = \boldsymbol{i}\frac{2\,x_0}{a^2} + \boldsymbol{j}\frac{2\,y_0}{b^2} + \boldsymbol{k}\frac{2\,z_0}{c^2}$;

$$\frac{x_0}{a^2}(X - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(Y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(Z - z_0) = \frac{x_0}{a^2}X + \frac{y_0}{b^2}Y + \frac{z_0}{c^2}Z - u_0 = 0.$$

B) $u_0 = \ln r_0$, $(\mathbf{grad}\, u)_0 = \frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^2}$, $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$;

$$\frac{x_0}{r_0^2}(X - x_0) + \frac{y_0}{r_0^2}(Y - y_0) + \frac{z_0}{r_0^2}(Z - z_0) = 0, \quad x_0 X + y_0 Y + z_0 Z - r_0^2 = 0.$$

5. Integráljuk az alábbi $u(\boldsymbol{r})$ skalárterek gradiensét a megjelölt $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ pont között, a megadott görbék mentén és mutassunk rá, hogy az eredmény az $u(\boldsymbol{r}_2) - u(\boldsymbol{r}_1)$ növekménnyel egyenlő:

A) $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$; $\boldsymbol{r}_1(1, 2, 3)$, $\boldsymbol{r}_2(3, 4, 3)$; $\boldsymbol{r}_{\mathrm{I}}(t) = \boldsymbol{i}(1 + 2t) + \boldsymbol{j}(2 + 2t) +$ $3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{II}}(t) = \boldsymbol{i}(1 + 2t^2) + \boldsymbol{j}(2 + t + t^2) + \boldsymbol{k}(3 - t + t^2)$, $0 \leqq t \leqq 1$;

B) $u = r^2$; $\boldsymbol{r}_1(a, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}_2(a, 0, h)$;

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i}\, a\cos t + \boldsymbol{j}\, a\sin t + \frac{h}{2\pi}t, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi.$$

C) $u = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}^2$; $\boldsymbol{r}_1(0, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}\,t$, $0 \leqq t \leqq 1$.

Megoldás. Az (első) gradiens-tétel értelmében

$$(G) \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{grad}\, u)_G\, \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt = u(\boldsymbol{r}_2) - u(\boldsymbol{r}_1).$$

A) $\mathbf{grad}\, u = 2\boldsymbol{i}x + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\,y + \frac{2}{9}\boldsymbol{k}\,z$,

$$(\mathbf{grad}\, u)_{G\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{i}(1 + 2t) + \boldsymbol{j}(1 + t) + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{I}}(t) = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j};$$

$$(G_{\mathrm{I}}) \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{r} = \int_0^1 [2(1 + 2t)\cdot 2 + (1 + t)\cdot 2]\, dt =$$

$$= \int_0^1 (6 + 10t)\, dt = \Big[6t + 5t^2\Big]_0^1 = 11;$$

$$(\mathbf{grad}\, u)_{G\mathrm{II}} = 2\boldsymbol{i}(1 + 2t^2) + \frac{1}{2}\boldsymbol{j}(2 + t + t^2) + \frac{2}{9}\boldsymbol{k}(3 - t + t^2),$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{II}}(t) = 4\boldsymbol{i}t + \boldsymbol{j}(1 + 2t) + \boldsymbol{k}(-1 + 2t);$$

$$(G_{II}) \int_{r_1}^{r_2} \operatorname{grad} u \, d\mathbf{r} = \int_0^1 \Big[(1 + 2t^2) \cdot 4t + \frac{1}{2}(2 + t + t^2) \cdot (1 + 2t) +$$

$$+ \frac{2}{9}(3 - t + t^2) \cdot (-1 + 2t)\Big] dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{217}{18} t + \frac{5}{6} t^2 + \frac{157}{9} t^3\right) dt =$$

$$= \left[\frac{1}{3} t + \frac{217}{36} t^2 + \frac{5}{18} t^3 + \frac{157}{36} t^4\right]_0^1 = \frac{396}{36} = 11.$$

Mindkét eredmény megegyezik az

$$u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1) = \left(3^2 + \frac{4^2}{4} + \frac{3^2}{9}\right) - \left(1 + \frac{2^2}{4} + \frac{3^2}{9}\right) = 14 - 3 = 11$$

növekménnyel.

B) $\operatorname{grad} u = 2\mathbf{r}$, $(\operatorname{grad} u)_G = 2\mathbf{i}\, a \cos t + 2\mathbf{j}\, a \sin t + \mathbf{k} \frac{h}{\pi} t,$

$$(G) \int \operatorname{grad} u \, d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left[2\, a \cos t \cdot (-\, a \sin t) + 2a \sin t \cdot a \cos t + \frac{h}{\pi} t \cdot \frac{h}{2\pi}\right] dt =$$

$$= \frac{h^2}{2\,\pi^2} \int_0^{2\pi} t \, dt = \frac{h^2}{4\,\pi^2} \left[t^2\right]_0^{2\pi} = h^2;$$

$$u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{r}_1) = (a^2 + h^2) - a^2 = h^2, \text{ q. e. d.}$$

C) $\operatorname{grad} u = \mathbf{a}\, r^2 + 2\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a}\,\mathbf{r}) \cdot (\operatorname{grad} u) = \mathbf{a}(t^2\, \mathbf{a}^2) + 2t\, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}\, t\, \mathbf{a}) = 3\, t^2\, a^2\, \mathbf{a},$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}, \quad 0 \leqq t \leqq 1;$$

$$(G) \int \operatorname{grad} u \, d\mathbf{r} = 3 \int_0^1 t^2\, a^2\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \, dt = 3\, a^4 \int_0^1 t^2 \, dt = a^4;$$

$$u(\mathbf{r}_2) - u(\mathbf{v}_1) = (\mathbf{a}\mathbf{a})\, a^2 - (\mathbf{a}\, 0)\, 0 = a^4, \quad \text{q. e. d.}$$

6. Integráljuk az $u = z + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ többértékű skalárfüggvény gradiensét az $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i}\, a \cos t + \mathbf{j}\, a \sin t + \mathbf{k} \frac{h}{2\pi} t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$ csavarvonalból és $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}\, a + \mathbf{k}\, z$, $h \geqq z \geqq 0$ egyenesből álló zárt görbe mentén.

Megoldás. Az $u(\mathbf{r})$ többértékűsége miatt várható, hogy

$$(G) \oint \operatorname{grad} u \, d\mathbf{r} \neq 0.$$

$\operatorname{grad} u = -\, \mathbf{i} \frac{y}{x^2 + y^2} + \mathbf{j} \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathbf{k}$, $(\operatorname{grad} u)_{G_1} = -\, \mathbf{i} \frac{1}{a} \sin t +$ $+ \mathbf{j} \frac{1}{a} \cos t + \mathbf{k}$, $(\operatorname{grad} u)_{G_2} = \mathbf{j} \frac{1}{a} + \mathbf{k}$; $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = -\, \mathbf{i}\, a \sin t + \mathbf{j}\, a \cos t + \mathbf{k} \frac{h_1}{2\pi}$, $\dot{\mathbf{r}}_2(z) = \mathbf{k}$. Egyszeri (pozitív) körüljárással

$$(G_1 + G_2) \oint \mathbf{grad}\, u\, d\mathbf{r} = \int\limits_{t=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{a} \sin t \cdot a \sin t + \frac{1}{a} \cos t \cdot a \cos t + \frac{h}{2\pi} \right) dt +$$

$$+ \int\limits_{z=h}^{0} 1 \cdot dz = \int\limits_{t=0}^{2\pi} \left(1 + \frac{h}{2\pi} \right) dt + \Big[z \Big]_h^0 = (2\pi + h) - h = 2\pi \neq 0.$$

Jelen esetben e $\Gamma = 2\pi$ érték a ciklikus potenciál. Az integrál értéke a fentebbi $G = G_1 + G_2$ zárt görbe n-szeri körüljárása és a G_1 ív $(0, t)$ szakaszának egyszeri befutása esetén

$$(n\,G + G_{1t}) \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}} \mathbf{grad}\, u\, d\mathbf{r} = 2\pi\, n + \left(1 + \frac{h}{2\pi} \right)$$

β) A vektor-vektor függvény. A vektormező

1°. A függvény és szemléltetése. 1'. ***Definíció.*** *A $\boldsymbol{v}$ vektorváltozót az $\boldsymbol{r}$ vektorváltozó függvényének mondjuk, ha valamely* (rendszerint képlet formájában megadott) *utasítással az $\boldsymbol{r} \subset T$ vektorokhoz meghatározott $\boldsymbol{v}$ vektorokat rendelünk.* Jelekkel:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \subset T, \tag{1a}$$

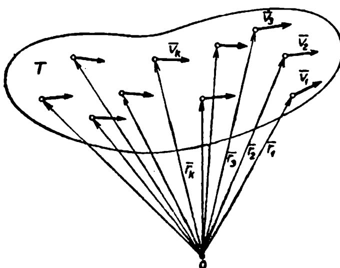
ahol T az origóból felrakott $\boldsymbol{r}$ vektorok végpontjai által betöltött *értelmezési tartomány*. A továbbiakban csak *egyértékű* függvényeket vizsgálunk, amelyeknél minden $\boldsymbol{r}$ vektorhoz csak egy-egy $\boldsymbol{v}$ vektor tartozik.

Az (1a) vektorfüggvény egyenértékű az

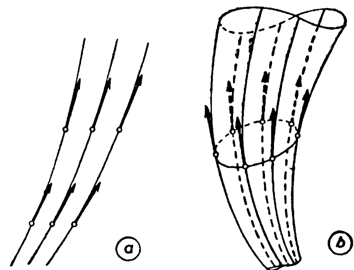
$$u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z); \quad (x, y, z) \subset T \tag{1b}$$

skalár függvényrendszerrel.

2'. *Az* (1) *függvény T értelmezési tartományában* minden ponthoz egy-egy vektort rendel, azaz ott *ún.* ***vektormezőt,*** vagy *vektorteret* létesít* (58. ábra).



58. ábra



59. ábra

A műszaki gyakorlatban előforduló legfontosabb vektorterek: *sebességtér, nehézségi, elektromos, mágneses erőtér, feszültségtér, elmozduléstér* stb.

A vektortér szemléltetése lehetséges tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pontokban a $\boldsymbol{v}$ vektor felrakásával. Ennél sokkal áttekinthetőbb szemléltetést adnak a vektortérről *a $\boldsymbol{v}$ vektorok*

* A szövegben — a jelenlegi műszaki oktatási gyakorlatnak megfelelően — ez utóbbit használjuk.

érintőgörbéi, az ún. v e k t o r v o n a l a k vagy térvonalak* (59a. ábra). Ezek egyenlete nyilván

$$\boldsymbol{dr} \times \boldsymbol{v} = 0, \quad \text{vagyis} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \tag{2}$$

ahol u, v, w a $\boldsymbol{v}$ vektor koordinátái.

Valamely zárt görbére illeszkedő vektorvonalak ún. v e k t o r c s ö-vet alkotnak (59b. ábra).

3′. Az (1a) vektor-vektor függvények között — mind geometriai, mind műszaki szempontból — fontos szerepet játszanak a *homogén lineárisak*. Ezek tárgyalását azonban a 4. §-ra kell halasztanunk, mert — az $y = ax$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\,t$, $u = \boldsymbol{a}\boldsymbol{r}$ alakok mintájára nyerhető —

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{r} \tag{3}$$

alakban az $\boldsymbol{A}$ tényező ún. tenzormennyiségnek bizonyul.

II°. A v e k t o r-v e k t o r f ü g g v é n y d i f f e r e n c i á l á s a. 1′. A skaláranalízis mintájára a

$$\boldsymbol{v}_0 = \lim_{\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{4a}$$

határérték létezik, ha

$$|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0| < \varepsilon, \quad \text{midőn} \quad |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| < \delta(\varepsilon). \tag{4b}$$

Ha ezenkívül még

$$\lim_{\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0),$$

akkor a függvény az $\boldsymbol{r}_0$ helyen *folytonos*.

Lássuk most a vektor-vektor függvény deriváltjának értelmezését!

Definíció. *A $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvényt az $\boldsymbol{r}_0$ helyen $\boldsymbol{r}$ szerint d i f f e r e n c i á l h a t ó-nak, a $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_0)$ mennyiséget pedig a függvény ottani $\boldsymbol{r}$ szerinti deriváltjának mondjuk, ha a függvény növekménye előállítható*

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_0)\,\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0, \Delta\boldsymbol{r})\,\Delta\boldsymbol{r}, \quad \lim_{\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \Delta\boldsymbol{r}) = 0 \tag{5a}$$

módon, ahol $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0)$, $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$. Ugyanez $\Delta\boldsymbol{r} \approx 0$ esetén, $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{dr}$ jelöléssel és $\boldsymbol{E} \approx 0$ figyelembevételével

$$\Delta\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{dv} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{dr} \tag{5b}$$

alakban is írható.

Megjegyzendő, hogy a szokásosabb $\lim \Delta\boldsymbol{v}/\Delta\boldsymbol{r}$ definíció most nem használható, mivel a vektorral való osztás nincs értelmezve. Ennek ellenére a $\dfrac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dr}}$ szimbólum is használatos a derivált jelölésére.

Kimutatható**, hogy a (7a) által értelmezett $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_0)$ derivált — ha egyáltalán létezik — *egyértelműen* van meghatározva.

A $\boldsymbol{D}$ derivált behatóbb vizsgálatát a 4. §-ra kell halasztanunk, mert ez — az $\boldsymbol{E}$-vel együtt — ún. tenzormennyiség; a $\boldsymbol{D}$-t deriválttenzornak fogjuk nevezni.

* Oroszul векторные линии, németül Feldlinien.

** L. pl. *Hajós* [M. 2.].

3'. Rögzített $\boldsymbol{s}^0$ egységvektorral egy irányú határmenetnél $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}^0 \Delta s = d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}^0 ds \to 0$, s így — a (7a, b)-ből — a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény *irány menti deriváltja* a $\boldsymbol{D}$-vel kifejezve

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta s} = \frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{s}^0 \tag{6}$$

módon alakul.

Ugyanezt — a ∇ differenciáloperátor-vektor bevezetésével —

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = \boldsymbol{i}\frac{du}{ds} + \boldsymbol{j}\frac{dv}{ds} + \boldsymbol{k}\frac{dw}{ds} = \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{s}^0 \operatorname{\mathbf{grad}} u) + \boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{s}^0 \operatorname{\mathbf{grad}} v) + \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{s}^0 \operatorname{\mathbf{grad}} w) =$$

$$= \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{s}^0 \nabla)\,u + \boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{s}^0 \nabla)\,v + \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{s}^0 \nabla)\,w = (\boldsymbol{s}^0 \nabla)\,(\boldsymbol{i}u + \boldsymbol{j}v + \boldsymbol{k}w) = (\boldsymbol{s}^0 \nabla)\,\boldsymbol{v} \tag{7a}$$

módon, vagyis az

$$(\boldsymbol{s}^0 \nabla) = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial}{\partial z} \tag{7b}$$

skalár differenciáloperátor segítségével is ki lehet fejezni.* Ha az $\boldsymbol{s}$ irányvektor nem egységvektor, akkor a (7a)

$$\boldsymbol{s}\frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = (\boldsymbol{s}\,\nabla)\,\boldsymbol{v} = \left(s_x\frac{\partial}{\partial x} + s_y\frac{\partial}{\partial y} + s_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}\,u + \boldsymbol{j}\,v + \boldsymbol{k}\,w) =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(s_x\frac{\partial u}{\partial x} + s_y\frac{\partial u}{\partial y} + s_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(s_x\frac{\partial v}{\partial x} + s_y\frac{\partial v}{\partial y} + s_z\frac{\partial v}{\partial z}\right) +$$

$$+ \boldsymbol{k}\left(s_x\frac{\partial w}{\partial x} + s_y\frac{\partial w}{\partial y} + s_z\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{7c}$$

alakot ölt, ahol $\boldsymbol{s} = s\,\boldsymbol{s}^0 = \boldsymbol{i}\,s_x + \boldsymbol{j}\,s_y + \boldsymbol{k}\,s_z = s\,(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma)$.

4'. Ha speciálisan az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, egységvektort választjuk $\boldsymbol{s}^0$ irányvektornak, akkor — a (8) és a (9a) alapján — rendre a

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{i}\,\nabla)\,\boldsymbol{v}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{j} = (\boldsymbol{j}\,\nabla)\,\boldsymbol{v}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{k}\,\nabla)\,\boldsymbol{v}$$

irány menti deriváltakhoz jutunk. Szokás szerint e vektorok koordinátáit — oszloponként — az alábbi táblázatba foglaljuk:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}; \tag{8}$$

ezt később a derivválttenzor mátrixának fogjuk nevezni.

* L. pl. Кочин [M. 8.] 125. o.

Igazolható, hogy a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha az $u(\boldsymbol{r})$, $v(\boldsymbol{r})$, $w(\boldsymbol{r})$ skalár-vektor függvények gradiensei léteznek.

4'. Végül megemlítjük a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény két nevezetes deriváltalakzatát. Az egyiket, a (8) táblázat főátlóbeli elemeinek összegét *a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér d i v e r g e n c i á-já*nak nevezzük és div $\boldsymbol{v}$-vel jelöljük, tehát

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{9a}$$

Ugyanez — az *α)* II° 3'-ben bevezetett ∇ differenciáloperátor-vektor segítségével — nyilván

$$\nabla \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}\, u + \boldsymbol{j}\, v + \boldsymbol{k}\, w) \tag{9b}$$

módon is előállítható.

A másik nevezetes deriváltalakzatot, *a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér r o t á c i ó-já*nak nevezett és **rot** $\boldsymbol{v}$-vel jelölt vektort a (8) táblázat főátlón kívüli elemeiből képezzük,

$$\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{10a}$$

alakban. Ugyanez — a ∇ segítségével — nyilván

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}\, u + \boldsymbol{j}\, v + \boldsymbol{k}\, w) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \tag{10b}$$

módon is előállítható.

Példák és feladatok

1. Jellemezzük és szemléltessük az alábbi vektortereket:

$$\text{A)}\ \boldsymbol{v} = -c^2\boldsymbol{k};\quad \text{B)}\ \boldsymbol{v} = c\,\boldsymbol{r};\quad \text{C)}\ \boldsymbol{v} = c\frac{\boldsymbol{r}}{r^3};\quad \text{D)}\ \boldsymbol{v} = r^n\boldsymbol{r};\quad \text{E)}\ \boldsymbol{v} = \overline{\omega}\times\boldsymbol{r};$$

$$\text{F)}\ \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}^2};\quad \text{G)}\ \boldsymbol{v} = c^2\frac{\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}}{(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r})^2}.$$

Megoldás. **A)** A $\boldsymbol{v}$ vektorok állandó (c^2) nagyságúak, a $\boldsymbol{k}$ vektorral egyenlő irányúak és ellenkező értelműek. E vektortér homogénnak nevezhető.

Ilyennek tekinthető pl. a nehézségi erőtér a Föld-felület (síknak vehető) kis darabja fölött kis magasságig; ekkor $c^2 = g$ és $\boldsymbol{v} = -g\boldsymbol{k}$ a Föld tömegegységre gyakorolt vonzóereje (60. ábra).

B) A $\boldsymbol{v}$ vektorok az $\boldsymbol{r} = \overline{OP}$ helyzetvektorokkal egyenlő irányúak és $c > 0$ esetén vele egyenlő, $c < 0$ esetén vele ellenkező értelműek; $v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{c^2 \boldsymbol{r}^2} = |c|r$, vagyis a $\boldsymbol{v}$ vektorok az O középpontú, r sugarú gömbfelület pontjaiban egyenlő nagyságúak. E vektorteret radiálisnak vagy szférikusnak nevezhetjük.

60. ábra

Ha $\boldsymbol{v}$ folyadék sebességvektora lenne, akkor az említett gömbfelületen időegység alatt átömlő folyadék térfogata $Q = vF_g = cr \cdot 4r^2\pi = 4\pi c r^3$ módon az r sugár köbével lenne arányos; ilyen sebességteret nyilván csak bizonyos térbeli forrás-, illetve nyelő-eloszlással lehetne megvalósítani.

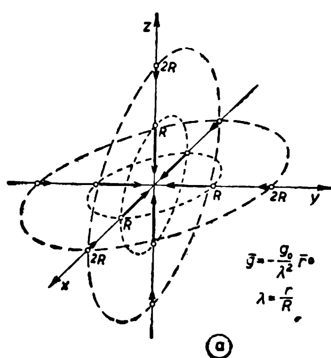
C) Ez szintén radiális (szférikus) vektortér, mégpedig $c > 0$ esetén az O-ból kifelé, $c < 0$ esetén pedig az O felé mutató, továbbá $|\boldsymbol{v}| = |c|/r^2$. Ilyen vektortér pl. a gömb alakúnak tekintett Föld nehézségi erőtere:

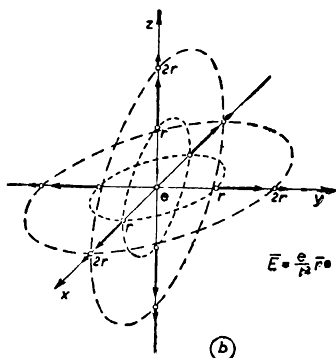
$$\boldsymbol{g} = -\varkappa \frac{M \cdot 1}{r^2} \boldsymbol{r}^0 = -\varkappa \frac{M}{R^2 \lambda^2} \boldsymbol{r}^0 = -\frac{g_0}{\lambda^2} \boldsymbol{r}^0$$

ahol R a Föld sugara, g_0 a nehézségi gyorsulás a Föld felületén (61a. ábra); ilyen továbbá a gömbszerű töltés elektrosztatikai tere:

$$\boldsymbol{E} = +\frac{e \cdot 1}{r^2} \boldsymbol{r}^0 = \frac{e}{r^2} \boldsymbol{r}^0$$

ahol e a gömb töltése (61b. ábra).





61. ábra

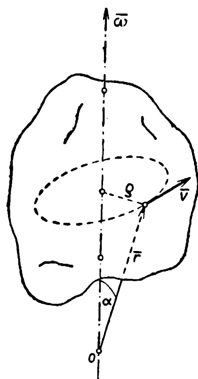
Ilyen sebességvektortérben $Q = \frac{c}{r^2} \cdot 4r^2\pi = 4\pi c = \text{const}$, tehát ezt O-beli Q intenzitású pontszerű forrással, illetve nyelővel lehet realizálni.

D) Ez ugyancsak radiális (szférikus), az O-ból kifelé mutató vektortér; $|\boldsymbol{v}| = r^{n+1}$

Ilyen sebességtérben $Q = 4\pi r^{n+3}$ lenne, tehát ezt ismét csak bizonyos térbeli forráseloszlással lehetne megvalósítani.

E) A $\boldsymbol{v}$ vektorok merőlegesek az állandó $\bar{\omega}$ vektorra és a változó $\boldsymbol{r}$ vektorokra, továbbá velük — e sorrendben — jobbrendszert képeznek; $|\boldsymbol{v}| = \bar{\omega}\, r \sin\alpha = \bar{\omega}\,\varrho$, tehát a $\boldsymbol{v}$ vektorok nagysága az $\boldsymbol{r}$ helyzetvektorú pontoknak az $\bar{\omega}$ egyenesétől mért távolságával, ún. karjával arányos.

Ilyen vektortér pl. az $\bar{\omega}$ vektor, mint fix tengely körül $\bar{\omega}$ szögsebességgel, az $\bar{\omega}$ értelmének a jobbcsavar-szabály szerint megfelelő értelemben forgó merev test sebességtere. Az $\bar{\omega}$-t ilyenkor szögsebesség-vektornak vagy forgásvektornak nevezik (62. ábra).



62. ábra

F) A $\boldsymbol{v}$ vektorok iránya és értelme a $\boldsymbol{c}$ vektorhoz képest ugyanaz, mint az előbb $\bar{\omega}$-hoz képest; $|\boldsymbol{v}| = c \sin\alpha / r = c\,\varrho / r^2$.

Ha $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$ és $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{r}(t)$, vagyis $\boldsymbol{v}$ bizonyos síkbeli mozgás sebességvektora, akkor

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2\boldsymbol{r}^2}[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})] =$$

$$= \frac{1}{2\boldsymbol{r}^2}[(\boldsymbol{r}^2)\,\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{c})\boldsymbol{r}] = \frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

tehát az $\boldsymbol{r}$ helyzetvektor $\dot{\boldsymbol{F}}$ felületsebességi vektora állandó; továbbá

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{r}^2 - (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})\,2\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}^4} = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}^2} = \frac{1}{r^2}[\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})] =$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{r}^2}[(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{c}^2)\boldsymbol{r}] = -\frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{r} = -\frac{c^2}{r}\boldsymbol{r}^0,$$

tehát az $\ddot{\boldsymbol{r}}$ gyorsulásvektor az $\boldsymbol{r}$ helyzetvektorral kollineáris, és az O mint centrum felé mutat. Az ilyen síkbeli mozgást ismeretesen centrális mozgásnak nevezzük.

G) $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$; $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ jobbrendszer;

$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{c^2}{r\sin\alpha} = \frac{c^2}{\varrho}, \quad (\boldsymbol{e}^2 = 1); \quad v \cdot 2\varrho\,\pi = \frac{c^2}{\varrho}\cdot 2\,\varrho\pi = 2\pi\,c^2 = \text{const.}$$

Ilyen felépítésű a végtelenbe nyúló egyenes vezeték mágneses tere.

2. Írjuk fel az alábbi vektorterek vektorvonalainak (térvonalainak) egyenletét:

A) $\boldsymbol{v} = r^n\boldsymbol{r}$; B) $\boldsymbol{v} = \bar{\omega}\times\boldsymbol{r}$; C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,y^2 + \boldsymbol{j}\,z^2 + \boldsymbol{k}\,x^2$;

D) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(x^2 - y^2) + \boldsymbol{j}(y^2 - z^2) + \boldsymbol{k}(z^2 - x^2)$; E) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,xy + \boldsymbol{j}\,yz + \boldsymbol{k}\,zx$.

Megoldás. A vektorvonalak (térvonalak) egyenlete:

$$\boldsymbol{dr}\times\boldsymbol{v}=0,\quad \text{azaz}\quad \frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}.$$

Az u, v, w kifejezésének közös skalár tényezője nyilván mellőzhető.

A) $\boldsymbol{dr}\times\boldsymbol{r}=0,\quad \dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z};$

B) $\boldsymbol{dr}\times(\bar{\omega}\times\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{dr})\,\bar{\omega}-(\bar{\omega}\,\boldsymbol{dr})\,\boldsymbol{r}=0;$

C) $\dfrac{dx}{y^2}=\dfrac{dy}{z^2}=\dfrac{dz}{x^2};$ D) $\dfrac{dx}{x^2-y^2}=\dfrac{dy}{y^2-z^2}=\dfrac{dz}{z^2-x^2};$

E) $\dfrac{dx}{xy}=\dfrac{dy}{yz}=\dfrac{dz}{zx}.$

3. Állapítsuk meg az alábbi vektorfüggvényeknek a megjelölt irány menti deriváltját:

A) $\boldsymbol{v}=r^2\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{s}^0=\boldsymbol{i};$ B) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{s};$ C) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}'=\dfrac{\boldsymbol{dr}}{ds},\quad \boldsymbol{s}^0=\boldsymbol{r}';$

D) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\,xy+\boldsymbol{j}\,yz+\boldsymbol{k}\,zx,\quad \boldsymbol{s}=3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$

Megoldás. A kérdezett iránymenti derivált:

$$s\frac{\boldsymbol{dv}}{ds}=(\boldsymbol{s}\nabla)\,\boldsymbol{v}=\left(s_x\frac{\partial}{\partial x}+s_y\frac{\partial}{\partial y}+s_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}\,u+\boldsymbol{j}\,v+\boldsymbol{k}\,w)=$$

$$=\boldsymbol{i}\left(s_x\frac{\partial u}{\partial x}+s_y\frac{\partial u}{\partial y}+s_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(s_x\frac{\partial v}{\partial x}+s_y\frac{\partial v}{\partial y}+s_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)+$$

$$+\boldsymbol{k}\left(s_x\frac{\partial w}{\partial x}+s_y\frac{\partial w}{\partial y}+s_z\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

ahol $s=|\boldsymbol{s}|=\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2};\quad |\boldsymbol{s}^0|=1.$

A) $\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}=(\boldsymbol{i}\nabla)\,\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial}{\partial x}(r^2\boldsymbol{r})=\dfrac{\partial}{\partial x}\,[\boldsymbol{i}(x^3+xy^2+xz^2)+\boldsymbol{j}(x^2y+y^3+yz^2)+$

$$+\boldsymbol{k}(x^2z+y^2z+z^3)]=\boldsymbol{i}(3x^2+y^2+z^2)+2\boldsymbol{i}\,xy+2\boldsymbol{k}\,xz;$$

B) $s\dfrac{\boldsymbol{dv}}{ds}=(\boldsymbol{s}\nabla)\,\boldsymbol{r}=\left(s_x\dfrac{\partial}{\partial x}+s_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}\,x+\boldsymbol{j}\,y+\boldsymbol{k}\,z)=$

$$=\boldsymbol{i}\,s_x+\boldsymbol{j}\,s_y+\boldsymbol{k}\,s_z=\boldsymbol{s};$$

C) $(\boldsymbol{r}'\nabla)\,\boldsymbol{r}'=\dfrac{\boldsymbol{dv}}{ds}=(\boldsymbol{r}')'=\boldsymbol{r}''=\dfrac{\boldsymbol{n}^0}{R};$

D) $s\dfrac{\boldsymbol{dv}}{ds}=\left(3\dfrac{\partial}{\partial y}-4\dfrac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}\,xy+\boldsymbol{j}\,yz+\boldsymbol{k}\,zx)=3\boldsymbol{i}\,x+\boldsymbol{j}(3z-4y)-4\boldsymbol{k}\,x.$

4. Számítsuk ki az alábbi vektorterek (tetszőleges pontbeli) divergenciáját és rotációját:

A) $\boldsymbol{v} = r^n \boldsymbol{r}$; B) $\boldsymbol{v} = r^n \boldsymbol{a}$; C) $\boldsymbol{v} = r^n (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$;

D) $\boldsymbol{v} = r^n(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}$; E) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \ln r$; F) $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}$.

Megoldás. A $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér (tetszőleges pontbeli) divergenciája

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}\,u + \boldsymbol{j}\,v + \boldsymbol{k}\,w) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

rotációja pedig

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}\,u + \boldsymbol{j}\,v + \boldsymbol{k}\,w) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

A) $$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x\,r^n) + \frac{\partial}{\partial y}(y\,r^n) + \frac{\partial}{\partial z}(z\,r^n) = \left(r^n + x\cdot n\,r^{n-1}\frac{x}{r}\right) +$$

$$+ \left(r^n + y\cdot n r^{n-1}\frac{y}{r}\right) + \left(r^n + z\cdot n\,r^{n-1}\frac{z}{r}\right) = 3\,r^n + n\,r^{n-2}\cdot r^2 = (3+n)\,r^n;$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x\,r^n & y\,r^n & z\,r^n \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(z\cdot n\,r^{n-1}\frac{y}{r} - y\cdot n\,r^{n-1}\frac{z}{r}\right) +$$

$$+ \boldsymbol{j}\left(x\cdot n\,r^{n-1}\frac{z}{r} - z\cdot n\,r^{n-1}\frac{x}{r}\right) + \boldsymbol{k}\left(y\cdot n\,r^{n-1}\frac{x}{r} - x\cdot n\,r^{n-1}\frac{y}{r}\right) = 0.$$

B) $$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}(a_1\,r^n) + \frac{\partial}{\partial y}(a_2\,r^n) + \frac{\partial}{\partial z}(a_3\,r^n) = a_1\cdot n\,r^{n-1}\frac{x}{r} +$$

$$+ a_2\cdot n\,r^{n-1}\frac{y}{r} + a_3\cdot n\,r^{n-1}\frac{z}{r} = (a_1\,x + a_2\,y + a_3\,z)\cdot n\,r^{n-2} = n(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^{n-2};$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 r^n & a_2 r^n & a_3 r^n \end{vmatrix} = n\,r^{n-2}\,[\boldsymbol{i}\,(a_3\,y - a_2\,z) +$$

$$+ \boldsymbol{j}(a_1\,z - a_3\,x) + \boldsymbol{k}(a_2\,x - a_1\,y)] = n\,r^{n-2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = n\,r^{n-2}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}).$$

C) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}[r^n(a_2 z - a_3 y)] + \frac{\partial}{\partial y}[r^n(a_3 x - a_1 z)] + \frac{\partial}{\partial z}[r^n(a_1 y - a_2 x)] =$

$= n\, r^{n-2}[x(a_2 z - a_3 y) + y(a_3 x - a_1 z) + z(a_1 y - a_2 x)] = 0;$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r^n(a_2 z - a_3 y) & r^n(a_3 x - a_1 z) & r^n(a_1 y - a_2 x) \end{vmatrix} =$$

$= \boldsymbol{i}[a_1 r^n + n\, r^{n-2} y\,(a_1 y - a_2 x) + a_1 r^n - n\, r^{n-2} z\,(a_3 x - a_1 z)] + \ldots =$

$= \boldsymbol{i}[2\, a_1 r^n + n\, r^{n-2}(a_1 x^2 + a_1 y^2 + a_1 z^2 - a_1 x^2 - a_2 yx - a_3 zx)] + \ldots =$

$= \boldsymbol{i}[a_1(2 + n)\, r^n - x\, n\, r^{n-2}(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})] + \ldots = \boldsymbol{a}(2 + n)\, r^n - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\, n\, r^{n-2}.$

D) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = (4 + n)(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\, r^n; \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\, r^n.$

E) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}}{r^2}; \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}}{r^2}.$ F) $\operatorname{div} v = 2\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}; \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 3\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}).$

5. Számítsuk ki az alábbi vektorfüggvények adott pontbeli divergenciáját és rotációját:

A) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(x^2 + y^3) + \boldsymbol{j}(12\, x y^2 - 3x) + \boldsymbol{k}\, xy\, z^2, \ \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k};$

B) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(x^2 - y^2) + \boldsymbol{j}(y^2 - z^2) + \boldsymbol{k}(z^2 - x^2), \ \boldsymbol{r}_0 = 2\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j};$

C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\frac{x}{y} + \boldsymbol{j}\frac{y}{z} + \boldsymbol{k}\, x\, z, \ \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\,\boldsymbol{k};$

D) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} \sin x^2 y\, z + \boldsymbol{j} \sin x y^2 z + \boldsymbol{k} \sin xy\, z^2, \ \boldsymbol{r}_0 = 0.$

Útmutatás. A fentebb említett

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

kifejezés veendő az $\boldsymbol{r}_0$ helyen.

A) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 2x + 24\, xy + 2\, x y z, \ \operatorname{div}_0 \boldsymbol{v} = -26,$
$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\, x z^2 - \boldsymbol{j}\, y z^2 + \boldsymbol{k}\,(9 y^2 - 3), \quad \operatorname{rot}_0 \boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k};$

B) $\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v} = 6, \quad \operatorname{rot}_0 \boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k};$

C) $\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v} = \frac{11}{6}, \quad \operatorname{rot}_0 \boldsymbol{v} = \frac{2}{9}\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \frac{1}{4}\boldsymbol{k};$

D) $\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{rot}_0 \boldsymbol{v} = 0.$

6. Állapítsuk meg a merev test sebesség- és gyorsulásvektor-terének divergenc iáját Használjuk fel a β) 4. példák eredményét!

Megoldás. Az 1. E) példában tanultak szerint (de most mozgó tengellyel)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{\varrho}, \quad \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}}\times\bar{\varrho} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\varrho}),$$

ahol $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(t) + \bar{\varrho}$, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(\bar{\varrho}, t)$, $\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}_0(t)$, $\bar{\omega}(t)\times\bar{\varrho} = \dot{\bar{\varrho}}(\bar{\varrho}, t)$.

E vektorterek divergenciája (a $\bar{\varrho}$ szerint számítva):

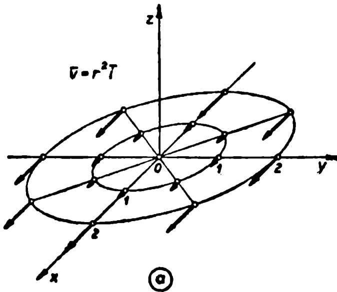
$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}_0 + \operatorname{div}(\bar{\omega}\times\bar{\varrho}) = 0 + 0 = 0;$$

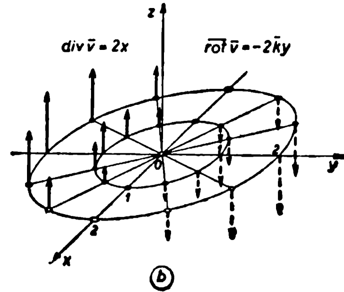
$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{v}}_0 + \operatorname{div}(\dot{\bar{\omega}}\times\bar{\varrho}) + \operatorname{div}[\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\varrho})] = 0 + 0 + \operatorname{div}(\bar{\omega}\,\bar{\varrho})\,\bar{\omega} -$$

$$- \operatorname{div} \omega^2\,\bar{\varrho} = \bar{\omega}\,\mathbf{grad}\,(\bar{\omega}\,\bar{\varrho}) - \omega^2 \operatorname{div}\bar{\varrho} = \bar{\omega}\cdot\bar{\omega} - 3\,\omega^2 = -\,2\,\omega^2.$$

7. Jellemezzük és szemléltessük az alábbi vektorterek divergencia- és rotációterét:

A) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,r^2$; B) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\,r^n$.





63. ábra

Megoldás. A) A $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektorteret $\boldsymbol{i}$ irányú és értelmű, valamint $\overline{OP}^2 = r^2$ nagyságú vektorok képezik. A vektortér ($\overrightarrow{OI} = \boldsymbol{i}$ vektorra illeszkedő) síkmetszete az 63a. ábrán látható. Továbbá

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 2x, \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = 2\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i}),$$

az x, y sík pontjaiban ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\,y$) pedig

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 2x, \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = -\,2\,\boldsymbol{k}\,y;$$

e síkban tehát a div $\boldsymbol{v}$ a vizsgált pont x koordinátájával, a **rot** $\boldsymbol{v}$ pedig y koordinátájával arányos. Az x, y síkbeli div $\boldsymbol{v}$ és **rot** $\boldsymbol{v}$ eloszlást az 63b. ábrán szemléltettük, megfelelő nagyságú (fekete, fehér) pontokkal, illetve vektorokkal.

B) A $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\,r^n$ vektortér radiális, az O-ból kifelé irányuló és az O-hoz képest gömbszimmetrikus. Továbbá

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \equiv 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = (n + 3)\,r^n;$$

eszerint vektorterünknek nincs **rot** $\boldsymbol{v}$ vektortere, de van div $\boldsymbol{v}$ skalártere, amely gömbszimmetrikus, az $n = -3$ és $n = 0$ esetben állandó (0, illetve 3), egyébként az $\overline{OP}^n = r^n$-nel arányos.

A 3. §. b) α) 3. példában fizikailag is interpretáljuk majd e két vektorteret.

γ) A nabla operátor és néhány alkalmazása

1°. A grad u, div $\boldsymbol{v}$, rot $\boldsymbol{v}$ kifejezése a ∇-val. 1'. Futólag már láttuk, hogy a Hamilton-féle, szokásosan *nablá*nak nevezett

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{d\boldsymbol{r}} \tag{1}$$

differenciáloperátor-vektor bevezetése lehetővé teszi a **grad** u, div $\boldsymbol{v}$, **rot** $\boldsymbol{v}$, $s\,d\boldsymbol{v}/ds$ derivált-alakzatoknak egyszerű, formális szorzás útján történő előállítását. Részletesebben szólva, valamely skalár- illetve vektorfüggvényt az önmagában értelmetlen, szimbólikus ∇ vektorral közönségesen, illetve skalárisan vagy vektoriálisan megszorozni annyit tesz, mint a két tényező koordinátái között az illető szorzás szabályainak megfelelő részletszorzatokat kijelölni, majd ezekben a ∇ koordinátái által jelzett parciális differenciálásokat végrehajtani.

2'. Ily módon — mint láttuk — *a* **grad** *u előállítható a* ∇ *vektor és az u skalár (közönséges) szorzataként:*

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \mathbf{grad}\, u, \tag{2}$$

a div $\boldsymbol{v}$ *a* ∇ *vektor és a* $\boldsymbol{v}$ *vektor skaláris szorzataként:*

$$\nabla \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}\, u + \boldsymbol{j}\, v + \boldsymbol{k}\, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}\, \boldsymbol{v}, \tag{3}$$

a **rot** $\boldsymbol{v}$ *a* ∇ *vektor és a* $\boldsymbol{v}$ *vektor vektoriális szorzataként:*

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}\, u + \boldsymbol{j}\, v + \boldsymbol{k}\, w) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}, \tag{4}$$

végül *az* $s\, d\boldsymbol{v}/ds$ *iránymenti derivált az* $(\boldsymbol{s}\,\nabla)\,\boldsymbol{v}$ *szorzatként:*

$$(\boldsymbol{s}\,\nabla)\,\boldsymbol{v} = \left(s_x\frac{\partial}{\partial x} + s_y\frac{\partial}{\partial y} + s_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}\, u + \boldsymbol{j}\, v + \boldsymbol{k}\, w) =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(s_x\frac{\partial u}{\partial x} + s_y\frac{\partial u}{\partial y} + s_z\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(s_x\frac{\partial v}{\partial x} + s_y\frac{\partial v}{\partial y} + s_z\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(s_x\frac{\partial w}{\partial x} + s_y\frac{\partial w}{\partial y} + s_z\frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{5}$$

3'. A b) *α)* III° helyen megadjuk majd a ∇-nak, valamint a ∇u, $\nabla \boldsymbol{v}$, $\triangle u$, $\nabla \times \boldsymbol{v}$, $(\boldsymbol{s}\,\nabla)\,\boldsymbol{v}$ deriváltalakzatoknak a koordináta-rendszer választásával szemben *invariáns* értelmezését.

II°. Összeg és szorzat differenciálása a ∇-val. 1'. A ∇ differenciáloperátor-vektor — a fentebbi egyszerű eseteken túl — bonyolultabb esetekben, pl. összeg, szorzat és összetett függvény differenciálásánál is előnyösen alkalmazható. Ilyenkor a ∇-val végzendő műveletek kijelölésénél figyelembe veendők a differenciálási, e műveletek végrehajtásánál pedig a vektorszámítási szabályok. Ez utóbbiak a parciális deriválási teendőket határozzák meg, továbbá — szorzat deriválása esetén — a tényezőcserék módját. Egyébként ekkor a tényezők cseréjét azért eszközöljük, hogy *a* ∇ *közvetlenül a differenciálandó tényező elé* (vagyis a változatlan tényező mögé) *kerüljön.* A ∇ ugyanis — mint általában a differenciálási jelek — csak az utána következő tényezőre vonatkozik. (Bonyolultabb esetekben célszerű jelezni a differenciálandó tényezőt, pl. a föléje írt $\downarrow$ jellel.)

Minthogy az $u(\boldsymbol{r})$ és a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény $\boldsymbol{r}$ szerinti deriváltját formálisan a skalár-analízis mintájára értelmeztük, azért az ottani *differenciálási szabályok* a $\nabla = d/d\boldsymbol{r}$ differenciáloperátorra is *érvényben maradnak,* mégpedig — az m, n, u, v skalár vagy vektor jellegétől függetlenül —

$$\left.\begin{aligned} \nabla(mu+nv) &= m\bullet\nabla u + n\bullet\nabla v, \\ \nabla(uv) &= \pm u\bullet\nabla v \pm v\bullet\nabla u, \\ \nabla[u(v)] &= \frac{du}{dv}\bullet\nabla v \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

értelmezéssel; itt a $\pm$ jel az $uv = \pm vu$ szerint veendő, a $\bullet$ helyébe pedig az eredmény skalár, vektor (vagy tenzor) jellegének megfelelő szorzásjel teendő. (A tenzor elkerülésére itt is felhasználjuk majd az $(\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{v}$ iránymenti deriváltat.)

2'. A fentebbi általános szabályokat alkalmazzuk most a legfontosabb konkrét esetekre!

Összeg differenciálása:

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{grad}\,(u+v) = \mathbf{grad}\,u + \mathbf{grad}\,v; \qquad (7)$$

$$\nabla(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{v}, \quad \text{azaz} \quad \mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}; \qquad (8)$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \nabla\times\boldsymbol{u} + \nabla\times\boldsymbol{v}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{rot}\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}. \qquad (9)$$

Ezek — vektorszámítási szempontból — a disztributív törvényt juttatják kifejezésre, annak megfelelően, hogy a ∇ lineáris operátor.

Szorzat differenciálása, legalább egy skalár tényező esetén:

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{grad}\,(uv) = u\,\mathbf{grad}\,v + v\,\mathbf{grad}\,u; \qquad (10)$$

$$\nabla(u\boldsymbol{v}) = u\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla u, \quad \text{azaz} \quad \mathrm{div}\,(u\boldsymbol{v}) = u\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,u; \qquad (11)$$

$$\nabla\times(u\boldsymbol{v}) = \nabla\times(u\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}) + \nabla\times(\overset{\downarrow}{u}\boldsymbol{v}) = u\nabla\times\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\times\nabla u, \quad \text{azaz}$$

$$\mathbf{rot}\,(u\boldsymbol{v}) = u\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\times\mathbf{grad}\,u, \qquad (12)$$

ahol $\downarrow$ a differenciálandó tényezőt jelzi.

Két vektortényező esetén már valamivel körülményesebben nyerhetők a szorzat deriváltalakzatai. Nevezetesen:

$$\nabla (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \nabla (\boldsymbol{u}\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}) + \nabla (\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}(\nabla\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}(\nabla\times\boldsymbol{u}),\ \text{azaz}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}; \tag{13}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}) + \nabla\times(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{u}(\nabla\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v}] + [(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}(\nabla\boldsymbol{u})],$$

azaz

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{u}; \tag{14}$$

$$\nabla(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) = \nabla(\boldsymbol{u}\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}) + \nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}) = [(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})] + [(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})],$$

azaz

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}; \tag{15}$$

a (14) és a (15) formulánál felhasználtuk az $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ alakú ún. *kifejtési tételt**, a ∇-t az $\boldsymbol{a}$-val, illetve a $\boldsymbol{b}$-vel azonosítva.

Végül a (15) fontos speciális esetét nyerjük, ha $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^2/2 = u^2/2$; ekkor

$$\mathbf{grad}\,\frac{u^2}{2} = (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\,. \tag{16}$$

III°. M a g a s a b b r e n d ű d e r i v á l t a l a k z a t o k. 1'. A ∇ operátor kétszeri alkalmazásával nyerhetők az alábbi másodrendű deriváltalakzatok, illetve kifejezésük elsőrendűek segítségével.

Tekintsük először a skalárfüggvény

$$\operatorname{div}\mathbf{grad}\,u = \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u = \triangle u \tag{17a}$$

alakú ún. LAPLACE-kifejezését, ahol

$$\triangle = \nabla^2 = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{17b}$$

az ún. LAPLACE-*operátor.*

A $\triangle$ operátor vektorfüggvényre is alkalmazható, mégpedig

$$\triangle\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\triangle u + \boldsymbol{j}\triangle v + \boldsymbol{k}\triangle w \tag{18}$$

módon.

Két skalárfüggvény szorzatára alkalmazva a $\triangle$ operátort, a

$$\triangle(uv) = u\triangle v + 2\nabla u\cdot\nabla v + v\triangle u,\ \text{azaz}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{grad}(uv) = u\operatorname{div}\mathbf{grad}\,v + 2\,\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{grad}\,v + v\operatorname{div}\mathbf{grad}\,u \tag{19}$$

azonosság adódik.

* L. pl. a sorozat A. IX. kötetében.

2'. A (17a)-tól megkülönböztetendő a

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla(\nabla\boldsymbol{v}) = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{20}$$

kifejezés.

3'. Igen fontos továbbá a

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\nabla u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = 0, \tag{21}$$

valamint a

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \nabla(\nabla\times\boldsymbol{v}) = \nabla\nabla\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$

azonosság.

Végül a kifejtési tétel segítségével nyerhető, hogy

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla\boldsymbol{v}) - \nabla^2\boldsymbol{v}, \quad \text{azaz}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \triangle\boldsymbol{v}. \tag{23}$$

IV°. Időben változó terek deriváltja. 1'. Tegyük fel, hogy a teret (pl. hőfokteret, áramsűrűség-vektorteret) hordozó folytonos közeg (pl. gáz, fém) adott $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ sebességvektorterű mozgást végez.

Ez esetben a $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ skalárfüggvény t szerinti *teljes* (individuális, szubsztanciális) deriváltja két részből áll: az egyik a t szerinti *helyi* (lokális, parciális) derivált, a másik a t szerinti *mozgási* (konvektív) derivált; jelekkel:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}, t)-\varphi(\boldsymbol{r}_0, t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}, t)-\varphi(\boldsymbol{r}, t_0)}{t-t_0} +$$

$$+\lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_0}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}, t_0)-\varphi(\boldsymbol{r}_0, t_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\cdot\lim_{t\to t_0}\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}{t-t_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{ds}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{v}^0)\,|\boldsymbol{v}| = \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\operatorname{grad}\varphi,$$

tehát végeredményben (a ∇ alkalmazásával)

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\varphi.} \tag{24}$$

2'. Hasonló módon a $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}, t)$ vektorfüggvény t szerinti *teljes* deriváltja, mint a t szerinti *helyi* és *mozgási* deriváltjának összege, így alakul:

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + |\boldsymbol{v}|\,(\boldsymbol{v}^0\,\nabla)\,\boldsymbol{w} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{w},$$

vagyis végeredményben

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{w}.} \tag{25}$$

3'. Speciálisan, folyadékáramlásban egy megjelölt részecske sebességvektorának t szerinti teljes deriváltja a részecske *gyorsulásvektorát* szolgáltatja:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{v}. \tag{26}$$

Példák és feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvényösszegek megjelölt deriváltalakzatát:

A) $\nabla\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)$; B) $\nabla(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}^3 + \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{r})$; C) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\ln r + \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{r})$.

Használjuk fel a *β)* 4. példák eredményét!

Megoldás. A (7), (8) és (9) formula értelmében a ∇ összegre tagonként alkalmazandó.

A) $$\nabla\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right) = \nabla r^2 + \nabla\frac{1}{r^2} =$$
$$= 2r\left(\boldsymbol{i}\frac{x}{r} + \boldsymbol{j}\frac{y}{r} + \boldsymbol{k}\frac{z}{r}\right) - \frac{2}{r^3}\left(\boldsymbol{i}\frac{x}{r} + \boldsymbol{j}\frac{y}{r} + \boldsymbol{k}\frac{z}{r}\right) = 2\boldsymbol{r} - \frac{2\boldsymbol{r}}{r^4};$$

B) $$\nabla(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}^3 + \boldsymbol{c}\boldsymbol{r}) = \nabla(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}^3) + \nabla(\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{r}) = 3(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} + 3\boldsymbol{c};$$

C) $$\nabla\times(\boldsymbol{a}\ln r + \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{a}\ln r + \nabla\times\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{r^2} + 0.$$

2. Számítsuk ki az alábbi (legalább egy skalártényezős) függvényszorzatok megjelölt deriváltalakzatát:

A) $\nabla(r^2\cdot\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})$; B) $\nabla(r^3\cdot\boldsymbol{a}\ln r)$; C) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$.

Használjuk fel a *β)* 4. példák eredményét!

Megoldás. A (10), (11) és (12) formulát alkalmazzuk.

A) $$\nabla(r^2\cdot\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}) = r^2\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}\cdot\nabla r^2 = r^2\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}\cdot 2\boldsymbol{r};$$

B) $$\nabla(r^3\cdot\boldsymbol{a}\ln r) = r^3\cdot\nabla(\boldsymbol{a}\ln r) + \boldsymbol{a}\ln r\cdot\nabla r^3 = r^3\cdot\frac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}}{r^2} + \boldsymbol{a}\ln r\cdot 3r\,\boldsymbol{r} =$$
$$= (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r + 3(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r\ln r;$$

C) $$\nabla\times(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\nabla(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}) =$$
$$= \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}\cdot 2\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{a} = 2(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a} - a^2\,\boldsymbol{r} = 3(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a} - a^2\,\boldsymbol{r}.$$

3. Számítsuk ki az alábbi (két vektortényezős) függvényszorzatok megjelölt deriváltalakzatát:

A) $\nabla[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times r^2\boldsymbol{b}]$; B) $\nabla\times(r^2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}\ln r)$;

C) $\nabla(r^3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\ln r$; D) $\nabla\dfrac{(r^3\boldsymbol{a})^2}{2}$.

Használjuk fel a β) 4. példák eredményét!

Megoldás. A (13), (14) és (16) formulát alkalmazzuk.

$$\text{A)}\ \nabla[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times r^2\boldsymbol{b}] = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\cdot(\nabla\times r^2\boldsymbol{b}) + r^2 b^2\,[\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})] =$$
$$= -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\cdot 2(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}) + r^2\boldsymbol{b}\cdot 2\boldsymbol{a} = 2r^2(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b});$$

$$\text{B)}\ \nabla\times(r^2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}\ln r) = (\boldsymbol{a}\ln r\cdot\nabla)\,r^2\boldsymbol{r} - (r^2\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{a}\ln r +$$
$$+ r^2\boldsymbol{r}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}\ln r) - \boldsymbol{a}\ln r\,(\nabla\cdot r^2\boldsymbol{r}) = \ln r\,[\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}\,\nabla)\,r^2 + r^2(\boldsymbol{a}\,\nabla)\boldsymbol{r}] -$$
$$- r^2\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{r}\,\nabla)\ln r + r^2\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}}{r^2} - \boldsymbol{a}\ln r\cdot 5r^2 = \ln r\;[2(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} + r^2\boldsymbol{a}] -$$
$$- r^2\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} - 5\boldsymbol{a}\,r^2\ln r = \boldsymbol{r}\,[(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,(2\ln r + 1)] - \boldsymbol{a}\,[r^2(1 + 4\ln r)];$$

$$\text{C)}\ \nabla(r^3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\ln r) = (r^3\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{a}\ln r + (\boldsymbol{a}\ln r\cdot\nabla)\,r^3\boldsymbol{b} +$$
$$+ r^3\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}\ln r) + \boldsymbol{a}\ln r\times(\nabla\times r^3\boldsymbol{b}) = r^3\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\,\nabla)\ln r + \boldsymbol{b}\ln r\,(\boldsymbol{a}\,\nabla)\,r^3 +$$
$$+ r^3\boldsymbol{b}\times\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{r^2} + \boldsymbol{a}\ln r\times 3r\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}) = r^3\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{r}}{r^2} + \boldsymbol{b}\ln r\cdot 3r\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}) +$$
$$+ r\,\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}) + 3r\ln r\,\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a} + 3r\ln r\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{b} +$$
$$+ r(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{r} - r(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a} + 3r\ln r(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{r} - 3r\ln r(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{b} = r(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})\,(1 + 3\ln r)\,\boldsymbol{r};$$

$$\text{D)}\ \nabla\frac{(r^3\boldsymbol{a})^2}{2} = (r^3\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\,r^3\boldsymbol{a} + r^3\boldsymbol{a}\times(\nabla\times r^3\boldsymbol{a}) = r^3\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}\,\nabla)\,r^3 +$$
$$+ r^3\boldsymbol{a}\times 3r\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}) = r^3\boldsymbol{a}\cdot 3r(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}) + 3r^4a^2\boldsymbol{r} - 3r^4(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a} = 3a^2r^4\boldsymbol{r}.$$

Ellenőrizzük az eredményeket közvetlenül a függvényszorzaton eszközölt nabla-operációval.

4. Állapítsuk meg az alábbi skalárfüggvények LAPLACE-kifejezését:

A) $u = r^n$; B) $u = \ln r$; C) $u = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^n$; D) $u = e^{xyz}$;

E) $u = y\,e^x + x\,e^z + y\,e^3$, $\boldsymbol{r}_0(0, 2, -1)$; F) $u = x^2\sin y\,z$.

Használjuk fel az α) 2. példák eredményeit!

Megoldás. A (17) alatt tanult

$$\triangle u = \nabla(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

formula alkalmazandó.

$$\text{A)}\ \triangle r^n = \nabla(\nabla r^n) = \nabla(n\,r^{n-2}\cdot\boldsymbol{r}) = n\,\boldsymbol{r}\cdot\nabla r^{n-2} + n\,r^{n-2}\cdot\nabla\boldsymbol{r} =$$
$$= n\,\boldsymbol{r}\cdot(n-2)\,r^{n-4}\boldsymbol{r} + n\,r^{n-2}\cdot 3 = [n(n-2) + 3n]\,r^{n-2} = (n^2+n)\,r^{n-2};$$

B) $\triangle \ln r = \nabla(\nabla \ln r) = \nabla\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}(\nabla \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r}\left(\nabla \frac{1}{r^2}\right) =$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot 3 + \boldsymbol{r}\,(-2r^{-4}\,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2}(3-2) = \frac{1}{r^2};$$

C) $\triangle(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^n = \nabla[\nabla(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^n] = \nabla[\boldsymbol{a}\,r^n + \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\cdot n\,r^{n-2}] =$

$$= \boldsymbol{a}\cdot n\,r^{n-2}\,\boldsymbol{r} + 3\cdot(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\cdot n\,r^{n-2} + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}\cdot n\,r^{n-2} + \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\cdot n\,(n-2)\,r^{n-4}\,\boldsymbol{r} =$$

$$= (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^{n-2}(n + 3n + n + n^2 - 2n) = (n^2+3n)\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^{n-2};$$

D) $\triangle\, e^{xyz} = (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\,e^{xyz};$

E) $\triangle\,(y\,e^x + x\,e^z + y\,z^3) = \frac{\partial}{\partial x}(y\,e^x + e^z) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x + z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(x\,e^z + 3\,y\,z^2) =$

$$= y\,e^x + x\,e^z + 6y\,z, \quad \Delta_0 u = 2 + 0 - 12 = -10;$$

F) $\triangle\,(x^2 \sin y\,z) = (2 - x^2z^2 - x^2y^2)\sin y\,z.$

5. Írjuk fel az alábbi skalár függvényszorzatok, illetve vektorfüggvények LAPLACE-kifejezését:

A) $u = r^n \ln r;$ B) $u = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^n;$ C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,r^3 + \boldsymbol{j}\ln r + \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^2;$

D) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,x^2 + \boldsymbol{j}\,y^3 + \boldsymbol{k}\,z^4,\quad \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$

Használjuk fel az előbbi példa eredményeit!

Megoldás. A (19), illetve (18) alatt tanult

$$\triangle(u\,v) = u\triangle v + 2\nabla u\cdot\nabla v + v\triangle u, \qquad \triangle \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\triangle u + \boldsymbol{j}\triangle v + \boldsymbol{k}\triangle w$$

formula alkalmazandó.

A) $\triangle(r^n \ln r) = r^n\triangle\ln r + 2\nabla r^n\cdot\nabla\ln r + \ln r\cdot\triangle r^n =$

$$= r^n\cdot\frac{1}{r^2} + 2n\,r^{n-2}\,\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} + \ln r\cdot(n^2+n)\,r^{n-2} = r^{n-2}\,[1 + 2n + (n^2+n)\ln r];$$

B) $\triangle[(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^n] = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\cdot\triangle r^n + 2\nabla(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\cdot\nabla r^n + r^n\cdot\triangle(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r}) =$

$$= (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,(n^2+n)\,r^{n-2} + 2\,\boldsymbol{a}\cdot n\,r^{n-2}\,\boldsymbol{r} + r^n\cdot 0 = (n^2+3n)\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^{n-2};$$

C) $\triangle\,[\boldsymbol{i}\,r^3 + \boldsymbol{j}\ln r + \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^2] = \boldsymbol{i}\triangle r^3 + \boldsymbol{j}\triangle\ln r + \boldsymbol{k}\triangle(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^2 =$

$$= 12\,\boldsymbol{i}\,r + \boldsymbol{j}\,\frac{1}{r^2} + 10\,\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r});$$

D) $\triangle(\boldsymbol{i}\,x^2 + \boldsymbol{j}\,y^3 + \boldsymbol{k}\,z^4) = 2\,\boldsymbol{i} + 6\,\boldsymbol{j}\,y + 12\,\boldsymbol{k}\,z^2,\quad \triangle_0 \boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{i} - 6\,\boldsymbol{j} + 48\,\boldsymbol{k}.$

6. Igazoljuk, hogy az alábbi vektorterek rotációja azonosan zérus, vagyis e vektorterek ún. örvénymentesek:

A) $\boldsymbol{v} = 3r\,\boldsymbol{r};$ B) $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2};$ C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,r^2 + 2(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}.$

Használjuk fel az α) 2. példák eredményét!

Megoldás. Ha $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} u$, akkor — a (21) formula értelmében —

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u \equiv 0.$$

A) $\boldsymbol{v} = 3r\,\boldsymbol{r} = \operatorname{grad} r^3$; B) $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \operatorname{grad} \ln r$;

C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,r^2 + 2(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} = \operatorname{grad} (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^2$.

Ily módon mind a három vektortér örvénymentes.

Ellenőrizzük koordinátás számítással!

8. Igazoljuk, hogy az alábbi vektorterek divergenciája azonosan zérus, vagyis e vektorterek ún. forrásmentesek:

A) $\boldsymbol{w} = 2(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$; B) $\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{r^2}$; C) $\boldsymbol{w} = 3\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$.

Használjuk fel a β) 4. példa eredményeit!

Megoldás. Ha $\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$, akkor — a (22) formula értelmében —

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = \operatorname{div} \operatorname{rot} v \equiv 0$$

A) $\boldsymbol{w} = 2\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}) = \operatorname{rot} r^2\,\boldsymbol{a}$; B) $\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{r^2} = \operatorname{rot} \boldsymbol{a} \ln r$;

C) $\boldsymbol{w} = 3(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} [(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}]$.

Ily módon mind a három vektortér forrásmentes.

Ellenőrizzük koordinátás számítással!

9. Határozzuk meg az alábbi vektoretrek grad div-jét és rot rot-ját:

A) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \ln r$; B) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,(x^3 - 2y\,z^2) + \boldsymbol{j}\,(x\,y^2 - z^3) + \boldsymbol{k}\,(z^2 - xyz)$.

Használjuk fel a β) 4. példák eredményét!

Megoldás. A (20) és (23) formulát alkalmazzuk.

A) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \ln r$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^{-2}$,

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,r^{-2} - 2\,\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^{-4};$$

$$\triangle \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \triangle \ln r = \boldsymbol{a}\,r^{-2};$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})\,r^{-2}, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = -2\,\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\,r^{-4} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \triangle \boldsymbol{v}.$$

B) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 3\,x^2 + 2\,xy + 2z - xy = 3\,x^2 + xy - 2z$,

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} (3\,x^2 + xy - 2z) = \boldsymbol{i}\,(6x + y) + \boldsymbol{j}\,x + 2\,\boldsymbol{k};$$

$$\triangle \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\cdot\nabla\,(3\,\boldsymbol{i}\,x^2 - 2\,\boldsymbol{j}\,z^2 - 4\,\boldsymbol{k}\,yz) + \boldsymbol{j}\cdot\nabla\,(\boldsymbol{i}\,y^2 + 2\,\boldsymbol{j}\,xy - 3\,\boldsymbol{k}\,z^2) +$$
$$+ \boldsymbol{k}\cdot\nabla\,[-\boldsymbol{i}\,yz - \boldsymbol{j}\,xz + \boldsymbol{k}\,(2z - xy)] = \boldsymbol{i}\,(6x - 4y) + \boldsymbol{j}\,(2x - 6z) + 2\boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 - 2yz^2 & xy^2 - z^3 & z^2 - xyz \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\,[\boldsymbol{i}\,(-xz + 3z^2) +$$

$$+ \boldsymbol{j}\,(-4yz + yz) + \boldsymbol{k}\,(y^2 + 2\,z^2) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -xz + 3z^2 & -3yz & y^2 + 2\,z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\,(2y + 3y) + \boldsymbol{j}\,(-x + 6z) = 5\,\boldsymbol{i}\,y + \boldsymbol{j}\,(6z - x) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \triangle \boldsymbol{v}.$$

10. Határozzuk meg az alábbi, időben változó terek teljes deriváltját, a hordozó közeg adott sebességterű mozgása mellett:

A) $\varphi = e^t r^n, \quad \boldsymbol{v} = e^{-r} \boldsymbol{r};$ B) $\boldsymbol{w} = e^{-t} r^n \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{v} = e^{-r} \boldsymbol{r}.$

Megoldás. A (24) és (25) alatt tanult

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \nabla \varphi, \qquad \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{w}$$

formulákat alkalmazzuk.

A) $$\frac{d\varphi}{dt} = - e^{-t} r^n + e^{-r} \boldsymbol{r} \cdot \nabla (e^{-t} r^n) = - e^{-t} r^n + e^{-r} \boldsymbol{r} \cdot e^{-t} n r^{n-2} \boldsymbol{r} =$$

$$= e^t r^n (n e^{-r} - 1) = \varphi \left(n \frac{v}{r} - 1\right);$$

B) $$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} = - e^{-t} r^n \boldsymbol{a} + (e^{-r} \boldsymbol{r} \cdot \nabla) e^{-t} r^n \boldsymbol{a} = - e^{-t} r^n \boldsymbol{a} + e^{-(r+t)} \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{r} \nabla) r^n =$$

$$= - e^{-t} r^n \boldsymbol{a} + e^{(r+t)} \boldsymbol{a} \cdot n r^n = e^{-t} r^n \boldsymbol{a} (n e^{-r} - 1) = \boldsymbol{w} \left(n \frac{v}{r} - 1\right).$$

11. Határozzuk meg az alábbi sebességvektorterek gyorsulásvektorterét:

A) $\boldsymbol{v} = e^{-(r+t)} \boldsymbol{r};$ B) $\boldsymbol{v} = v_0(t) + \bar{\omega}(t) \times \bar{\varrho}.$

Megoldás. A (26) formula értelmében

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v}.$$

A) $$\boldsymbol{a} = - e^{-(r+t)} \boldsymbol{r} + (e^{-(r+t)} \boldsymbol{r} \cdot \nabla) e^{-(r+t)} \boldsymbol{r} =$$

$$= - e^{-(r+t)} \boldsymbol{r} + e^{-(r+2t)} \cdot (\boldsymbol{r} \nabla) e^{-r} \boldsymbol{r} = - e^{-(r+t)} \boldsymbol{r} + e^{-(r+2t)} \cdot (- e^{-r} r \boldsymbol{r} + e^{-r} \boldsymbol{r}) =$$

$$= e^{-(r+t)} \boldsymbol{r} \left[e^{-(r+t)} (1 - r) - 1\right] = \boldsymbol{v} \left[\frac{v}{r} (1 - r) - 1\right];$$

$$\text{pl. } r \to 0\text{-nál } \boldsymbol{a} \to \infty, \quad r = 1\text{-nél } \boldsymbol{a} = - \boldsymbol{v},$$

$$r = 2\text{-nél } \boldsymbol{a} = - \boldsymbol{v} \left(\frac{v}{2} + 1\right), \quad r \to \infty\text{-nél } \boldsymbol{a} \to - \boldsymbol{v} (v + 1).$$

B) $$\boldsymbol{a} = \{\dot{\boldsymbol{v}}_0(t) + [\boldsymbol{v}_0(t) \nabla] \boldsymbol{v}_0(t)\} + \{\dot{\bar{\omega}}(t) \times \bar{\varrho} + [\bar{\omega}(t) \bar{\varrho} \nabla] [\bar{\omega}(t) \times \bar{\varrho}]\} =$$

$$= \{\dot{\boldsymbol{v}}_0(t) + 0\} + \{\dot{\bar{\omega}}(t) \times \bar{\varrho} + \bar{\omega}(t) \times [\bar{\omega}(t) \bar{\varrho} \nabla] \bar{\varrho}\} =$$

$$= \dot{\boldsymbol{v}}_0(t) + \dot{\bar{\omega}}(t) \times \bar{\varrho} + \bar{\omega}(t) \times [\bar{\omega}(t) \times \bar{\varrho}].$$

Itt — a zavarok elkerülése céljából — külön számítottuk a két komponens-mozgás gyorsulását. Eredményünk megegyezik a *β)* 6. példában más úton nyert eredménynyel.

b) Skalár- és vektorterek lokális és regionális jellemzése

α) A grad u, div v, Δu, $(s\nabla)v$ és rot v invariáns értelmezése

1°. Integrál-vonatkozások. 1'. Az alábbiakban megadjuk a vektoranalízis e nagy jelentőségű deriváltalakzatainak a koordináta-rendszer választásától független, ún. *invariáns értelmezését*, amelyek egyszersmind a fizikai szemléltetésre is alkalmasnak fognak bizonyulni.

E célra igénybe vesszük a skalár-vektor és a vektor-vektor függvénynek — az 1. és 2. §-ban megismert — görbe menti és *felületi integrál*jait, nevezetesen az

$$\int_{(G)} u\,d\boldsymbol{r}, \quad \iint_{(F)} u\,d\boldsymbol{F}; \quad \int_{(G)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}, \qquad (1a, b, c)$$

$$\int_{(G)} d\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{v}, \quad \iint_{(F)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{F}, \quad \iint_{(F)} d\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{v} \qquad (1d, e, f)$$

integrálokat. Emlékezetes, hogy ezeknek mint bizonyos szummák határértékének létezéséhez elegendő a G görbe ívhosszának, illetve az F felület felszínének *mérhetősége* és az $u(\boldsymbol{r})$, illetve a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény *folytonossága*.

2'. Most rámutatunk ezen integrálokkal kapcsolatban néhány, az alábbiakban felhasználandó sajátságra, eredményre, elnevezésre.

Mint ismeretes,* *zárt felület vektora zérus*, azaz (64a. ábra)

$$\oint_{(F)} d\boldsymbol{F} = 0 \qquad (2a)$$

Ebből következik, hogy *skalár- vagy vektorállandó zárt felületi integrálja szintén zérus*, azaz

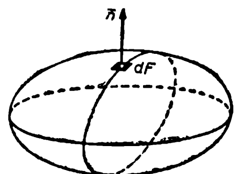
$$\oint_{(F)} u_0\,d\boldsymbol{F} = u_0 \oint_{(F)} d\boldsymbol{F} = 0, \quad \oint_{F} \boldsymbol{v}_0\,d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}_0 \oint_{(F)} d\boldsymbol{F} = 0,$$

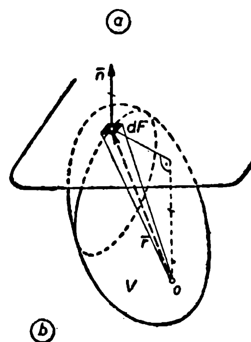
$$\oint_{(F)} \boldsymbol{v}_0\times d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}_0\times\oint_{(F)} d\boldsymbol{F} = 0. \qquad (2b, c, d)$$

Ugyanez értelemszerűen *zárt görbére is igaz*, nevezetesen

$$\oint_{(G)} d\boldsymbol{r} = 0, \quad \oint_{(G)} u_0\,d\boldsymbol{r} = 0, \quad \oint_{(G)} \boldsymbol{v}_0\,d\boldsymbol{r} = 0, \quad \oint_{(G)} \boldsymbol{v}_0\times d\boldsymbol{r} = 0$$

$$\oint_{(G)} d\boldsymbol{r}_n = 0, \quad \oint_{(G)} \boldsymbol{v}_0\,d\boldsymbol{r}_n = 0, \quad \oint_{(G)} \boldsymbol{v}_0\times d\boldsymbol{r}_n = 0. \qquad (3a–g)$$





64. ábra

Elemi geometriai megfontolással igazolhatók a *V köbtartalmú térrészt körülzáró F felületen* vett alábbi integrálok:

$$\oint_{(F)} x\,dF_x = V, \quad \oint_{(F)} y\,dF_y = V, \quad \oint_{(F)} z\,dF_z = V; \qquad (4a, b, c)$$

$$\oint_{(F)} y\,dF_x = 0, \quad \oint_{(F)} z\,dF_x = 0, \quad \oint_{(F)} x\,dF_y = 0, \quad \oint_{(F)} z\,dF_y = 0,$$

$$\oint_{(F)} x\,dF_z = 0, \quad \oint_{(F)} y\,dF_z = 0. \qquad (5a–f)$$

* Igazolását l. pl. Кочин [M. 8.].

A (4a, b, c)-ből összeadással nyerhető, hogy

$$\oint_{(F)} \boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{F} = 3\boldsymbol{V}, \tag{6}$$

ahol $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{n}\, dF$ külső normális (64b. ábra). Az (5a—f)-ből következik továbbá, hogy

$$\oint_{(F)} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F} = 0. \tag{7}$$

Végül a (4a, b, c), az (5a—f) és egy tetszőleges $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j} + a_3 \boldsymbol{k}$ vektor-állandó egyszerű kombinálásával állíthatók elő az

$$\oint_{(F)} (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{r}\, dF = \boldsymbol{a}\, V, \qquad \oint_{(F)} (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}\, dF = \boldsymbol{a}\, V \tag{8a, b}$$

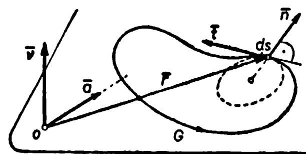
formulák, ahol $\boldsymbol{n}$ a (külső) normális egységvektor, $\boldsymbol{a}$ pedig tetszőleges állandó vektor.

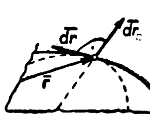
A fentebbi formulák analógjai $\boldsymbol{F} = \bar{\nu} F$ *területvektorú síkrészt körülzáró G síkgörbe* esetén:

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r}_n = 2\boldsymbol{F}, \qquad \oint_{(G)} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{F}, \qquad \oint_{(G)} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{0}, \tag{9, 10, 11}$$

$$\oint_{(G)} (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{r}\, ds = \boldsymbol{a}\, F, \qquad \oint_{(G)} (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}\, ds = \boldsymbol{a}\, F, \tag{12a, b}$$

ahol $d\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{n}\, ds$ a (külső) normális, $d\boldsymbol{r}$ a pozitív körüljárásnak megfelelő értelmű érintőleges vektor; $\bar{\nu}$ ez utóbbival jobbrendszert képez, végül $\boldsymbol{a}$ a síkban fekszik, azaz $\boldsymbol{a} \perp \bar{\nu}$ (65. ábra).





65. ábra

3'. Itt helyénvaló néhány megjegyzést tenni. Mint tudjuk, $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}\, ds$ és $d\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{n}\, ds$ a G görbe érintőleges, illetve főnormális irányú ívelem-vektora, $d\boldsymbol{F} = \bar{\nu}\, dF$ pedig az F felület normális irányú felületelem-vektora. Ezen elemi vektorok értelmét nyílt görbe és felület esetén tetszőlegesen rögzítjük, viszont *zárt* görbe és felület esetén $d\boldsymbol{r}$-t az óramutató járásával ellenkező értelemben, $d\boldsymbol{r}_n$-et és $d\boldsymbol{F}$-et pedig *kifelé* mutató értelemben szokás felvenni.

Említettük már, hogy a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény nyílt vagy zárt F felületen vett

$$\iint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}, \quad \text{illetve} \quad \oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}$$

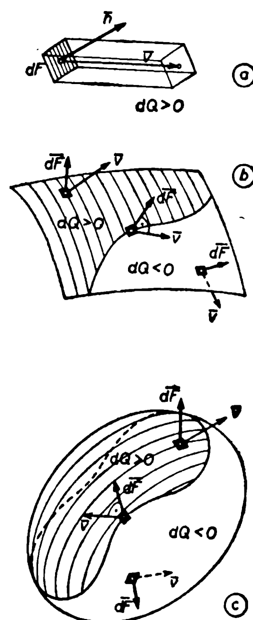
alakú integrálját „*a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *vektortér f l u x u s-a az F felületen (át)*" elnevezéssel is, a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény zárt (!) G görbe mentén vett

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}$$

alakú integrálját pedig „*a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *vektortér G görbe menti c i r k u l á c i ó-ja*" elnevezéssel is szokták illetni.

4'. Mindkét elnevezés ezen integrálok egy-egy nevezetes fizikai értelmezését tükrözi. Nevezetesen jelentse $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ valamely közeg (pl. folyadék, hő, elektromos töltés) időálló (stacionárius) *áramlási intenzitását*, bővebben a merőleges területegységre és az időegységre vonatkoztatva átáramló közeg mennyiségét (tehát a pl. említett esetekben a sűrűség és a sebesség $\varrho\, \boldsymbol{w}$ szorzatát, a $\boldsymbol{q}$ hőáramsűrűséget, az $\boldsymbol{i}$ elektromos áramsűrűséget). Ekkor $dQ = \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{v}|\, |d\boldsymbol{F}| \cos\varphi$ a dF felületelemen az időegység alatt — a $dQ > 0$ esetben a dF pozitív (vagyis az $\boldsymbol{n}$ felé eső), $dQ < 0$ esetén pedig a dF negatív oldalára — átáramló közeg mennyiségét szolgáltatja (66a. ábra). Ily módon $Q = \int dQ = (F) \iint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}$ az F nyílt felületen az időegység alatt az F pozitív oldalára átömlő közegmennyiség többletét,* röviden a *pozitív átáramlási többletet*, vagy a pozitív fluxus többletét adja (66b. ábra). Végül $Q = (F) \oint\!\!\oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}$ az F zárt felületen az időegység alatt az F külső (pozitív) oldalára átömlő közegmennyiség többletét, röviden a *kiáramlási többletet*, vagy a kilépő fluxus többletét szolgáltatja (66c. ábra).

Ha $\boldsymbol{v}$ nem áramlási, hanem más, fizikai jelentésű vektor (pl. elektromos, mágneses térerősség), akkor — szokásos megállapodással — (merőleges területegységre vonatkoztatva) $|\boldsymbol{v}|$ sűrűségű vektorvonal-rendszerrel népesítjük a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektorteret. Ez esetben értelemszerűen $(F) \iint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}$ *a pozitív vektorvonal-fluxus többlete* az F nyílt felületen, $(F) \oint\!\!\oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}$ pedig *a kilépő vektorvonal-fluxus többlete* az F zárt felületen.



66. ábra

5'. Jelentse most $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(r)$ valamely mozgás, áramlás *sebességét*. Legyen a mozgás forgó, az áramlás örvénylő jellegű. A forgás, örvénylés intenzitása valamely G zárt görbe mentén a $\Gamma = (G) \oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = (G) \oint v_t\, ds$ alakú, *cirkuláció* nevű integrállal jellemezhető, amely nyilván *a G menti átlagos tangenciális sebesség és a G ívhossza szorzatát* adja, azaz $\Gamma = v_{tá} S$.

Pl. *merev test rögzített tengely körüli forgásának* sebességtere a $\boldsymbol{v} = \bar{\omega} \times \boldsymbol{r}$ függvénnyel írható le, ahol $\bar{\omega}$ az ún. szögsebesség-vektor, $\boldsymbol{r}$ pedig a forgástengely tetszőleges pontjából vont helyzetvektor. Ekkor a tengely körüli bármely zárt G síkgörbe mentén a *cirkuláció* — az $\boldsymbol{r}$-et most a tengely és a G síkja metszéspontjától számítva és a (10)-et figyelembe véve —

$$\Gamma_v = \oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \oint_{(G)} (\bar{\omega} \times \boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} = \bar{\omega} \oint_{(G)} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = 2\,\bar{\omega}\, \boldsymbol{F} = 2\,\omega_v F \qquad (13a)$$

módon alakul, ahol $\boldsymbol{F} = \bar{\nu} F$ a G határolta síkrész területvektora (67a. ábra). Figyelemre

* A *többlet* szót algebrai értelemben használjuk (mint pl. a *növekmény* szót), tehát negatív is lehet!

méltó, hogy esetünkben — a (9) és a (12a) felhasználásával, továbbá az $\bar{\omega} = \bar{\omega}_t + \bar{\omega}_\nu$ jelöléssel —

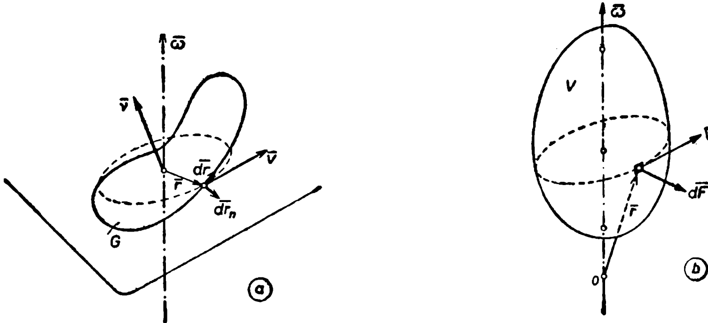
$$\Gamma = \oint_{(G)} d\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{v} = \oint_{(G)} d\boldsymbol{r}_n \times (\bar{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \oint_{(G)} [(\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r}_n)\, \bar{\omega} - (\bar{\omega}\, d\boldsymbol{r}_n)\boldsymbol{r}] =$$

$$2F\bar{\omega} - F\bar{\omega}_t = F(\bar{\omega} + \bar{\omega}_\nu). \tag{13b}$$

A (13a) és (13b) szoros kapcsolatát ($\Gamma_\nu = \bar{\Gamma}\,\bar{\nu}$) a

$$\bar{\nu}\,(d\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{v}) = (\bar{\nu} \times d\boldsymbol{r}_n)\,\boldsymbol{v} = ds\,\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}$$

körülmény teszi kézenfekvővé.



67. ábra

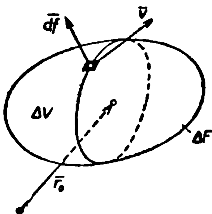
Végül a $\boldsymbol{v}$ (vektoriális) integrálja valamely, a tengely környezetében felvett zárt felületen — a (6) és a (8a) felhasználásával

$$\bar{\Gamma} = \oiint_{(F)} d\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} = \oiint_{(F)} d\boldsymbol{F} \times (\bar{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \oiint_{(F)} [(d\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{r})\,\bar{\omega} - (d\boldsymbol{F}\,\bar{\omega})\,\boldsymbol{r}] =$$

$$= \bar{\omega} \oiint_{(F)} \boldsymbol{r}\, dF - \oiint_{(F)} (\bar{\omega}\,\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{r}\, dF = \bar{\omega} \cdot 3V - \bar{\omega} V = 2V\bar{\omega} \tag{14}$$

alakot ölt (67b. ábra).

II°. A divergencia invariáns értelmezése. 1'. Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ az $\boldsymbol{r}_0$ hely környezetében folytonos és magán e helyen differenciálható függvény. Vegyünk fel e környezetben, az $\boldsymbol{r}_0$ hely körül egy tetszőleges, mérhető ΔF felszínű (és ΔV köbtartalmú térrészt határoló) kis zárt felületet. Képezzük $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér fluxusát e ΔF felületen; e ΔQ fluxust vonatkoztassuk ΔV-ről térfogategységre (vagyis oszszuk ΔV-vel); végül vegyük a $\Delta Q/\Delta V$ fajlagos fluxus határértékét, midőn a ΔV térrész egyenletesen (azaz $\max|\Delta\boldsymbol{r}| = \max|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| \to 0$ módon) az $\boldsymbol{r}_0$ pontra zsugorodik. Az így nyert



68. ábra

$$\left(\frac{dQ}{dV}\right)_0 = \lim_{\Delta V \to 0} {}_0 \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} {}_0 \frac{1}{\Delta V} \oiint_{(\Delta F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} = \frac{1}{d_0 V} \oiint_{(d_0 F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f}$$

határértéket, mely feltételeink mellett létezik, a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér $\boldsymbol{r}_0$ pontbeli divergenciájának nevezzük, és $\mathrm{div}_0\,\boldsymbol{v}$ módon jelöljük (68. ábra). Kimondható tehát az alábbi

Definíció. *A vektortér adott pontbeli* d i v e r g e n c i á-*ján a vektortér e pont körüli kis felületen vett fluxusa és a körülzárt térrész köbtartalma hányadosának határértékét értjük, midőn e térrész az adott pontra zsugorodik.* Jelekkel:

$$\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\!\oint_{(\Delta F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} = \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\!\oint_{(d_0 F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f}. \qquad (15)$$

Röviden *fajlagos lokális fluxus*nak nevezhetjük a divergenciát.

A divergencia értéke — e definíció értelmében — *invariáns* a koordinátarendszer választásával szemben; ezzel szemben alakja — mint a $\gamma)$ III°-ban látni fogjuk — más és más a különféle koordináta-rendszerekben.

2'. Térjünk ki a div $\boldsymbol{v}$ fizikai jelentésére! Ha $\boldsymbol{v}$ valamely közeg *áramlási intenzitás*-a [pl. folyadék $\varrho \boldsymbol{w}$ impulzus-sűrűsége (ahol ϱ sűrűség, $\boldsymbol{w}$ sebesség), hő $\boldsymbol{q}$ áramsűrűsége, elektromosság $\boldsymbol{i}$ áramsűrűsége], akkor — a I° 4' és a fentebbi definíció értelmében — a div $\boldsymbol{v}$ a *fajlagos lokális kiáramlási többlet*et szolgáltatja.

Természetesen a fizika felveti e közeg-többlet származásának kérdését. Ha a térben $e(\boldsymbol{r}) = \delta V/dV$ (fajlagos, lokális) bőségű *forrás-* (vagy nyelő-) *eloszlás* volna jelen, akkor a közeg $\varrho(\boldsymbol{r}, t)$ sűrűségének $d\varrho/dt$ (teljes) változási sebessége esetén — a d) $\beta)$ I°-belihez hasonló megfontolással — az

$$e = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

egyenlet* lenne érvényes. Eszerint a forrás hozama a közeg sűrűségének növelésére és a kiáramlási többlet fedezésére fordulna. Speciálisan $\varrho = 1$ esetén $e = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$ lenne, vagyis ekkor a div $\boldsymbol{v}$ a *fajlagos, lokális forrásbőség*et adná. Az *anyag*, illetve *energia-megmaradás elve* értelmében a valóságban a közegnek ilyen forrásai, nyelői nem léteznek, más szóval a közeg *forrásmentes* (és nyelőmentes), azaz $e = 0$, tehát egyenletünk a [d) $\alpha)$ és $\beta)$ helyeken tárgyalandó]

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

alakú, ún. *folytonossági egyenletbe* megy át. Ebből nyilvánvaló, hogy a div $\boldsymbol{v} = 0$ egyenlet csak *összenyomhatatlan közeg* (ϱ = const) esetén azonos a forrásmentesség előbbi egyenletével.

Megjegyzendő, hogy korlátos térrészben *mesterségesen* — külső közeg megfelelő odavezetése útján — megvalósítható a kívánt forráseloszlás, bár csak durva közelítéssel.

Más fizikai jelentésű és $|\boldsymbol{v}|$ sűrűségű vektorvonal-rendszerrel szemléltetett $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér (pl. elektromos, mágneses erőtér) esetén div $\boldsymbol{v}$ *a kilépő erővonal-fluxus fajlagos, lokális többletét* adja.

Megjegyzendő, hogy — a valóságos összenyomhatatlan közeg $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ áramlási terének analógiájára — a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

egyenlet *a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *vektortér forrásmentességének feltétele* néven használatos, a $\boldsymbol{v}$ fizikai jelentésétől függetlenül.

* L. pl. *Lagally* [M. 7.].

3'. A (15) határértéknek — az 1'-ben említett feltételek melletti — létezését egyelőre azzal igazoljuk, hogy előállítjuk a derékszögű koordináta-rendszerben érvényes alakját. (Később a 4. §. b) α) helyen ezt invariáns módszerrel is igazoljuk.)

Felhasználva a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény $\boldsymbol{r}_0$ helyi differenciálhatóságának ismert

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 \Delta\boldsymbol{r} + \bar{\varepsilon}\,\Delta\boldsymbol{r}; \quad \boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{v}_0 + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 d\boldsymbol{r}, \quad d\boldsymbol{r} \approx 0$$

feltételét, valamint az a) β) (9c) formula alapján előállítható

$$d\boldsymbol{F}\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i}\,dF_x + \boldsymbol{j}\,dF_y + \boldsymbol{k}\,dF_z)\left[dx\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right)_0 + dy\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\right)_0 + dz\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\right)_0\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dx\,dF_x + \ldots + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 dz\,dF_z + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 dx\,dF_y + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 dz\,dF_x$$

alakot, végül a (2c) és az (4a—c), (5a—f) integrálokat, *a* $\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v}$ *derékszögű koordinátás alakja* így adódik:

$$\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0 V}\oiint_{(d_0 F)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{f} = \frac{1}{d_0 V}\oiint_{(d_0 F)}\left[\boldsymbol{v}_0 + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 d\boldsymbol{r}\right] d\boldsymbol{f} =$$

$$= \frac{1}{d_0 V}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \oiint_{(d_0 F)} dx\,df_x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 \oiint_{(d_0 F)} dy\,df_y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 \oiint_{(d_0 F)} dz\,df_z\right] =$$

$$= \frac{1}{d_0 V}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right] d_0 V = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)_0, \tag{16}$$

amint ez már az a) β) II°-ből ismeretes előttünk. (Megjegyzendő, hogy itt az integrálást tetszőleges alakú mérhető és egyenletesen az $\boldsymbol{r}_0$ pontra zsugorodó zárt felületen végeztük.)

4'. Speciálisan, legyen *a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *vektortér planparalel*, azaz bizonyos S_ν síkkal párhuzamos és egy-egy S_ν-re merőleges egyenes mentén állandó; jelekkel:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,\bar{\nu} = 0 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + t\,\bar{\nu}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}),$$

ahol $\bar{\nu}$ az S_ν sík normálvektora.

Ekkor ΔF felületként célszerűen olyan lapos korong alakú felületet veszünk fel, amelynek az S_ν síkkal párhuzamos alapja valamely ΔG_ν síkgörbe határolta ΔT területű és az $\boldsymbol{r}_0$ pontot tartalmazó síkrész, a $\bar{\nu}$-ral párhuzamos magassága Δm. E korongot zsugorítjuk majd egyenletesen az $\boldsymbol{r}_0$ pontra.

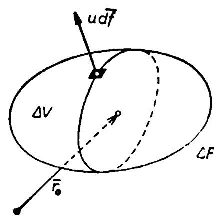
Ez esetben *a* $\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v}$ *definíciója*

$$\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v} = \lim_{\substack{\Delta m\to 0\\ \Delta T\to 0}}{}_0 \frac{1}{\Delta m\cdot\Delta T}\oiint_{(\Delta F)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}_n\,\Delta m = \frac{1}{d_0 T}\oint_{(d_0 G)_\nu} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}_n \tag{17}$$

alakban, azaz *görbementi integrállal* adható meg; ui. a korong alap- és fedőlapján

$$d\boldsymbol{f}_a = -\,d\boldsymbol{f}_f, \quad \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_f, \quad \text{tehát} \quad (\Delta F_a + \Delta F_f)\oint \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{f} = 0.$$

III°. A gradiens, a $\triangle$- és az $(s\nabla)$-operátor. 1'. Legyen $u(\boldsymbol{r})$ az $\boldsymbol{r}_0$ hely környezetében folytonos és magán e helyen differenciálható függvény. Integráljuk ezt az $\boldsymbol{r}_0$ körül felvett tetszőleges, mérhető ΔF felszínű (és ΔV térfogatot határoló) kis felületen; az $\Delta \boldsymbol{P} = (\Delta F) \oint u\, d\boldsymbol{f}$ integrált osszuk ΔV-vel, végül vegyük a $\Delta \boldsymbol{P}/\Delta V$ hányados határértékét, midőn a ΔV térrész egyenletesen (azaz $\max|\Delta \boldsymbol{r}| \to 0$ módon) az $\boldsymbol{r}_0$ pontra zsugorodik. Az így nyert



69. ábra

$$\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{dV}\right)_0 = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{(\Delta F)} u\, d\boldsymbol{f} = \frac{1}{d_0 V} \oiint_{(d_0 F)} u\, d\boldsymbol{f}$$

határértéket, mely feltételeink mellett létezik, az $u(\boldsymbol{r})$ skalártér $\boldsymbol{r}_0$ pontbeli gradiensének nevezzük és $\mathbf{grad}_0\, u$ módon jelöljük (69. ábra). Kimondható tehát az alábbi

Definíció. *A skalártér adott pontbeli gradiens-én a skalártér e pont körüli kis felületen vett integrálja és a körülzárt térrész köbtartalma hányadosának határértékét értjük, midőn e térrész az adott pontra zsugorodik.* Jelekkel:

$$\mathbf{grad}_0\, u = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{(\Delta F)} u\, d\boldsymbol{f} = \frac{1}{d_0 V} \oiint_{(d_0 F)} u\, d\boldsymbol{f}. \tag{18}$$

E definíció a $\mathbf{grad}_0\, u$-t a koordináta-rendszer választásával szemben *invariáns* vektorként értelmezi.

2'. A $\mathbf{grad}\, u$-nak — e definíció alapján — különösen szemléletes fizikai jelentés tulajdonítható, ha u nyomást jelent. Ekkor ugyanis — az I° 4' értelemszerű alkalmazásával — a $(\Delta F) \oint u\, d\boldsymbol{f}$ *a belső és külső nyomóerő eredő vektora* a ΔF felületen, a $\mathbf{grad}_0\, u$ pedig ugyanaz, a bezárt ΔV térfogatra nézve *fajlagosan* és az $\boldsymbol{r}_0$ pontra *lokalizálva.*

3'. A (18) határérték létezését — feltételeink mellett — itt azzal igazoljuk, hogy előállítjuk derékszögű koordinátás alakját.

Felhasználva az $u(\boldsymbol{r})$ függvény $\boldsymbol{r}_0$ helyi differenciálhatóságának ismert

$$u \approx u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \partial y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 dz, \qquad ds \approx 0$$

feltételét, továbbá a (2a) és a (4a—c), (5a—f) integrálokat, *a* $\mathbf{grad}_0\, u$ *derékszögű koordinátás alakja* így adódik:

$$\mathbf{grad}_0\, u = \frac{1}{d_0 V} \oiint_{(d_0 F)} u\, d\boldsymbol{f} = \frac{1}{d_0 V} \oiint_{(d_0 F)} \left[u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 dz\right] d\boldsymbol{f} =$$

$$= \frac{1}{d_0 V}\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \oiint_{(d_0 F)} dx\, df_x + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \oiint_{(d_0 F)} dy\, df_y + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \oiint_{(d_0 F)} dz\, df_z\right] =$$

$$= \frac{1}{d_0 V}\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0\right] d_0 V = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0, \tag{19}$$

összhangban az a) β) II°-vel és függetlenül az $\boldsymbol{r}_0$ pontra zsugorodó felület alakjától.

Megjegyzendő, hogy — a II° 4′-belihez hasonló megfontolással — *a* $\mathbf{grad}_0\, u$ *definíciója planparalel vektortérben*

$$\mathbf{grad}_0\, u = \frac{1}{d_0 T} \oint_{(d_0 G)} u\, d\boldsymbol{r}_n \tag{20}$$

módon, azaz *görbementi integrállal* adható meg.

4′. A $\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v}$ (15) definícióját a $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, u$-ra alkalmazva, *az* $u(\boldsymbol{r})$ *skalártér* $\boldsymbol{r}_0$ *pontbeli* LAPLACE-*kifejezés-ének definíciója* adódik:

$$\triangle_0\, u = \operatorname{div}_0 \mathbf{grad}\, u = \frac{1}{d_0 V} \oint_{(d_0 F)} \mathbf{grad}\, u\, d\boldsymbol{f}. \tag{21}$$

Meg lehet mutatni, hogy *a* LAPLACE-*kifejezés*

$$\triangle_0\, u = \frac{6}{d_0 I_p} \oint_{(d_0 F)} (u - u_0)\, df \qquad \left[d_0 I_p = \oint_{(d_0 F)} dr^2\, df\right] \tag{22}$$

módon, vagyis *a skáláreloszlás környezeti középeltérésének fajlagos lokális értékével arányos*an is értelmezhető.

5′. A $\mathbf{grad}_0\, u$ (18) definícióját az a) β) (9a, c) formulába bevezetve, *a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *vektortér* $\boldsymbol{r}_0$ *pontbeli* $\boldsymbol{s} = s\boldsymbol{s}^0$ *irány menti derivált-jának definíciója* így adódik:

$$s\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\right)_0 = (\boldsymbol{s}\,\nabla)_0\, \boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0 V} \oint_{(d_0 F)} (\boldsymbol{s}\,\boldsymbol{n})\, \boldsymbol{v}\, df. \tag{23}$$

Az utóbbi formulák planparalel vektortérben szintén görbementi integrállal adhatók meg.

IV°. A rotáció invariáns értelmezése. 1′. Legyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ az $\boldsymbol{r}_0$ hely környezetében folytonos, magán e helyen differenciálható függvény. Vegyünk fel e környezetben, az $\boldsymbol{r}_0$ körül egy tetszőleges, mérhető ΔF felszínű (és ΔV köbtartalmú térrészt határoló) kis zárt felületet. Képezzük most a $\Delta\boldsymbol{R} = \oint_{(\Delta F)} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v}$ integrált; ezt vonatkoztassuk ΔV-ről térfogategységre (vagyis osszuk ΔV-vel); végül vegyük a $\Delta\boldsymbol{R}/\Delta V$ hányados határértékét, midőn a ΔV térrész egyenletesen (azaz $\max|\Delta\boldsymbol{r}| \to 0$ módon) az $\boldsymbol{r}_0$ pontra zsugorodik. Az így nyert

$$\left(\frac{d\boldsymbol{R}}{dV}\right)_0 = \lim_{\Delta V \to 0}{}_0 \frac{\Delta\boldsymbol{R}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0}{}_0 \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Delta F)} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0 V} \oint_{(d_0 F)} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v}$$

határértéket, mely feltételeink mellett létezik, a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortér $\boldsymbol{r}_0$ pontbeli rotációjának nevezzük és $\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v}$ módon jelöljük (70a. ábra). Kimondható tehát az alábbi

Definíció. *A vektortér adott pontbeli rotáció-ján a vektortér e pont körüli kis felületen vett* $\oint\!\!\oint \boldsymbol{df}\times\boldsymbol{v}$ *alakú integrálja és a körülzárt térrész köbtartalma hányadosának határértékét értjük, midőn e térrész az adott pontra zsugorodik.* Jelekkel:

$$\mathbf{rot}_0\,\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{1}{\Delta V}\oint\!\!\oint_{(\Delta F)} \boldsymbol{df}\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\oint_{(d_0F)} \boldsymbol{df}\times\boldsymbol{v}. \tag{24}$$

Nyilvánvaló, hogy e definíció a $\mathbf{rot}_0\,\boldsymbol{v}$-t a koordináta-rendszer választásával szemben *invariáns* vektorként értelmezi.

2'. A (24) határérték létezését — feltételeink mellett — egyelőre azzal igazoljuk, hogy előállítjuk derékszögű koordinátás alakját. (Később, a 4. §. b) α) helyen ezt invariáns módszerrel is igazoljuk.)

Felhasználva a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény $\boldsymbol{r}_0$ helyi differenciálhatóságának ismert

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 \Delta\boldsymbol{r} + \bar{\varepsilon}\,\Delta\boldsymbol{r}; \qquad \boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{v}_0 + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 d\boldsymbol{r}, \qquad d\boldsymbol{r} \approx 0$$

feltételét, ahol az a) β) (9a) szerint

$$\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 = \boldsymbol{i}\left(\frac{du}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 + \boldsymbol{j}\left(\frac{dv}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 + \boldsymbol{k}\left(\frac{dw}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\boldsymbol{r}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\boldsymbol{r}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 + \ldots + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\boldsymbol{r}} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\boldsymbol{r}} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{d\boldsymbol{r}}\right)_0,$$

továbbá a (2c) és a (4a—c), (5a—f) integrálokat, *a* $\mathbf{rot}_0\,\boldsymbol{v}$ *derékszögű koordinátás alakja* így adódik:

$$\mathbf{rot}_0\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\oint_{(d_0F)} \boldsymbol{df}\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\oint_{(d_0F)} \boldsymbol{df}\times\left[\boldsymbol{v}_0 + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 d\boldsymbol{r}\right] =$$

$$= \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\oint_{(d_0F)} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ df_x & df_y & df_z \\ \left(\frac{du}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 & \left(\frac{dv}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 & \left(\frac{dw}{d\boldsymbol{r}}\right)_0 \end{vmatrix} d\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{i}}{d_0V}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \oint\!\!\oint_{(d_0F)} dy\,df_y - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 \oint\!\!\oint_{(d_0F)} dz\,df_z\right] +$$

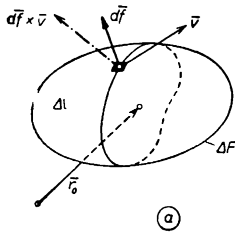
$$+ \ldots = \frac{\boldsymbol{i}}{d_0V}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0\right] d_0V + \ldots = \left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]_0, \tag{25}$$

összhangban az a) β) II°-vel és függetlenül az $\boldsymbol{r}_0$ pontra zsugorodó felület alakjától.

3'. Képezzük most *a* $\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v}$ *vektor* $\bar{\nu}$ *irányú vetületét!* Célszerűen egy $\bar{\nu}$-vel párhuzamos alkotójú, ΔT alapú, ΔG vezérgörbéjű, Δm magasságú egyenes hengerre alkalmazva a (24) formulát, és figyelembe véve, hogy az alap- és fedőlapon ($\bar{\nu} \| \boldsymbol{df}_a$, $\boldsymbol{df}_f$ miatt)

$$\bar{\nu}(\boldsymbol{df}_a \times \boldsymbol{v}) = \bar{\nu}(\boldsymbol{df}_f \times \boldsymbol{v}) = 0,$$



a palástfelületen pedig

$$\bar{\nu}(\boldsymbol{df}_p \times \boldsymbol{v}) = (\bar{\nu} \times \boldsymbol{df}_p)\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{dr}\, \delta m \cdot \boldsymbol{v},$$

ezt írhatjuk:

$$(\mathrm{rot}_\nu\, \boldsymbol{v})_0 = \mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v} \cdot \bar{\nu} = \lim_{\Delta V \to 0}{}_0 \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\!\oint_{(\Delta F)} \bar{\nu}(\boldsymbol{df} \times \boldsymbol{v}) =$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0}{}_0 \frac{1}{\Delta V} \iint_{(\Delta F_p)} \bar{\nu}(\boldsymbol{df}_p \times \boldsymbol{v}) = \lim_{\substack{\Delta T \to 0 \\ \Delta m \to 0}}{}_0 \frac{1}{\Delta T\, \Delta m} \int_0^{\Delta m} \left[\oint_{(\Delta G)_\nu} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr} \right] \delta m =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta T \to 0 \\ \Delta m \to 0}}{}_0 \frac{1}{\Delta T} \left[\oint_{(\Delta G)_\nu} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr} \right]_k = \frac{1}{d_0 T} \oint_{(d_0 G)_\nu} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr} \left(= \frac{d_0 \Gamma}{d_\nu T} \right).$$

Végeredményben:

$$(\mathrm{rot}_\nu\, \boldsymbol{v})_0 = \frac{1}{d_0 T} \oint_{(d_0 G)_\nu} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}. \tag{26}$$

(b)

70. ábra

A $(\mathrm{rot}_\nu\, v)_0$ tehát *görbementi integrállal állítható elő,* mégpedig (a $\boldsymbol{d}_0\boldsymbol{T} = d_0 T\, \bar{\nu}$ vektorú területelem $d_0 G$ peremgörbéjén vett és területegységre vonatkoztatott, tehát) *lokális, fajlagos cirkulációként* (70b. ábra).

4'. Megjegyzendő, hogy — a II° 4'-belihez hasonló megfontolással — *a* $\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v}$ *definíciója planparalel vektortérben*

$$\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v} = \lim_{\substack{\Delta m \to 0 \\ \Delta T \to 0}}{}_0 \frac{1}{\Delta m\, \Delta T} \oint_{(\Delta G)_\nu} \Delta m\, \boldsymbol{dr}_n \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0 T} \oint_{(d_0 G)_\nu} \boldsymbol{dr}_n \times \boldsymbol{v} \tag{27}$$

alakban, vagyis *görbementi integrállal* adható meg, ahol $\boldsymbol{dr}_n = ds\, \boldsymbol{n}$ a ΔG görbe főnormális irányú ívelem-vektora, $\bar{\nu}$ pedig a $d_0 T$ területelem normálvektora: ui. a korong alap- és fedőlapján $\boldsymbol{df}_a = -\boldsymbol{df}_f$, $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_f$, tehát $(\Delta F_a + \Delta F_f) \iint \boldsymbol{df} \times \boldsymbol{v} = 0$.

5'. Végül térjünk ki a $\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v}$ vektor fizikai jelentésére, midőn $\boldsymbol{v}$ valamely mozgás, áramlás *sebessége.* Az I° 5'-ben láttuk, hogy a merev test rögzített tengely körüli, $\bar{\omega}$ szögsebesség vektorú forgásának $\boldsymbol{v} = \bar{\omega} \times \boldsymbol{r}$ sebességterére vonatkozólag

$$2\bar{\omega} = \frac{1}{V} \oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{dF} \times \boldsymbol{v}, \quad 2\omega_\nu = \frac{1}{T} \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}.$$

Összevetve ezeket a (24) és a (26) formulával, látható, hogy az utóbbiak az előbbiek lokális alakjai és bennük $\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v}$-nek $2\bar{\omega}$ felel meg. Megállapítható tehát, hogy $\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v}$

a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ sebességtér *lokális kétszeres szögsebesség-vektora* a $\boldsymbol{r}_0$ helyen, amelynek elenyészően kis környezetében a $\boldsymbol{v}$ növekményének forgási komponense*

$$d\boldsymbol{v}_f = \frac{1}{2}\,\mathbf{rot}_0\,\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{r} \tag{28}$$

módon állítható elő.

Más fizikai jelentésű $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ vektortérben nincs szó tényleges forgásról, örvénylésről, csak a vektortér (28) szerinti lokális felépítéséről. Pl. kvazistacionáris elektromos áramban a mágneses tér lokálisan ($\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{i}$ miatt)

$$d\boldsymbol{H}_f = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{i}_0\times d\boldsymbol{r}$$

szerkezetű.

V°. A n a b l a i n v a r i á n s é r t e l m e z é s e. 1'. Írjuk fel együttesen a $\mathbf{grad}_0\,u$, $\mathrm{div}_0\,u$, $\triangle_0\,u$, $(\boldsymbol{s}\,\nabla)_0\,\boldsymbol{v}$, $\mathbf{rot}_0\,\boldsymbol{v}$ nablás és invariáns alakját:

$$\nabla_0\,u = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} d\boldsymbol{f}\,u, \qquad \nabla_0\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} d\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{v},$$

$$\nabla_0(\nabla\,u) = \triangle_0\,u = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} d\boldsymbol{f}\,(\nabla\,u), \qquad (\boldsymbol{s}\,\nabla)_0\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} (\boldsymbol{s}\,d\boldsymbol{f})\,\boldsymbol{v},$$

$$\nabla_0\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} d\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{v}.$$

Szembeötlő, hogy minden egyes esetben a ∇_0 és az $\frac{1}{d_0V}\oint\!\!\oint_{(d_0F)} d\boldsymbol{f}$ vektor-operátorral egy-egy azonos művelet végzendő az u, illetve a $\boldsymbol{v}$ függvényen. Ezen integrálban kétségtelenül a ∇_0 *invariáns* értelmezését ismerhetjük fel. Kimondható tehát az alábbi

Definíció. *A n a b l a differenciál-operátor adott pontbeli vektorán az e pont körüli kis zárt felület vektora és a körülzárt térfogat hányadosának határértékét értjük, hangsúlyozva, hogy e szimbolikus vektor csak valamilyen skalár- vagy vektormennyiséggel szorozva bír értelemmel.* Jelekkel:

$$\boxed{\nabla_0\ldots = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} d\boldsymbol{f}\ldots} \tag{29}$$

2'. A IV° 3'-belihez hasonló meggondolással *a* ∇_0 *definíciója planparalel vektortérben*

$$\nabla_0\ldots = \frac{1}{d_0T}\oint_{(d_0G)_v} d\boldsymbol{r}_n\ldots \tag{30}$$

módon, azaz *görbementi integrállal* adható meg.

* Mint a 4. §. b) a)-ban megmutatjuk, a $d\boldsymbol{v}$-nek van egy $d\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{D}\,;d\boldsymbol{r}$ alakú ,ún. alakváltozási komponense is.

Példák és feladatok

1. Szemléltessük az I° 2′-ban tanult (zárt felületre, illetve görbére vonatkozó) integrálformulák érvényességét, a következő adatok mellett:

A) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, a\,(1 + \cos u \cos v) + \boldsymbol{j}\, a \cos u \sin v + \boldsymbol{k}\, a \sin u$, $-\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2$, $0 \leqq v < 2\pi$: a sugarú és $\boldsymbol{i}\, a$ középpontú teljes gömbfelület; $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}$.

B) $\boldsymbol{r} = 2\, \boldsymbol{i}\, a \cos^2 t + 2 \boldsymbol{j}\, a \cos t \sin t$, $-\pi/2 \leqq t \leqq \pi/2$: a sugarú és $\boldsymbol{i}\, a$ középpontú teljes körív; $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{j}$.

Megoldás. A) $\boldsymbol{r}_u = -\boldsymbol{i}\, a \sin u \cos v - \boldsymbol{j}\, a \sin u \sin v + \boldsymbol{k}\, a \cos u$,

$\boldsymbol{r}_v = -\boldsymbol{i}\, a \cos u \sin v + \boldsymbol{j}\, a \cos u \cos v$,

$$(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a \sin u \cos v & -a \sin u \sin v & a \cos u \\ -a \cos u \sin v & a \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix} du\, dv =$$

$$= (-\boldsymbol{i}\, a^2 \cos^2 u \cos v - \boldsymbol{j}\, a^2 \cos^2 u \sin v - \boldsymbol{k}\, a^2 \cos u \sin u)\, du\, dv =$$

$$= -(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}\, a)\, a \cos u\, du\, dv = -\boldsymbol{dF} \text{ (belső normális)}:$$

$$\oint\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{dF} = \boldsymbol{i}\, a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \cos v\, du\, dv + \boldsymbol{j}\, a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin v\, du\, dv +$$

$$+ \boldsymbol{k} \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin 2u\, du\, dv = \boldsymbol{0},$$

$$\left(\text{mert} \int_0^{2\pi} \cos v\, dv = \int_0^{2\pi} \sin v\, dv = 0, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2u\, du = 0\right),$$

összhangban a (2a) formulával.

$$\oint\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{dF} = \oint\!\!\oint_{(F)} (x\, dF_x + y\, dF_y + z\, dF_z) =$$

$$= a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} [(\cos^2 u \cos v + \cos^3 u \cos^2 v) + \cos^3 u \sin^2 v + \cos u \sin^2 u]\, du\, dv =$$

$$= 8\, a^3 \left[\left(0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3}\right] = \frac{4\, a^3 \pi}{3} (1 + 1 + 1) = 4\, a^3 \pi = 3\, V,$$

összhangban a (4a, b, c) és a (6) formulával.

$$\oint\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{dF} = \oint\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}\, a)\, a \cos u\, du\, dv =$$

$$= a^2 \oint\!\!\oint_{(F)} (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{r}) \cos u\, du\, dv = a^2 \oint\!\!\oint_{(F)} (-\boldsymbol{j}\, z + \boldsymbol{k}\, y) \cos u\, du\, dv =$$

$$= -\boldsymbol{j}\, a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin u \cos u\, du\, dv + \boldsymbol{k}\, a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin v\, du\, dv = \boldsymbol{0},$$

megegyezésben a (7) formulával.

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} (\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{r}\,dF = a \oint\!\!\!\oint_{(F)} [\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}\,a)]\,\boldsymbol{r} \cos u\,du\,dv =$$

$$= a \oint\!\!\!\oint_{(F)} z\,\boldsymbol{r} \cos u\,du\,dv = a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} [\boldsymbol{i}\,(\sin u \cos u + \cos^2 u \sin u \cos v) +$$

$$+ \boldsymbol{j} \cos^2 u \sin u \sin v + \boldsymbol{k} \sin^2 u \cos u]\,du\,dv = \boldsymbol{k} \cdot 2\pi\,a^3 \left[\frac{\sin^3 u}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \boldsymbol{k} \cdot 2\pi\,a^3 \cdot \frac{2}{3} = \boldsymbol{k} \cdot \frac{4\,a^3\,\pi}{3} = \boldsymbol{k}\,V,$$

megegyezésben a (8a) formulával.

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} (\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{n}\,dF = a \oint\!\!\!\oint_{(F)} z\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}\,a) \cos u\,du\,dv = a \oint\!\!\!\oint_{(F)} z\,\boldsymbol{r} \cos u\,du\,dv$$

$$- \boldsymbol{i}\,a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin u \cos u\,du\,dv = \boldsymbol{k}\,V - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{k}\,V,$$

összhangban a (8b) formulával.

B) $\dot{\boldsymbol{r}} = -2\,\boldsymbol{i}\,a \sin 2t + 2\,\boldsymbol{j}\,a \cos 2t, \quad d\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}\,dt;$

$$\oint_{(G)} d\boldsymbol{r} = 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [-\boldsymbol{i} \sin 2t + \boldsymbol{j} \cos 2t]\,dt = a \int_{-\pi}^{\pi} [-\boldsymbol{i} \sin u + \boldsymbol{j} \cos u]\,du = \boldsymbol{0},$$

összhangban a (3a) formulával.

$$s = \int_0^t |\dot{\boldsymbol{r}}|\,d\tau = \int_0^t 2a\,d\tau = 2\,at, \quad 2t = s/a;$$

$$\boldsymbol{r}' = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{2a} = -\boldsymbol{i} \sin \frac{s}{a} + \boldsymbol{j} \cos \frac{s}{a}, \quad \boldsymbol{r}'' = \frac{\boldsymbol{n}}{a} = \frac{1}{a}\left(-\boldsymbol{i} \cos \frac{s}{a} - \boldsymbol{j} \sin \frac{s}{a}\right),$$

$$d\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{n}_k\,ds = -\boldsymbol{n}\,ds = \left(\boldsymbol{i} \cos \frac{s}{a} + \boldsymbol{j} \sin \frac{s}{a}\right) ds \text{ (külső normális);}$$

$$\oint_{(G)} d\boldsymbol{r}_n = \int_{-a\pi}^{a\pi} \left(\boldsymbol{i} \cos \frac{s}{a} + \boldsymbol{j} \sin \frac{s}{a}\right) ds = a \int_{-\pi}^{\pi} (\boldsymbol{i} \cos u + \boldsymbol{j} \sin u)\,du = \boldsymbol{0},$$

megegyezésben a (3e) formulával.

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\,\boldsymbol{i}\,a \cos^2 t + \boldsymbol{j}\,a \sin 2t)\,(\boldsymbol{i} \cos 2t + \boldsymbol{j} \sin 2t)\,2a\,dt =$$

$$= 2\,a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos^4 t - 2 \cos^2 t \sin^2 t + 4 \sin^2 t \cos t \cos^2 t)\,dt = 8\,a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= 8\,a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\,a^2\,\pi = 2F,$$

megegyezésben a (9) formulával.

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\,\boldsymbol{i}\,a\cos^2 t + \boldsymbol{j}\,a\sin 2t)\times(-2\,\boldsymbol{i}\,a\sin 2t + 2\,\boldsymbol{j}\,a\cos 2t)\,dt =$$

$$= \boldsymbol{k}\,a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\sin^2 2t + 2\cos^2 2t + 2\cos 2t)\,dt = 8\,\boldsymbol{k}\,a^2 \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= 8\,\boldsymbol{k}\,a^2\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{k}\cdot 2\,a^2\pi = \boldsymbol{k}\cdot 2\,F = 2\,\boldsymbol{F},$$

összhangban a (10) formulával.

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\,\boldsymbol{i}\,a\cos^2 t + \boldsymbol{j}\,a\sin 2t)\times(\boldsymbol{i}\cos 2t + \boldsymbol{i}\sin 2t)\cdot 2a\,dt =$$

$$= 2\boldsymbol{k}\,a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin 2t\cos 2t + 2\cos^2 t\sin 2t)\,dt = \boldsymbol{0},$$

megegyezésben a (11) formulával.

$$\oint_{(G)} (\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{n}_k)\,\boldsymbol{r}\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2t\cdot(2\,\boldsymbol{i}\,a\cos^2 t + \boldsymbol{j}\,a\sin 2t)\cdot 2a\,dt =$$

$$= 2a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\,\boldsymbol{i}\cos^2 t\sin 2t + \boldsymbol{j}\sin^2 2t)\,dt = 4\,\boldsymbol{j}\,a^2 \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 u\,du =$$

$$= 4\,\boldsymbol{j}\,a^2\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{j}\cdot a^2\pi = \boldsymbol{j}\,F,$$

összhangban a (12a) formulával.

$$\oint_{(G)} (\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{n}_k\,ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\sin 2t\,(\boldsymbol{i}\cos 2t + \boldsymbol{j}\sin 2t)\cdot 2a\,dt =$$

$$= 2\,a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\boldsymbol{i}\sin 2t\cos 2t + \boldsymbol{j}\sin^2 2t)\,dt = 4\,\boldsymbol{j}\,a^2 \int_{0}^{\pi/2} \sin^2 u\,du = \boldsymbol{j}\,a^2\pi = \boldsymbol{j}\,F,$$

megegyezésben a (12b) formulával.

2. Számítsuk ki

A) a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$ vektortér fluxusát a $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}\,a)^2 = a^2$ (zárt) gömbfelületen át;

B) a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}$ vektortér cirkulációját az $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}\,a)^2 = a^2$, $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{k}$ (zárt) körív mentén.

Adjuk meg az eredmények fizikai értelmezését! (Megjegyzendő, hogy e gömbfelület és körív megegyezik az 1. példabelivel.)

Megoldás. A) A $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$ függvény integrálandó az

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}a)^2 - a^2 = r^2 - 2\,ax + a^2 - a^2 = r^2 - 2\,ax = 0$$

(zárt) gömbfelületen:

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}a}{a}\, dF = \frac{1}{a} \oint\!\!\!\oint_{(F)} (r^2 - ax)\, dF =$$

$$= \frac{1}{a} \oint\!\!\!\oint_{(F)} ax\, dF = \oint\!\!\!\oint_{(F)} x\, dF = x_s F = a F = 4\, a^3 \pi = 3\, V,$$

megegyezésben az 1. A) példában számított $\oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{F}$ eredményével.

Ha a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$ vektortér valamely közeg áramlási intenzitása, akkor — a 4′-ben tanultak szerint — az $(F) \oint\!\!\!\oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}$ integrál az F zárt felületen át, időegység alatt kiömlő (pozitív) közegmennyiség (algebrai) többletét adja a beömlőhöz (negatív) képest, röviden a kiáramlási többletet. Ez most láthatóan a gömb térfogatának 3-szorosa (időegység alatt).

Ha $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$ valamely más fizikai jelentésű vektortér, akkor — a 4′-ben mondottak értelmében — integrálunk az F zárt felületen kilépő vektorvonal-fluxus (algebrai) többletét szolgáltatja a belépőhöz képest.

B) A $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}$ függvény integrálandó a

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{i}a)^2 - a^2 = r^2 - 2\,ax + a^2 - a^2 = r^2 - 2\,ax = 0, \quad z = 0$$

(zárt) körív mentén:

$$\Gamma_k = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \oint_{(G)} (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k} \oint_{(G)} \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k} \cdot 2\boldsymbol{F} = 2\,F = 2\,a^2 \pi,$$

továbbá

$$\overline{\Gamma}_k = \oint_{(G)} d\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{v} = \oint_{(G)} d\boldsymbol{r}_n \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k} \oint_{(G)} \boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r}_n - \oint_{(G)} (\boldsymbol{k}\, d\boldsymbol{r}_n)\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k} \cdot 2\,F = 2\,\boldsymbol{F},$$

összhangban a (13) és (14) formulával.

Ha $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ valamely mozgás, áramlás sebességvektortere, akkor — a 4′-ben tanultaknak megfelelően — a Γ_k integrál a körívmenti átlagos tangenciális sebesség,

$$v_{tá} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a \cos t \cdot \cos t\, dt = \frac{4a}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{4a}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = a,$$

valamint a $2a\,\pi$ körkerület szorzata. Esetünkben $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}$, vagyis merev test $\overline{\omega} = \boldsymbol{k}$ szögsebesség-vektorú forgásáról van szó, és mivel most $\overline{\omega} = \nu$, ezért $\overline{\Gamma}_v = \overline{\Gamma} = 2\,F\,\overline{\omega}$ maga az F felületi örvényvektor.

3. Számítsuk ki — az invariáns definíció alapján — az alábbi vektorterek divergenciáját és rotációját:

A) $\boldsymbol{v} = r^n \boldsymbol{r}$; B) $\boldsymbol{v} = r^n \boldsymbol{a}$; C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \ln r$.

Adjuk meg az eredmények fizikai értelmezését, feltéve, hogy $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ valamely összenyomhatatlan folyadék sebességvektortere.

Megoldás. A (15) és (24) alatt tanult

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{dV} \oint\!\!\!\oint_{(dF)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{1}{dV} \oint\!\!\!\oint_{(dF)} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v}$$

formulát alkalmazzuk, tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pont körül alkalmasan felvett térfogatelemre.

Az említett vektortérben div $\boldsymbol{v}$ a forrás- (nyelő-) eloszlás lokális, fajlagos intenzitása, a **rot** $\boldsymbol{v}$ pedig az örvényeloszlás lokális, kétszeres szögsebesség-vektora.

A) A térfogatelem most célszerűen a $d\omega$ térszögű kúpból az r és $r + dr$ sugarú gömbfelület által kimetszett térrész, tehát

$$dV = r^2\, d\omega\, dr, \quad d\boldsymbol{f}_g \,||\, \boldsymbol{v}, \quad d\boldsymbol{f}_k \perp \boldsymbol{v}.$$

A vektortér divergenciája:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} \{ [r^{n+1} + (n+1)\, r^n\, dr]\, (r^2 + 2r\, dr)\, d\omega - r^{n+1} \cdot r^2\, d\omega \} =$$

$$= \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} [(n+1)\, r^n + 2\, r^n]\, r^2\, d\omega\, dr = (n+3)\, r^n,$$

ahol felhasználtuk a binomiális tételt és a kettőnél magasabbrendűen elenyésző tagokat elhanyagoltuk.

A div $\boldsymbol{v} = (n+3)\, r^n$ eredmény szerint összenyomhatatlan folyadék $\boldsymbol{v} = r^n \cdot \boldsymbol{r}$ sebességvektortere $n \gtrless -3$ esetén az O origótól mért távolság n-edik hatványával arányos fajlagos intenzitású forrás (illetve $n < -3$ esetén nyelő-) eloszlást igényel.

Az $n = -3$ esetben a tér forrásmentes, csupán az O-ban szükséges (bármely $\overline{OP} = r$ sugarú gömbfelületi fluxussal mérve)

$$Q = \oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{r}\, r^{-3} \cdot \boldsymbol{r}\, r\, d\omega = r^0 \int_0^{4\pi} d\omega = 4\pi = \text{const}$$

abszolút intenzitású pontszerű forrás; (ez jól realizálható időegységenként 4π térfogategységnyi folyadéknak az O-hoz való vezetése és szétáramoltatása útján). Az $n = 0$ esetben div $v = 3$, tehát olyan homogén forráseloszlás szükséges, amelynek bármely V térfogatú része időegységenként $3\,V$ térfogatú folyadékot termel. Tetszőleges n-nél az $\overline{OP} = r$ sugarú gömb belsejében, div $\boldsymbol{v} = (n+3)\, r^n$ eloszlással létesítendő forrásoknak ($n \geqq -3$) időegységenként összesen

$$Q = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \int_0^r (n+3)\, \varrho^n \cdot 4\, \varrho^2\, \pi\, d\varrho = 4\pi\, r^{n+3} = f(r)$$

térfogatú folyadékot kell szolgáltatniok, amely mennyiség — a folyadék feltételezett összenyomhatatlansága miatt — éppen egyenlő a gömbfelületen kiömlő

$$Q = \oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \oint\!\!\!\oint_{(F)} r^n \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}\, r\, d\omega = 4\pi\, r^{n+3}$$

fluxussal. (Természetesen e térbeli folytonos forráseloszlások csak korlátos térrészben, ott is csak durva közelítéssel, néhány ponthoz külső folyadék odavezetése útján realizálhatók.)

Hangsúlyozandó, hogy a valóságban magától (külső hozzávezetés nélkül) a $\boldsymbol{v} = r^n\, \boldsymbol{r}$ áramlási tér nem jöhet létre, mert — az anyagmegmaradás elve értelmében — az anyagnak (folyadéknak) sem forrásai, sem nyelői nincsenek.

A vektortér rotációja:

$$\text{rot}\, \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} \cdot r^n\, dr \oint_{(dG)} d\boldsymbol{r}_n \times (\boldsymbol{r}_k + \overline{d\varrho}) = \frac{r^{n-2}}{d\omega} \oint_{(dG)} d\boldsymbol{r}_n \times \overline{d\varrho} = \boldsymbol{0},$$

ahol $\overline{d\varrho}$-val jelöltük az $r^2\, d\omega$ alapidom $\boldsymbol{r}$ pontjából határgörbéjéhez vont helyzetvektorokat és felhasználtuk a (11) formulát.

A $\text{rot}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ értelmében a $\boldsymbol{v} = r^n\, \boldsymbol{r}$ sebességvektortér örvénymentes.

Eredményeink megegyeznek az a) β) 4. A) példában más úton nyert eredményekkel.

B) A térfogatelem itt az $\boldsymbol{a}$ vektorral párhuzamos alkotójú, df_a alapú és dm magasságú henger, tehát

$$dV = df_a\, dm, \quad d\boldsymbol{f}_a = d\boldsymbol{f}_f \parallel \boldsymbol{v}, \quad d\boldsymbol{f}_p \perp \boldsymbol{v}.$$

A vektortér divergenciája:

$$\text{div}\, \boldsymbol{v} = \frac{1}{df_a\, dm} [- r^n\, a\, df_a + (r^2 + dm^2 + 2\, dm\, \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}^0)^{\frac{n}{2}}\, a\, df_f] =$$

$$= \frac{1}{df_a\, dm} \left[- r^n\, a\, df_a + \left(r^n + \frac{n}{2} \cdot r^{n-2} \cdot 2\, dm\, \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}^0 \right) a\, df_a \right] = n r^{n-2} (\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{a}),$$

ahol felhasználtuk a cosinus-tételt, a binomiális tételt és a kettőnél magasabbrendűen elenyésző tagokat elhanyagoltuk.

A vektortér rotációja:

$$\text{rot}\, \boldsymbol{v} = \frac{1}{df_a\, dm} \cdot dm \oint_{(dG)} d\boldsymbol{r}_n \times [r^n + n r^{n-2} (\overline{d\varrho}\, \boldsymbol{r})]\, \boldsymbol{a} =$$

$$= - \boldsymbol{a} \frac{n r^{n-2}}{df_a} \times \oint_{(dG)} (\overline{d\varrho}\, \boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}_n = - \boldsymbol{a} \frac{n r^{n-2}}{df_a} \times d\boldsymbol{f}_a\, \boldsymbol{r}_m = n r^{n-2} (\boldsymbol{r}_m \times \boldsymbol{a}) =$$

$$= n r^{n-2}\, [(\boldsymbol{r}_m + \boldsymbol{r}_a) \times \boldsymbol{a}\,] = n r^{n-2} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}),$$

ahol $\boldsymbol{r}_a$-val $\boldsymbol{r}$-nek $\boldsymbol{a}$ irányú, $\boldsymbol{r}_m$-mel $\boldsymbol{a}$-ra merőleges komponensét jelöltük, $\overline{d\varrho}$-val pedig a df_a alapidom $\boldsymbol{r}$ pontjából határgörbéjéhez vont helyzetvektorokat, továbbá az előbbi tételekkel és elhanyagolással dolgoztunk.

Eredményeink megegyeznek az a) β) 4. B) példában nyertekkel.

Fizikai értelmezésre az $n = 2$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}$, $z = 0$ speciális esetet választjuk, ahol tehát

$$\boldsymbol{v} = r^2 \boldsymbol{i}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 2(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{i}) = 2x, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{i}) = -\,2\,\boldsymbol{k}y.$$

A ($z = 0$ síkbeli) sebességvektormező $\boldsymbol{i}$ irányú és $r^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ nagyságú vektorokból áll (63a. ábra).

A szükséges forrás- és nyelőeloszlás a ($z = 0$ síkbeli) pontok kétszeres x abszcisszájával egyenlő fajlagos intenzitású lokális forrásokból ($x > 0$) és nyelőkből ($x < 0$) épül fel (63b. ábra). [E (folytonos) forrás- és nyelőeloszlás szintén csak külső folyadék néhány ponthoz való odavezetésével realizálható durva közelítéssel, magától nem jöhet létre.] A $r = a$, $x > 0$ félkörbeli forrásoknak időegységenként összesen

$$Q = \oint\!\!\oint_{(T)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dT = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^a 2r \cos\varphi \cdot r\, dr\, d\varphi = \frac{4\,a^3}{3}$$

mennyiségű* folyadékot kell termelniök, amely — az összenyomhatatlanság miatt — megegyezik a félkör teljes kerületén vett

$$Q = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}_n = \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \boldsymbol{i} \cdot a\, \boldsymbol{r}^0\, d\varphi + \int_{-a}^{a} y^2 \boldsymbol{i} \cdot (-\,\boldsymbol{i}\, dy) =$$

$$= a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi - \int_{-a}^{a} y^2\, dy = 2\,a^3 - \frac{2\,a^3}{3} = \frac{4\,a^3}{3}$$

fluxussal.

Ez esetben — szemben az A) példában tárgyalt esettel — a forrás- és nyelőeloszláson kívül örvényeloszlás is szükséges a vektormező létrehozására. Az örvényeloszlás $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = -\,2\,\boldsymbol{k}y$ kétszeres szögsebesség-vektorú lokális örvényekből áll (63b. ábra). Ezek eredőjének nagysága az $r = a$, $y > 0$ félkörben

$$\oint\!\!\oint_{(T)} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{T} = \int_0^{\pi} \int_0^a -\,2\,\boldsymbol{k}\, r \sin\varphi \cdot \boldsymbol{k}\, r\, dr\, d\varphi = -\,\frac{4\,a^3}{3};$$

ez megegyezik a félkör teljes kerületén vett

$$\Gamma = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \int_0^{\pi} a^2 \boldsymbol{i} \cdot a\, \boldsymbol{t}^0\, d\varphi + \int_{-a}^{a} x^2 \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}\, dx =$$

$$= -\,a^3 \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi + \int_{-a}^{a} x^2\, dx = -\,2\,a^3 + \frac{2\,a^3}{3} = -\,\frac{4\,a^3}{3}$$

cirkulációval.

* Pontosabban területű, mert most síkbeli vektormezővel van dolgunk.

C) A B)-beli térfogatelemet, segédeszközöket és megfontolásokat alkalmazzuk. Eredmények:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}}{r^2}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}}{r^2}.$$

4. Számítsuk ki — az invariáns definíció alapján — az alábbi vektorterek rotációjának $\boldsymbol{k}$ irányú vetületét.

A) $\boldsymbol{v} = r^n \boldsymbol{r}$; B) $\boldsymbol{v} = r^n \boldsymbol{a}$; C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \ln r$.

Megoldás. A (27) alatt tanult

$$\operatorname{rot}_\nu \boldsymbol{v} = \frac{1}{dT} \oint\limits_{(dG)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}$$

formulát alkalmazzuk, a tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pont mint középpont körül rajzolt $d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{k}\, d\varrho^2 \pi$ területvektorú körre.

A) $$\operatorname{rot}_k \boldsymbol{v} = \frac{1}{d\varrho^2 \pi} \oint\limits_{(dG)} (r^2 + d\varrho^2 + 2\,\boldsymbol{r}\,\overline{d\varrho})^{\frac{n}{2}} (\boldsymbol{r} + d\varrho)\, d\boldsymbol{r} =$$

$$= \frac{1}{d\varrho^2 \pi} \oint\limits_{(dG)} (r^n + n\, r^{n-2}\, \boldsymbol{r}\,\overline{d\varrho})\, \boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r} = \frac{1}{d\varrho^2 \pi}\left[r^n\, \boldsymbol{r} \oint\limits_{(dG)} d\boldsymbol{r} + n\, r^{n-2} \oint\limits_{(dG)} (\boldsymbol{r}\,\overline{d\varrho})\,.\,(\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r})\right] =$$

$$= \frac{1}{d\varrho^2 \pi}\left[0 - n\, r^{n-2} \cdot r_t^2\, d\varrho^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos\tau \cdot \sin\tau\, d\tau\right] = 0,$$

összhangban az előbbi példában nyert eredménnyel.

B) $$\operatorname{rot}_k \boldsymbol{v} = \frac{1}{d\varrho^2 \pi} \oint\limits_{(dG)} (r^n + n\, r^{n-2}\, \boldsymbol{r}\, \overline{d\varrho})\, \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}}{d\varrho^2 \pi}\left[r^n \oint\limits_{(dG)} d\boldsymbol{r} + n\, r^{n-2} \oint\limits_{(dG)} (\boldsymbol{r}\ d\varrho)\, d\boldsymbol{r}\right] = \frac{\boldsymbol{a}}{d\varrho^2 \pi}\ [0 + n\ r^{n-2} \cdot d\varrho^2 \pi\ (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r})] =$$

$$= n\, r^{n-2}\, \boldsymbol{a}\, (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}) = n\, r^n\, (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})\, \boldsymbol{k},$$

összhangban az előző példában nyert eredménnyel; itt felhasználtuk a zárt síkgörbére érvényes és a (12a, b)-vel rokon

$$\oint\limits_{(G)} (\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{\nu}^0 \times \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{F}$$

összefüggést.

C) $$\operatorname{rot}_k \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{k}}{r^2}.$$

5. Számítsuk ki — az invariáns definíció alapján — az alábbi skalárterek gradiensét és LAPLACE-kifejezését:

A) $u = r^n$; B) $u = \ln r$; C) $u = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})\, r^2$.

Megoldás. A (18) és (21) alatt megismert

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{1}{dV} \oint\!\!\oint_{(dF)} u\, \boldsymbol{df}, \quad \Delta u = \frac{1}{dV} \oint\!\!\oint_{(dF)} \mathbf{grad}\, u\, \boldsymbol{df}$$

formulát alkalmazzuk, tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pont körül alkalmasan felvett térfogatelemre.

A) A térfogatelem most célszerűen a $d\omega$ térszögű kúpból az r és $r + dr$ sugarú gömbfelület által kimetszett térrész, tehát $dV = r^2\, d\omega\, dr$.

A skalártér gradiense:

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} \left\{ [(r^n + n\, r^{n-1}\, dr) - r^n]\, \boldsymbol{r}\, r\, d\omega + r^n\, dr \oint_{(dG)} \boldsymbol{dr}_n \right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} (n\, r^n\, \boldsymbol{r}\, d\omega\, dr + 0) = n\, r^{n-2}\, \boldsymbol{r},$$

megegyezésben az a) $\alpha)$ 2. A) példában nyert eredménnyel.

A skalártér LAPLACE-kifejezése:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} \left\{ [r^{n+1} + (n+1)\, r^n\, dr - r^{n+1}]\, n\, d\omega + n\, r^{n-2} \iint_{(dF_p)} \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{df}_p \right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} [n\,(n+1)\, r^n\, d\omega\, dr + 0] = (n^2 + n)\, r^{n-2},$$

összhangban az a) $\gamma)$ 4. A) példával.

B) Az előbbi térfogatelemmel dolgozunk.

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} \left\{ [\ln (r + dr) - \ln r]\, r^2\, \boldsymbol{r}^0\, d\omega + dr \ln r \oint \boldsymbol{dr}_n \right\} =$$

$$= \frac{\ln (r + dr) - \ln r}{dr}\, \boldsymbol{r}^0 + 0 = \frac{\boldsymbol{r}^0}{r},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} \left[(r + dr - r)\, d\omega + \frac{1}{r} \iint_{(dF_p)} \boldsymbol{r}^0\, \boldsymbol{df}_p \right] =$$

$$= \frac{1}{r^2\, d\omega\, dr} (dr\, d\omega + 0) = \frac{1}{r^2},$$

összhangban az a) $\alpha)$ 2. A) és az a) $\gamma)$ 4. A) példában nyert eredménnyel.

C) Az előbbi térfogatelemmel dolgozunk. Eredmények :

$$\mathbf{grad}\, u = \boldsymbol{a}\, r^2 + 2\, \boldsymbol{r}\, (\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{r}), \quad \Delta u = 10\, (\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{r}).$$

β) A térelmélet integrál-redukciós tételei

I°. A (második) gradiens-tétel. 1'. Legyen az $u(\boldsymbol{r})$ függvény (egyértékű és) *folytonosan differenciálható* az F zárt felület határolta V térben. Beosztva a V teret ΔV_k, $k = 1, 2 \ldots, n$ térrészekre, ezekre — az α) I° (2) alapján — felírhatjuk, hogy

$$\left| \operatorname{grad}_k u \, \Delta V_k - \oint\limits_{(\Delta F_k)} u \, d\boldsymbol{F} \right| < \varepsilon \, \Delta V_k,$$

az egész V térre pedig

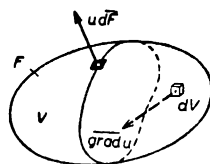
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{grad}_k u \, \Delta V_k - \oint\limits_{(F)} u \, d\boldsymbol{F} \right| < \varepsilon \, V;$$

ui. két szomszédos térrész határfelületén (a közös u skalárérték és a csupán előjelben különböző $\boldsymbol{n}'$ és a $\boldsymbol{n}''$ felületi normálisok miatt) $u \, d\boldsymbol{F}' + u \, d\boldsymbol{F}'' = 0$, s így

$$\sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{(\Delta F_k)} u \, d\boldsymbol{F} = \oint\limits_{(F)} u \, d\boldsymbol{F}.$$

Végül $\max \Delta V_k \to 0$, $n \to \infty$ határátmenetnél $\varepsilon \to 0$, következésképpen

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{grad} u \, dV = \oint\limits_{(F)} u \, d\boldsymbol{F}. \tag{1a}$$



71. ábra

Tétel. *A* **grad** *u vektor V térbeli integrálja egyenlő az u skalárnak a (kifelé irányított) F határfelületen vett integráljával* (71. ábra).

Az (1a) *koordinátás alakban* így írható:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial u}{\partial x} dV = \oint\limits_{(F)} u \cos \alpha_n \, dF, \quad \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial u}{\partial y} dV = \oint\limits_{(F)} u \cos \beta_n \, dF,$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial u}{\partial z} dV = \oint\limits_{(F)} u \cos \gamma_n \, dF. \tag{1b}$$

II°. GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-tétel. 1'. Legyen a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény *folytonosan differenciálható* az F zárt felület határolta V térben.

Beosztva a V teret ΔV_k, $k = 1, 2 \ldots, n$ térrészekre, ezekre — az α) II° (4) alapján — felírhatjuk, hogy

$$\left| \operatorname{div}_k \boldsymbol{v} \, \Delta V_k - \oint\limits_{(\Delta F_k)} \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{F} \right| < \varepsilon \, \Delta V_k,$$

az egész V térre pedig

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{div}_k \boldsymbol{v} \, \Delta V_k - \oint\limits_{(F)} \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{F} \right| < \varepsilon \, V,$$

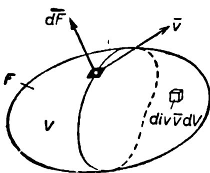
mert a szomszédos térrészek határfelületén $\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}' + \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}'' = 0$. Végül max $\Delta V_k \to 0$, $n \to \infty$ határátmenetnél $\varepsilon \to 0$, következésképpen

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}. \tag{2a}$$

E GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-féle ***tétel*** szerint *a* div $\boldsymbol{v}$ *skalár V térbeli integrálja egyenlő a* $\boldsymbol{v}$ *vektornak a (kifelé irányított) F határfelületen vett fluxusával* (72. ábra).

A (2a) *koordinátás alakban* így írható:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dV = \oint_{(F)} (u \cos\alpha_n + v \cos\beta_n + w \cos\gamma_n)\, dF. \tag{2b}$$



72. ábra

Az (1b)-ből következik, hogy a (2b) alábbi *részletformulái* is fennállnak:

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial x} dV = \oint_{(F)} u \cos\alpha_n\, dF, \quad \iiint_{(V)} \frac{\partial v}{\partial y} dV = \oint_{(F)} v \cos\beta_n\, dF,$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial w}{\partial z} dV = \oint_{(F)} w \cos\gamma_n\, dF. \tag{3}$$

2'. *A* GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-*tétel fontos* *k ö v e t k e z m é n y e* bármely

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \equiv 0 \tag{4}$$

tulajdonságú, ún. forrásmentes vagy *szolenoidális* (csöves) vektortérben, hogy

$$\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \iint_{(F_1)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_+ + \iint_{(F_2)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_+ = 0, \tag{5a}$$

vagy ami ugyanaz

$$\iint_{(F_1)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_\pm = \iint_{(F_2)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_\mp. \tag{5b}$$

Eszerint *szolenoidális vektortér zárt felületi fluxusa zérus,* vagy másként, *adott határgörbéjű felületen vett fluxusa független a felület alakjától,* megjegyezve, hogy az első esetben a körülzárt V térhez képest egyértelműen (kifelé $+$), a második esetben pedig ellenkező értelműen (kifelé $+$, illetve befelé $-$) irányított F_1 és F_2 felületről van szó.

Ha speciálisan egy vektorcső fala (ez vektorvonalakból áll, tehát $\boldsymbol{v} \perp d\boldsymbol{F}_0$) és két keresztmetszete (F_1, F_2) által képzett zárt felületen integráljuk a szolenoidális vektorteret, azt kapjuk, hogy

$$\iint_{(F_0)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_0 + \iint_{(F_1)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_1 + \iint_{(F_2)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_2 = \iint_{(F_1)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_1 + \iint_{(F_2)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_2 = 0,$$

következésképpen

$$\iint_{(F_1)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_{1\pm} = \iint_{(F_2)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_{2\mp}. \tag{6}$$

Eszerint *a szolenoidális vektortér fluxusa a vektorcső keresztmetszetein állandó,* pl. $\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_{1-}$, $\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_{2+} > 0$ irányítás mellett.

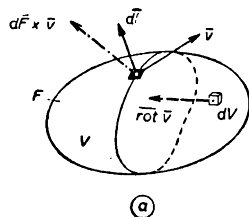
III°. STOKES-tétel és egyéb tételek. 1′. Induljunk ki a II°-ben előrebocsátott feltételből. A II°-ben alkalmazott módszerrel és megfontolásokkal — a (III°/9) alapján — könnyen igazolható, hogy ($\boldsymbol{dF} = dF\,\boldsymbol{n}$ jelöléssel)

$$\iiint_{(V)} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, dV = \oint\!\!\oint_{(F)} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v})\, dF. \tag{7}$$

Tétel. *A* **rot** $\boldsymbol{v}$ *vektor V térbeli integrálja egyenlő a (kifelé irányított)* $\boldsymbol{n}$ *egységnormális és a* $\boldsymbol{v}$ *vektoriális szorzatának az F határfelületen vett integráljával* (73a. ábra).

2′. Legyen a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *folytonosan differenciálható* a *G* zárt görbe határolta *F* felületen. A *G* görbe pozitív körüljárási értelme az *F* felület $\boldsymbol{n}$ normálisai jobbrendszert alkossanak.

Beosztva az *F* felület ΔF_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ részfelületekre, ezekre — az α) IV° (26) formula alapján — felírhatjuk,* hogy

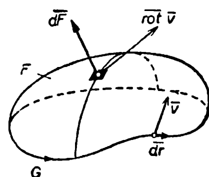


$$\left|(\mathrm{rot}_n\, \boldsymbol{v})_k\, \Delta F_k - \oint_{(\Delta G_k)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}\right| = \left|\mathbf{rot}_k\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_k\, \Delta F_k - \oint_{(\Delta G_k)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}\right| =$$

$$= \left|\mathbf{rot}_k\, \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{\Delta F}_k - \oint_{(\Delta G_k)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}\right| < \varepsilon\, \Delta F_k,$$

az egész *F* felületre pedig

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{rot}_k\, \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{\Delta F}_k - \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}\right| < \varepsilon\, F,$$



73. ábra

mert a szomszédos részfelületek határvonalain $\boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}' + \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}'' = 0$. Végül a $\max \Delta F_k \to 0$, $n \to \infty$ határátmenetnél $\varepsilon \to 0$, következésképpen

$$\iint_{(F)} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dF} = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dr}. \tag{9a}$$

E STOKES-féle ***tétel*** szerint *a* **rot** $\boldsymbol{v}$ *vektor F felületi fluxusa egyenlő a* $\boldsymbol{v}$ *vektor G görbe menti cirkulációjával,* megjegyezve, hogy a *G* körüljárási értelme a $\boldsymbol{dF}$ felületelemvektorokkal jobbrendszert képez (73b. ábra).

A (9a) *koordinátás alakban* így írható:

$$\iint_{(F)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \\ \cos\alpha_n & \cos\beta_n & \cos\gamma_n \end{vmatrix} dF = \oint_{(G)} (u\, dx + v\, dy + w\, dz). \tag{9b}$$

* Az *n* és *v* index szerepét felcserélve.

4'. Lássuk most *a* STOKES-*tétel néhány következmény é*-t!

Ha $\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{r})$ *potenciálos vektortér*, azaz előállítható valamely $\varphi(\boldsymbol{r})$ skalártér, ún. potenciáltér gradienseként,

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, \varphi \tag{10}$$

módon, akkor — az első gradiens-tétel szerint — bármely (pontra zsugorodó és tetszőleges normálisú) c zárt síkgörbe mentén

$$\oint_{(c)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \oint_{(c)} \mathbf{grad}\, \varphi\, d\boldsymbol{r} = 0, \quad \text{tehát} \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, \varphi \equiv 0, \tag{11}$$

vagyis vektorterünk *örvénymentes*, összhangban az a) γ) III°-mal.

Fordítva, ha a $\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{r})$ *örvénymentes vektortér*, azaz

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} \equiv 0, \tag{12}$$

akkor — a (9a) szerint — bármely (pontra zsugorítható) zárt görbe menti integrálja zérus, következésképpen — az első gradiens-tétel megfordítása szerint — vektorterünk *potenciálos*, vagyis

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, \varphi, \tag{13}$$

továbbá a

$$d\varphi = \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = u\, dx + v\, dy + w\, dz \tag{14}$$

kifejezés teljes differenciál.

Kimondható tehát a következő **tétel:** *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *potenciálos vektortér,* $\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}$ *teljes differenciál legyen, nem más, mint* $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} \equiv 0$, *vagyis a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ *vektortér örvénymentessége.*

5'. Közös G peremgörbéjű F_1 és F_2 felületből F zárt felületet képezve, és pl. külső normálisokkal ellátva, a (9*a*) alapján írható, hogy

$$\iint_{(F_1)} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} + \iint_{(F_2)} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}_2 = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} - \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r},$$

következésképpen

$$\oint_{(F)} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = 0. \tag{15}$$

E **tétel** szerint *a* **rot** $\boldsymbol{v}$ *vektor zárt felületi fluxusa zérus.*

A (15) bármely (pontra zsugorodó) zárt felületre igaz, tehát — a divergencia α) II° (15) értelmezése alapján —

$$\text{div}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} \equiv 0, \tag{16}$$

tehát *bármely vektortér rotáció-vektortere szolenoidális*, összhangban az a) γ) III°-ban nyert eredménnyel.

Igazolható* a ***fordított tétel,*** amely szerint *minden szolenoidális vektortér előállítható valamely másik vektortér rotáció-vektortereként;* más szóval, ha

$$\text{div}\, \boldsymbol{v} \equiv 0, \tag{17}$$

akkor található olyan $\boldsymbol{w}$, amelyre

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}. \tag{18}$$

* L. pl. Кочин [M. 8.] 172. o.

IV°. GREEN tételei. 1'. Legyen $\varphi(\boldsymbol{r})$ és $\psi(\boldsymbol{r})$ az F zárt felület határolta V térben kétszer folytonosan differenciálható függvény.

A velük képzett

$$\boldsymbol{v} = \varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \psi \tag{19}$$

vektor divergenciája

$$\operatorname{div} (\varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \psi) = \varphi \, \Delta\psi + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \psi.$$

Alkalmazzuk most ezekre a GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-tételt; így kapjuk, hogy

$$\iiint\limits_{(V)} (\varphi \, \Delta\psi + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \cdot \operatorname{\mathbf{grad}} \psi) \, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \psi \, d\boldsymbol{F}. \tag{20}$$

Ez GREEN ***első tétele.***

Ha speciálisan $\varphi = \psi$, akkor a (20)

$$\iiint\limits_{(V)} (\varphi \, \Delta\varphi + \operatorname{\mathbf{grad}}^2 \varphi) \, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \, d\boldsymbol{F} \tag{21}$$

alakot, ha pedig $\varphi = 1$, akkor

$$\iiint\limits_{(V)} \Delta\psi \, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \operatorname{\mathbf{grad}} \psi \, d\boldsymbol{F} \tag{22}$$

alakot ölt.

2'. Képezzük most a φ-vel és a ψ-vel a

$$\boldsymbol{v} = \varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \psi - \psi \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi \tag{23}$$

vektort; divergenciája

$$\operatorname{div} (\varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \psi - \psi \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi) = \varphi \, \Delta\psi - \psi \, \Delta\varphi.$$

Alkalmazzuk most ezekre a GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-tételt; így nyerjük, hogy

$$\iiint\limits_{(V)} (\varphi \, \Delta\psi - \psi \, \Delta\varphi) \, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} (\varphi \operatorname{\mathbf{grad}} \psi - \psi \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi) \, d\boldsymbol{F}. \tag{24}$$

Ez GREEN ***második tétele.***

GREEN e tételeit gyakran alkalmazzuk majd a c) pontbeli *potenciálelméleti vizsgálatok* során.

Példák és feladatok

1. Szemléltessük a GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-tételt az alábbi vektortereken és térrészekben:

A) $\boldsymbol{v} = r^n \boldsymbol{r}$, $r \leqq a$ (gömb); **B)** $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \ln r$, $r \leqq a$, $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{b} > 0$ (félgömb);

C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,(-x^2 + y + z) + \boldsymbol{j}\,(x - y^2 + z) + \boldsymbol{k}\,(x + y - z^2)$, $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 2$, $0 \leqq z \leqq 2$ (kocka);

D) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,(x - 2z) + \boldsymbol{j}\,(2x + y) + \boldsymbol{k}\,(x - y + z)$, $r \leqq 2$ (gömb).

Megoldás. Számítsuk ki a (2a) alatt tanult

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dF}$$

tétel mindkét oldalát és észleljük egyenlőségüket.

A) $\boldsymbol{v} = r^n \boldsymbol{r}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_a = (n+3)\, r^n$;

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \int_0^a (n+3)\, r^n \cdot 4\, r^2 \pi\, dr = 4\pi\, (n+3) \int_0^a r^{n+2}\, dr = 4\pi \Big[r^{n+3} \Big]_0^a = 4\pi\, a^{n+3};$$

$$\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dF} = \int_0^{4\pi} a^{n+1} \boldsymbol{r}^0 \cdot a^2\, d\omega\, \boldsymbol{r}^0 = a^{n+3} \int_0^{4\pi} d\omega = 4\pi\, a^{n+3}.$$

Látható, hogy esetünkben az

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = (n+3) \int_0^a r^n \cdot 4\, r^2 \pi\, dr$$

integrál az $r \leqq a$ gömbtest poláris n-edrendű nyomatékának $(n+3)$-szorosát szolgáltatja, tehát

$$I_{n,p} = \frac{1}{(n+3)} \iiint_{r \leq a} \operatorname{div} r^n \boldsymbol{r}\, dV = \frac{1}{(n+3)} \oint_{r=a} r^n\, \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{dF} = \frac{4\pi\, a^{n+3}}{n+3};$$

speciálisan $n = 2$ esetén a gömbtest poláris inercianyomatékát kapjuk, mégpedig

$$I_{2,p} = \frac{1}{5} \iiint_{r \leq a} \operatorname{div} r^2 \boldsymbol{r}\, dV = \frac{1}{5} \oint_{r=a} r^n\, \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{dF} = \frac{4\pi\, a^5}{5}.$$

B) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \ln r$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{r}}{r^2}$;

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{br \cos\beta}{r^2} \cdot 2\pi\, r \sin\beta \cdot r\, d\beta\, dr =$$

$$= \pi b \int_0^{\pi/2} \int_0^a r \sin 2\beta\, dr\, d\beta = \frac{\pi\, b\, a^2}{4} \int_0^\pi \sin u\, du = \frac{b\, a^2\, \pi}{2};$$

$$\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{dF} = \iint_{(Fg)} \boldsymbol{b} \ln a \cdot d F \boldsymbol{r}^0 + \int_0^a \boldsymbol{b} \ln r \cdot 2r\, \pi\, dr\, (-\boldsymbol{b}^0) =$$

$$= b \ln a \iint_{(Fg)} \cos\beta\, dF - 2\pi\, b \int_0^a r \ln r\, dr =$$

$$= b \ln a \cdot a^2\, \pi - 2\pi\, b \cdot \frac{a^2}{2} \left(\ln a - \frac{1}{2} \right) = \frac{b\, a^2\, \pi}{2}.$$

C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(-x^2 + y_2 + z) + \boldsymbol{j}(x - y^2 + z) + \boldsymbol{k}(x + y - z^2)$,
$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -2(x + y + z)$;

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = -\int_0^2\int_0^2\int_0^2 2(x + y + z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= -\int_0^2\int_0^2 \Big[x^2 + 2xy + 2xz\Big]_0^2 dy\, dz = -\int_0^2\int_0^2 (4 + 4y + 4z)\, dy\, dz =$$

$$= -\int_0^2 \Big[4y + 2y^2 + 4yz\Big]_0^2 dz = -\int_0^2 (16 + 8z)\, dz = \Big[16z + 4z^2\Big]_0^2 = -48;$$

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \iint_{(Fe)} (u_e - u_k)\, dy\, dz + \iint_{(Fj)} (u_j - u_b)\, dx\, dz + \iint_{(Ff)} (u_f - u_a)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^2\int_0^2 [(-4 + y + z) - (y + z)]\, dy\, dz + \int_0^2\int_0^2 [(x - 4 + z) -$$

$$- (x + z)]\, dx\, dz + \int_0^2\int_0^2 [(x + y - 4) - (x + y)]\, dx\, dy =$$

$$= -4\int_0^2\int_0^2 dy\, dz - 4\int_0^2\int_0^2 dx\, dz - 4\int_0^2\int_0^2 dx\, dy = -4(4 + 4 + 4) = -48.$$

D) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(x - 2z) + \boldsymbol{j}(2x + y) + \boldsymbol{k}(x - y + z)$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 3$;

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \iiint_{(V)} 3\, dV = 3V = 3 \cdot \frac{4 \cdot 2^3 \pi}{3} = 32\pi;$$

$\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}\cos u \cos v + 2\boldsymbol{j}\cos u \sin v + 2\boldsymbol{k}\sin u,\ -\pi/2 \leqq u \leqq \pi/2,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi;$

$d\boldsymbol{F} = -(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv = 2\boldsymbol{r}\cos u\, du\, dv,\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}(2\cos u \cos v - 4\sin u) +$
$+ \boldsymbol{j}(4\cos u \cos v + 2\cos u \sin u \sin v) + \boldsymbol{k}(2\cos u \cos v - 2\cos u \sin v + 2\sin u);$

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} [(2\cos u \cos v - 4\sin u) \cdot 4\cos^2 u \cos v + (4\cos u \cos v +$$

$$+ 2\cos u \sin v) \cdot 4\cos^2 u \sin v + (2\cos u \cos v - 2\cos u \sin v + 2\sin u) \cdot$$

$$\cdot 4\sin u \cos u]\, du\, dv = 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\cos^3 u + \sin^2 u \cos u + \sin u \cos^2 u \cos v +$$

$$+ 2\cos^3 u \cos v \sin v - \sin u \cos^2 u \sin v)\, du\, dv = 16\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u (\cos^2 u + \sin^2 u)\, du =$$

$$= 32\pi \int_0^{\pi/2} \cos u\, du = 32\pi.$$

Figyelemre méltó, hogy ez esetben mennyivel egyszerűbb volt a tétel bal oldalának a kiszámítása.

2. Szemléltessük a STOKES-tételt az alábbi vektortereken és felületeken:

A) $\boldsymbol{v} = r^2 \boldsymbol{a}$, $r^2 - \boldsymbol{r}\boldsymbol{a} \leqq 0$, $\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r} = 0$ (körlap);

B) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,z^2 + \boldsymbol{j}x^2 + \boldsymbol{k}\,y^2$, $r = 2$, $z \geqq 0$ (félgömbhéj);

C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,(x - y) + \boldsymbol{j}\,(x + y) + \boldsymbol{k}\,x\,y$, $z = xy$, $x^2 + y^2 \leqq 4$ (hiperbolikus paraboloid-darab);

D) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,(x + y + z) + \boldsymbol{j}\,xyz + \boldsymbol{k}\,x^2$, $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqq 4$ (forgási paraboloid-darab).

Megoldás. Számítsuk ki a (9a) alatt tanult

$$\iint_{(F)} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}$$

tétel mindkét oldalát, és észleljük egyenlőségüket.

A) $\boldsymbol{v} = r^2 \boldsymbol{a}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a})$;

$$\iint_{(F)} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \frac{2}{a}\iint_{(F)} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{a})\, dF = \frac{2}{a}\iint_{(F)} \boldsymbol{r}\;[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{a})]\, dF =$$

$$= \frac{2}{a}\iint_{(F)} [a^2 \boldsymbol{i} - (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{i})\boldsymbol{a}]\boldsymbol{r}\, dF = \frac{2}{a}\iint_{(F)} [a^2 x - a_1\,(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{r})]\, dF - 2\,a\iint_{(F)} x\, dF -$$

$$- \frac{2a_1}{a}\boldsymbol{a}\iint_{(F)} \boldsymbol{r}\; dF = \left(2\,a \cdot \frac{a_1}{2} - \frac{2\,a_1}{a} \cdot \frac{a^2}{2}\right) \cdot \frac{a^2\pi}{4} = 0;$$

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos^2\alpha\, \boldsymbol{a} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2d\alpha\, \boldsymbol{t}^0 = -\,a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\alpha \sin 2\,\alpha\, d\alpha = 0.$$

B) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,z^2 + \boldsymbol{j}\,x^2 + \boldsymbol{k}\,y^2$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i}\,y + 2\boldsymbol{j}z + 2\,\boldsymbol{k}\,x$;

$\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}\cos u \cos v + 2\boldsymbol{j}\cos u \sin v + 2\boldsymbol{k}\sin u$, $0 \leqq u \leqq \pi/2$, $0 \leqq v \leqq 2\pi$;

$d\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{r}\cos u\, du\, dv$, $(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})_r = 4\boldsymbol{i}\cos u \sin v + 4\boldsymbol{j}\sin u + 4\boldsymbol{k}\cos u \cos v$;

$$\iint_{(F)} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = 16 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\cos u \sin v \cdot \cos^2 u \cos v + \sin u \cdot \cos^2 u \sin v +$$

$$+ \cos u \cos v \cdot \sin u \cos u)\, du\, dv = 16 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\cos^3 u \cdot \sin v \cos v + \cos^2 u \sin u \sin v +$$

$$+ \cos^2 u \sin u \cdot \cos v)\, du\, dv = 0;$$

$\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}\cos v + 2\boldsymbol{j}\sin v$, $\dot{\boldsymbol{r}} = -\,2\boldsymbol{i}\sin v + 2\boldsymbol{j}\cos v$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 4\boldsymbol{j}\cos^2 v + 4\boldsymbol{k}\sin^2 v$;

$$\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} 4\cos^2 v \cdot 2\cos v\, dv = 8\int_0^{2\pi} \cos^3 dv = 0.$$

C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(x-y) + \boldsymbol{j}(x+y) + \boldsymbol{k}\,xy$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,x - \boldsymbol{j}\,y + 2\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,x + \boldsymbol{j}\,y + \boldsymbol{k}\,xy$, $d\boldsymbol{F} = (-\boldsymbol{i}\,p - \boldsymbol{j}\,q + \boldsymbol{k})\,dx\,dy = (-\boldsymbol{i}\,y - \boldsymbol{j}\,x + \boldsymbol{k})\,dx\,dy$;

$$\iint_{(F)} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{F} = \iint_{(F)} (\boldsymbol{i}x - \boldsymbol{j}y + 2\boldsymbol{k})(-\boldsymbol{i}\,y - \boldsymbol{j}\,x + \boldsymbol{k})\,dx\,dy =$$

$$= 2\iint_{x^2+y^2\leqq 4} dx\,dy = 2\cdot 2^2\pi = 8\pi;$$

$\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}\cos t + \boldsymbol{j}\sin t + 4\boldsymbol{k}\cos t\sin t$, $d\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}\,dt = [-2\boldsymbol{i}\sin t + 2\boldsymbol{j}\cos t +$ $+ 4\boldsymbol{k}(\cos^2 t - \sin^2 t)]\,dt$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{i}(\cos t - \sin t) + 2\boldsymbol{j}(\cos t + \sin t) + 4\boldsymbol{k}\cos t\sin t$;

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} [2(\cos t - \sin t)\cdot(-2\sin t) + 2(\cos t + \sin t)\cdot 2\cos t +$$

$$+ 4\cos t\sin t\cdot 4(\cos^2 t - \sin^2 t)]\,dt = 4\int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t +$$

$$+ \sin t\cos t + \sin 4t)\,dt = 4\int_0^{2\pi} (1 + \sin 4t)\,dt = 4\int_0^{2\pi} dt + 0 = 8\pi.$$

D) $\iint_{(F)} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{F} = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = 4\pi.$

3. Számítsuk ki az alábbi vektorfüggvények divergenciájának, illetve rotációjának megadott térbeli, illetve felületi integrálját, alkalmas zárt felületi, illetve zárt görbe menti integrálra való redukálás útján:

A) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,x^3 + \boldsymbol{j}\,y^3 + \boldsymbol{k}\,z^3$, $r^2 \leqq a^2$ (gömbtér);

B) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$, $x^2 + y^2 \leqq 4$, $-1 \leqq z \leqq 1$ (hengertér);

C) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\,xz^2 + \boldsymbol{j}\,zy^2 + \boldsymbol{k}\,yx^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geqq 0$ (paraboloid-felület);

D) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(y + 3z) - \boldsymbol{j}(x + 2z) - \boldsymbol{k}(3x - 2y)$, $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i}\cos u\cos v +$ $+ 2\boldsymbol{j}\cos u\sin v + 2\boldsymbol{k}\sin u$, $0 \leqq u \leqq \pi/2$, $0 \leqq v \leqq \pi$ (negyed gömbhéj).

Útmutatás. A (2a) és (9a) alatt megismert GAUSS — OSZTROGRADSZKIJ-féle, illetve STOKES-féle integrál-redukciós formula bal oldala helyett ezek jobb oldalát, vagyis az

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{F}, \quad \text{illetve} \quad \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}$$

integrált, tehát a fluxust, illetve a cirkulációt számítjuk ki. A számítás menete az 1. és 2. példákéhoz hasonló.

A) $\iiint_{(V)} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dV = \frac{12}{5}a^2\pi$; B) $\iiint_{(V)} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dV = 24\pi$;

C) $\iint_{(F)} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{F} = 4\pi$; D) $\iint_{(F)} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{F} = 8\pi.$

4. Szemléltessük GREEN tételeit az alábbi skalártereken és térrészekben:

A) $\varphi = r^2$, $\psi = \ln r$, $r^2 \leqq a^2$ (gömbtér);

B) $\varphi = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})^2$, $\psi = \ln r$, $r^2 \leqq b^2$ (gömbtér).

Megoldás. A (20) és (24) alatt megismert

$$\iiint\limits_{(V)} (\varphi \bigtriangleup \psi + \mathbf{grad}\, \varphi\, \mathbf{grad}\, \psi)\, dV = \oint\!\!\!\!\oint\limits_{(F)} \varphi\, \mathbf{grad}\, \psi\, d\boldsymbol{F},$$

$$\iiint\limits_{(V)} (\varphi \bigtriangleup \psi - \psi \bigtriangleup \varphi)\, dV = \oint\!\!\!\!\oint\limits_{(F)} (\varphi\, \mathbf{grad}\, \psi - \psi\, \mathbf{grad}\, \varphi)\, d\boldsymbol{F}$$

formulák mindkét oldalát kiszámítjuk és észleljük egyenlőségüket.

A) $\varphi = r^2$, $\mathbf{grad}\, \varphi = 2\boldsymbol{r}$, $\bigtriangleup \varphi = 6$;

$$\psi = \ln r,\ \mathbf{grad}\, \psi = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2},\ \bigtriangleup \psi = \frac{1}{r^2};$$

$$\iiint\limits_{(V)} (\varphi \bigtriangleup \psi - \psi \bigtriangleup \varphi)\, dV = \int\limits_0^a \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} - \ln r \cdot 6\right) \cdot 4\, r^2 \pi\, dr =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^a (r^2 - 6\, r^2 \ln r)\, dr = 4\pi \left[\frac{a^3}{3} - 2\, a^3 \left(\ln a - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{4\pi\, a^3}{3}(5 - 6 \ln a).$$

γ) Görbe vonalú, ortogonális koordináta-rendszerek

1°. Koordináta-alakzatok. 1'. Az előzőkben megismerkedtünk a vektor-vektor függvény egyik, a műszaki alkalmazások szempontjából különösen nagy jelentőségű geometriai értelmezésével, nevezetesen a *vektortér*rel.

Most rátérünk e függvénynek egy másik, a műszaki alkalmazások során szintén gyakorta felhasznált geometriai értelmezésére, mégpedig a *görbe vonalú koordináta-rendszerek*re. Itt célszerűbb — a vektortereknél szokásos $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ helyett az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v})$ alakú függvények alkalmazása, ahol $\boldsymbol{r}$ az x, y, z derékszögű koordináta-rendszer origójából vont helyzetvektor.

2'. Legyen adva tehát egy tetszőleges

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \subset V,\ \boldsymbol{r} \subset B) \tag{1a}$$

alakú, vagy koordinátákra bontva

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \tag{1b}$$

alakú vektor-vektor függvény, amely (egyelőre csak) *folytonos* a V értelmezési tartományban, továbbá ott *kölcsönösen egyértelmű*. Ekkor különböző V-beli u, v, w számhármasoknak ($\boldsymbol{v}$ vektoroknak) egy-egy különböző B-beli $\boldsymbol{r}$ helyzetvektor (pont) felel meg, és fordítva. Az u, v, w paramétereket az $\boldsymbol{r}$ helyzetvektor (pont) *görbe vonalú koordinátái*nak nevezzük.

Adjunk most a görbe vonalú koordinátáknak egyenként tetszőleges állandó értéket; az így nyert

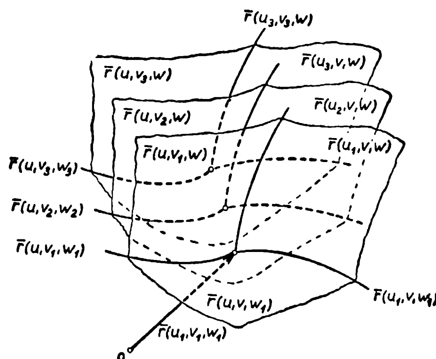
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(c, v, w), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, c, w), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, c) \tag{2}$$

egyenletű három paraméterfelület-sereg egyedeit *görbe koordinátafelületek*nek nevezzük. Különböző állandó paraméter-értékeknek egy-egy különböző görbe koordinátafelület felel meg, és fordítva (74. ábra).

Rögzítsünk most két-két görbe vonalú koordinátát tetszőleges állandó értéken; az így kapott

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(c_1, c_2, w), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, c_1, c_2), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(c_2, v, c_1) \tag{3}$$

egyenletű paramétergörbe-sereg egyedeit *görbe koordinátavonalak*nak nevezzük. Különböző rögzített paraméter-értékpároknak egy-egy különböző görbe koordinátavonal felel meg, és fordítva (74. ábra).



74. ábra

Végeredményben *minden* (folytonos és kölcsönösen egyértelmű) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w)$ *függvény egy-egy* — az említett görbe koordinátafelületek és -vonalak hálózatával képzett — *görbe vonalú koordináta-rendszer-t határoz meg.*

Megjegyzendő, hogy a folytonosság nem nélkülözhető, mert pl. a nem folytonos $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(c, v, w)$, illetve $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(c_1, c_2, w)$ függvényeknek — felületek, illetve térgörbék helyett — csupán térbeli ponthalmazok felelnek meg.

Az 1. példában meghatározzuk a gömbi, a hengeres és több más fontos görbe vonalú koordinátarendszer koordináta-alakzatait.

II°. A görbe vonalú koordináta-rendszerek analízise. 1'. Legyen a továbbiakban a V tartományban kölcsönösen egyértelmű $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w)$ vektor-vektor függvény ott *folytonosan differenciálható.* Vizsgáljuk meg az általa meghatározott görbe vonalú koordináta-rendszerben a koordináta-alakzatok irányvektorát, összefüggését, mérését stb.

A (3) görbe koordinátavonalak *érintővektor*ai — az 1. §. értelmében —

$$\boldsymbol{r}_w = x_w \boldsymbol{i} + y_w \boldsymbol{j} + z_w \boldsymbol{k} = r_w \boldsymbol{t}_w = \boldsymbol{t}_w \sqrt{x^2_w + y^2_w + z^2_w}$$

és hasonlóan

$$\boldsymbol{r}_v = r_v \boldsymbol{t}_v, \quad \boldsymbol{r}_u = r_u \boldsymbol{t}_u \tag{4}$$

ahol $\boldsymbol{t}_u$, $\boldsymbol{t}_v$, $\boldsymbol{t}_w$ — egységvektorok, r_w, r_v, r_u — abszolútértékek, ún. LAMÉ-féle együtthatók (75a. ábra).

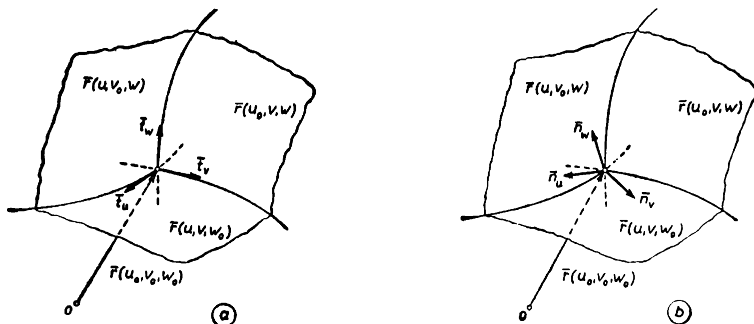
2'. A (2) görbe koordinátafelületek *normálvektor*ai — a 3. §. a) α) II° értelmében —

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} = g_u \boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{n}_u \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{5}$$

és hasonlóan

$$\mathbf{grad}\ v = g_v \mathbf{n}_v, \quad \mathbf{grad}\ w = g_w \mathbf{n}_w,$$

ahol $\mathbf{n}_u$, $\mathbf{n}_v$, $\mathbf{n}_w$ — egységvektorok, g_u, g_v, g_w — abszolútértékek, ún. elsőrendű differenciálparaméterek (75b. ábra).



75. ábra

3'. A (4) érintővektorok és az (5) normálvektorok nem függetlenek egymástól. Kapcsolatuk megállapítására elegendő belátni, hogy — a felületi paramétervonalak és a felületi normális merőlegessége miatt —

$$\mathbf{r}_u\, \mathbf{grad}\ v = \mathbf{r}_u\, \mathbf{grad}\ w = 0, \quad \mathbf{r}_v\, \mathbf{grad}\ w = \mathbf{r}_v\, \mathbf{grad}\ u = 0,$$

$$\mathbf{r}_w\, \mathbf{grad}\ u = \mathbf{r}_w\, \mathbf{grad}\ v = 0, \tag{6a}$$

továbbá — a $du = \mathbf{grad}\ u\, d\mathbf{r}_u = \mathbf{grad}\ u\ \mathbf{r}_u\, du$ és az analóg összefüggésekből —

$$\mathbf{r}_u\, \mathbf{grad}\ u = 1, \quad \mathbf{r}_v\, \mathbf{grad}\ v = 1, \quad \mathbf{r}_w\, \mathbf{grad}\ w = 1. \tag{6b}$$

A (6a) és a (6b) értelmében tehát az $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_w$ vektorhármas és a **grad** u, **grad** v, **grad** w vektorhármas *reciprok vektorrendszert* képez; következésképpen* írható, hogy

$$\mathbf{grad}\ u = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w}{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w}, \quad \mathbf{grad}\ v = \frac{\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u}{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w}, \quad \mathbf{grad}\ w = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w};$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\mathbf{grad}\ v \times \mathbf{grad}\ w}{\mathbf{grad}\ u\, \mathbf{grad}\ v\, \mathbf{grad}\ w}, \quad \mathbf{r}_v = \frac{\mathbf{grad}\ w \times \mathbf{grad}\ u}{\mathbf{grad}\ u\, \mathbf{grad}\ v\, \mathbf{grad}\ w},$$

$$\mathbf{r}_w = \frac{\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v}{\mathbf{grad}\ u\, \mathbf{grad}\ v\, \mathbf{grad}\ w}.$$

$$\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v \mathbf{r}_w \cdot \mathbf{grad}\ u\, \mathbf{grad}\ v\, \mathbf{grad}\ w = 1. \tag{7a, b, c}$$

4'. Alapvető különbség a szokásos derékszögű és a görbe vonalú koordinátarendszerek között, hogy az utóbbiakban *általában pontról pontra változnak* a koordinátagörbék $\mathbf{t}_u$, $\mathbf{t}_v$, $\mathbf{t}_w$ *érintő egységvektorai és* hasonlóan a koordinátafelületek $\mathbf{n}_u$, $\mathbf{n}_v$, $\mathbf{n}_w$ *normális egységvektorai.*

* L. pl. a sorozat A. IX. kötetében.

Valamely $\varrho = \bar{\varrho}(\boldsymbol{r})$ függvény

$$\bar{\varrho}(\boldsymbol{r}) = \xi(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{t}_u(\boldsymbol{r}) + \eta(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{t}_v(\boldsymbol{r}) + \zeta(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{t}_w(\boldsymbol{r}) \tag{8a}$$

módon fejezhető ki tangenciális és

$$\bar{\varrho}(\boldsymbol{r}) = \varkappa(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}_u(\boldsymbol{r}) + \lambda(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}_v(\boldsymbol{r}) + \mu(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{n}_w(\boldsymbol{r}) \tag{8b}$$

módon normális komponensek összegeként, feltéve, hogy $\boldsymbol{t}_u\, \boldsymbol{t}_v\, \boldsymbol{t}_w \neq 0$, illetve $\boldsymbol{n}_u\, \boldsymbol{n}_v\, \boldsymbol{n}_w \neq 0$.

5'. Térjünk ki még a koordinátagörbék, az általuk határolt koordinátafelületek, végül az utóbbiak határolta görbe vonalú hasábok *mérésére*. Az $\boldsymbol{r}(u, v, w)$ feltételezett folytonos differenciálhatósága következtében ezen alakzatok mérhetők.

Állapítsuk meg először a megfelelő ív-, felszín- és térfogat-elemeket! Az $\boldsymbol{r}$ helyzetvektor $d\boldsymbol{r}$ differenciájának ($r_u = |\boldsymbol{r}_u|$ stb. jelöléssel nyerhető)

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv + \boldsymbol{r}_w\, dw = r_u\, du\, \boldsymbol{t}_u + r_v\, dv\, \boldsymbol{t}_v + r_w\, dw\, \boldsymbol{t}_w$$

kifejezéséből nyilvánvaló, hogy a koordinátagörbék ívelemei

$$ds_u = |\boldsymbol{r}_u|\, du, \quad ds_v = |\boldsymbol{r}_v|\, dv, \quad ds_w = |\boldsymbol{r}_w|\, dw;$$

a koordinátagörbék ívhossza tehát

$$s_u = \int_{u_1}^{u_2} |\boldsymbol{r}_u|\, du, \quad s_v = \int_{v_1}^{v_2} |\boldsymbol{r}_v|\, dv, \quad s_w = \int_{w_1}^{w_2} |\boldsymbol{r}_w|\, dw. \tag{9}$$

A koordinátafelületek felszínelemei nyilván

$$dF_u = |d\boldsymbol{r}_v \times d\boldsymbol{r}_w| = |\boldsymbol{r}_v\, dv \times \boldsymbol{r}_w\, dw| = |\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_w|\, dv\, dw$$

és hasonlóan

$$dF_v = |\boldsymbol{r}_w \times \boldsymbol{r}_u|\, dw\, du, \quad dF_w = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv;$$

a koordinátafelületek négy-négy koordinátagörbe határolta darabjának *felszíne* tehát

$$F_u = \int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} |\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_w|\, dv\, dw, \quad F_v = \int_{w_1}^{w_2}\int_{u_1}^{u_2} |\boldsymbol{r}_w \times \boldsymbol{r}_u|\, dw\, du,$$

$$F_w = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv. \tag{10}$$

A görbe vonalú koordináta-rendszer térfogateleme nyilván

$$dV = |d\boldsymbol{r}_u\, d\boldsymbol{r}_v\, d\boldsymbol{r}_w| = |\boldsymbol{r}_u\, \boldsymbol{r}_v\, \boldsymbol{r}_w|\, du\, dv\, dw;$$

hat koordinátafelület határolta *görbe vonalú hasáb térfogata* tehát

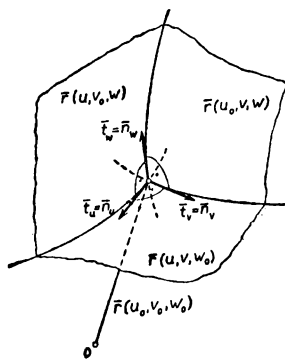
$$V = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} |\boldsymbol{r}_u\, \boldsymbol{r}_v\, \boldsymbol{r}_w|\, du\, dv\, dw. \tag{11}$$

III°. Görbe vonalú ortogonális koordináta-rendszerek. 1'. *Az olyan görbe vonalú koordináta-rendszert nevezzük ortogonálisnak, amelynek koordinátagörbéi minden pontban merőlegesek egymásra.* Ilyen pl. a gömbi, a hengeres koordináta-rendszer.

A görbe vonalú koordináta-rendszer *ortogonalitás*ának szükséges és elégséges *feltétele* — beláthatóan —

$$\boldsymbol{t}_u \boldsymbol{t}_v = \boldsymbol{t}_v \boldsymbol{t}_w = \boldsymbol{t}_w \boldsymbol{t}_u = 0 \quad (\boldsymbol{t}_u^2 = \boldsymbol{t}_v^2 = \boldsymbol{t}_w^2 = 1), \tag{12}$$

vagy pedig az $\boldsymbol{n}_u$, $\boldsymbol{n}_v$, $\boldsymbol{n}_w$ analóg egyenletrendszere. A (7a) értelmében írható, hogy



76. ábra

$$\boldsymbol{n}_u = \boldsymbol{t}_u, \quad \boldsymbol{n}_v = \boldsymbol{t}_v, \quad \boldsymbol{n}_w = \boldsymbol{t}_w \tag{13a}$$

(76. ábra), következésképpen — a (12) mintájára —

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v = \boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}_w = \boldsymbol{n}_w\boldsymbol{n}_u = 0 \quad (\boldsymbol{n}_u^2 = \boldsymbol{n}_v^2 = \boldsymbol{n}_w^2 = 1). \tag{13b}$$

Tovább vizsgálva a görbe vonalú ortogonális koordináta-rendszert, a (6b) és a (13a) alapján megállapítható, hogy

$$g_u = \frac{1}{r_u}, \quad g_v = \frac{1}{r_v}, \quad g_w = \frac{1}{r_w}. \tag{14}$$

Ennek felhasználásával az (5) formulák

$$\operatorname{grad} u = \frac{\boldsymbol{t}_u}{r_u}, \quad \operatorname{grad} v = \frac{\boldsymbol{t}_v}{r_v}, \quad \operatorname{grad} w = \frac{\boldsymbol{t}_w}{r_w}$$

alakra írhatók át.

2'. Lássuk most, hogy alakulnak a II° 5'-ben vizsgált elemek görbe vonalú ortogonális koordináta-rendszerben.

A koordinátagörbék *íveleme* változatlanul

$$ds_u = r_u\, du, \quad ds_v = r_v\, ds_v, \quad ds_w = r_w\, ds_w, \tag{15a}$$

tetszőleges térgörbe íveleme pedig — az ortogonalitás következtében —

$$ds = \sqrt{r_u^2\, du^2 + r_v^2\, dv^2 + r_w^2\, dw^2}. \tag{15b}$$

A koordinátafelületek *felszínelemei* most

$$dF_u = r_v\, r_w\, dv\, dw, \quad dF_v = r_w r_u\, dw\, du, \quad dF_w = r_u\, r_v\, du\, dv. \tag{16}$$

Végül az ilyen felszínelemek határolta *térfogatelem* most

$$dV = r_u\, r_v\, r_w\, du\, dv\, dw. \tag{17}$$

E formulák jól szemléltetik a AMÉ-féle együtthatók használhatóságát.

3'. Ezek után állítsuk elő a **grad** φ, div $\bar{\varrho}$, $\Delta\varphi$ és **rot** $\bar{\varrho}$ kifejezését tetszőleges görbe vonalú ortogonális koordináta-rendszerben.

A *gradiens* — a $\varphi[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})]$ összetett függvénnyel dolgozva —

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \operatorname{grad} v + \frac{\partial\varphi}{\partial w} \operatorname{grad} w = \frac{\boldsymbol{t}_u}{r_u} \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\boldsymbol{t}_v}{r_v} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\boldsymbol{t}_w}{r_w} \frac{\partial\varphi}{\partial w} \tag{18}$$

alakban adódik.

A *divergencia* előállítására alkalmazzuk a

$$\operatorname{div} \bar{\varrho} = \frac{1}{dV} \oint\!\!\!\oint_{(dF)} \bar{\varrho}\, \boldsymbol{df}$$

definíciót egy, koordinátafelület-elemek által határolt elemi görbe vonalú hasábra. Ekkor — a (8a) jelöléssel — írhatjuk, hogy

$$\operatorname{div} \bar{\varrho} = \frac{1}{r_u r_v r_w\, du\, dv\, dw} \left\{ \left[-\xi r_v r_w + \left(\xi r_v r_w + \frac{\partial(\xi r_v r_w)}{\partial u} dv\, dw \right) \right] + \right.$$

$$+ \left[-\eta r_w r_u + \left(\eta r_v r_u + \frac{\partial(\eta r_w r_u)}{\partial v} dv \right) \right] dw\, du +$$

$$\left. + \left[-\zeta r_u r_v + \left(\zeta r_u r_v + \frac{\partial(\zeta r_u r_v)}{\partial w} dw \right) \right] du\, dv \right\} =$$

$$= \frac{1}{r_u r_v r_w} \left[\frac{\partial(\xi r_v r_w)}{\partial u} + \frac{\partial(\eta r_w r_u)}{\partial v} + \frac{\partial(\xi r_u r_v)}{\partial w} \right]. \tag{19}$$

Speciálisan

$$\operatorname{div} \boldsymbol{t}_u = \frac{1}{r_u r_v r_w} \frac{\partial(r_v r_w)}{\partial u}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{t}_v = \frac{1}{r_u r_v r_w} \frac{\partial(r_w r_u)}{\partial v},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{t}_w = \frac{1}{r_u r_v r_w} \frac{\partial(r_u r_v)}{\partial w}.$$

A Laplace-*kifejezés* — a $\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{grad}\, \varphi$ definíció, valamint a (18) és (19) figyelembevételével —

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r_u r_v r_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_v r_w}{r_u} \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_w r_u}{r_v} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{r_u r_v}{r_w} \frac{\partial\varphi}{\partial w} \right) \right] \tag{20}$$

alakot ölt.

A *rotáció* kifejezését a

$$\operatorname{rot}_n \bar{\varrho} = \frac{1}{dF} \oint_{(dG)_n} \bar{\varrho}\, \boldsymbol{dr}$$

definíció ismételt alkalmazásával szerkesztjük meg, midőn $\boldsymbol{n}$-ként egymás után $\boldsymbol{n}_u$, $\boldsymbol{n}_v$, $\boldsymbol{n}_w$ szerepel. Pl. az $\boldsymbol{n}_u$ normálisú és koordinátagörbe-ívelemek határolta felületelemre vonatkozólag írható, hogy

$$\operatorname{rot}_{nu} \bar{\varrho} = \frac{1}{r_v r_w\, dv\, dw} \left\{ \left[\left(\zeta r_w + \frac{\partial(\zeta r_w)}{\partial v} dv \right) - \zeta r_w \right] dw + \right.$$

$$\left. + \left[-\left(\eta r_v + \frac{\partial(\eta r_v)}{\partial w} dw \right) + \eta r_v \right] dv \right\} = \frac{1}{r_v r_w} \left[\frac{\partial(\zeta r_w)}{\partial v} - \frac{\partial(\eta r_v)}{\partial w} \right]; \tag{21}$$

hasonló módon nyerhető, hogy

$$\mathrm{rot}_{nv}\bar{\varrho} = \frac{1}{r_w r_u}\left[\frac{\partial(\xi r_u)}{\partial w} - \frac{\partial(\zeta r_w)}{\partial u}\right], \quad \mathrm{rot}_{nw}\bar{\varrho} = \frac{1}{r_u r_v}\left[\frac{\partial(\eta r_v)}{\partial u} - \frac{\partial(\xi r_u)}{\partial v}\right].$$

Ha speciálisan $\bar{\varrho} = \boldsymbol{t}_u$, akkor

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{t}_u = \boldsymbol{t}_v \frac{1}{r_w r_u}\frac{\partial r_u}{\partial w} - \boldsymbol{t}_w \frac{1}{r_u r_v}\frac{\partial r_u}{\partial v} = \frac{1}{r_u}\,\mathrm{grad}\, r_u \times \boldsymbol{t}_u.$$

4'. Végezetül levezetés nélkül* — megemlítjük *a* $\boldsymbol{t}_u$ *érintő egységvektor* u, v, w *szerinti parciális deriváltjá*nak kifejezését $\boldsymbol{t}_u$, $\boldsymbol{t}_v$ és $\boldsymbol{t}_w$ irányú komponensek segítségével:

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial u} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r_u}{\partial v}\boldsymbol{t}_v - \frac{1}{r_w}\frac{\partial r_u}{\partial w}\boldsymbol{t}_w, \quad \frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial v} = \frac{\boldsymbol{t}_v}{r_u}\frac{\partial r_v}{\partial u}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{t}_u}{\partial w} = \frac{\boldsymbol{t}_w}{r_u}\frac{\partial r_w}{\partial u}.$$

Ennek alapján — ciklikus cserével — közvetlenül felírhatók a $\boldsymbol{t}_v$ és a $\boldsymbol{t}_w$ parciális deriváltjai.

Példák és feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w)$ függvényeknek megfelelő görbe vonalú koordináta-rendszer koordinátafelületeit (és -görbéit):

A) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, w \cos u \cos v + \boldsymbol{j}\, w \cos u \sin v + \boldsymbol{k}\, w \sin u;$

B) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, w \cos v + \boldsymbol{j}\, w \sin v + \boldsymbol{k}\, u;$

C) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, w \cos v + \boldsymbol{j}\, w \sin v + \boldsymbol{k}\,(bv + u);$

D) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, w \cos v + \boldsymbol{j}\, w \sin v + \boldsymbol{k}\, u\,(1 + w^2);$

E) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\frac{1}{2v}\left(w^2 + \frac{u^2}{w^2}\right) + \boldsymbol{j}\,\frac{1}{2}\left(w + \frac{u}{w}\right) + \boldsymbol{k}\,\frac{1}{2}\left(w - \frac{u}{w}\right).$

Megoldás. A (2) és (3) értelmében a görbe kordináta felületek egyenlete:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(c, v, w), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, c, w), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, c),$$

a görbe koordinátavonalaké pedig:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(c_1, c_2, w), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, c_1, c_2), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(c_2, v, c_1).$$

A) $\boldsymbol{r}(c, v, w) = \boldsymbol{i}\cos c \cdot w \cos v + \boldsymbol{j}\cos c \cdot w \sin v + \boldsymbol{k}\sin c \cdot w$, $x^2 + y^2 = \mathrm{ctg}^2 c \cdot z^2$: O csúcspontú, z tengelyű, $\pi/2 - c$ félnyílású körkúpok (77a. ábra);

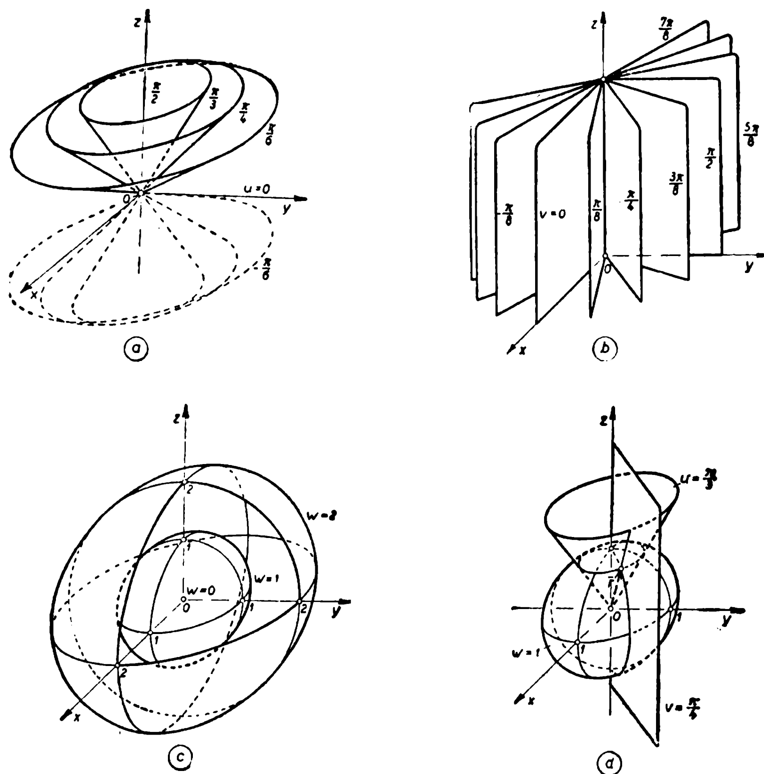
$\boldsymbol{r}(u, c, w) = \boldsymbol{i}\cos c \cdot w \cos u + \boldsymbol{j}\sin c \cdot w \cos u + \boldsymbol{k}\, w \sin u$, $y = \mathrm{tg}\, c \cdot x$, $\mathrm{sign}\, x = \mathrm{const}$: a z tengelyre illeszkedő s az x tengelyhez képest c hajlásszögű félsíkok (77b. ábra);

$\boldsymbol{r}(u, v, c) = \boldsymbol{i}\, c \cos u \cos v + \boldsymbol{j}\, c \cos u \sin v + \boldsymbol{k}\, c \sin u$, $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$: O középpontú, c ($\geqq 0$) sugarú gömbök (77c. ábra).

* L. pl. Кочин [M. 8.].

A görbe koordinátavonalak az említett körkúpok, félsíkok és gömbök metszésvonalai (77d. ábra); pl.

$\boldsymbol{r}(c_1, c_2, w) = \boldsymbol{i} \cos c_1 \cos c_2\, w + \boldsymbol{j} \cos c_1 \sin c_1\, w + \boldsymbol{k} \sin c_1\, w$, $x = aw$, $y = bw$, $z = cw$: az O-n átmenő egyenesek.



77. ábra

B) $\boldsymbol{r}(c, v, w) = \boldsymbol{i}\, w \cos v + \boldsymbol{j}\, w \sin v + \boldsymbol{k}\, c$, $z = c$: az x, y síkkal párhuzamos síkok (78a. ábra);

$\boldsymbol{r}(u, c, w) = \boldsymbol{i} \cos c \cdot w + \boldsymbol{j} \sin c \cdot w + \boldsymbol{k}\, u$, $y = \operatorname{tg} c \cdot x$, $\operatorname{sign} x = \text{const}$; a z tengelyre illeszkedő s az x tengelyhez képest c hajlásszögű félsíkok (78b. ábra);

$\boldsymbol{r}(u, v, c) = \boldsymbol{i}\, c \cos v + \boldsymbol{j}\, c \sin v + \boldsymbol{k}\, u$, $x^2 + y^2 = c^2$: z tengelyű körhengerek (78c. ábra).

A görbe koordinátavonalak az említett síkok, félsíkok és körhengerek metszésvonalai (78d. ábra); pl.

$\boldsymbol{r}(u, c_1, c_2) = \boldsymbol{i}\, c_2 \cos c_1 + \quad c_2 \sin c_1 + \boldsymbol{k}\, u$, $x = a$, $y = b$: a z tengellyel párhuzamos egyenesek.

C) $\mathbf{r}(c, v, w) = \mathbf{i}\, w \cos v + \mathbf{j}\, w \sin v + \mathbf{k}\,(bv + c)$: z tengelyű csavarfelületek (79a. ábra);

$\mathbf{r}(u, c, w) = \mathbf{i} \cos cw + \mathbf{j} \sin cw + \mathbf{k}\,(bc + u)$: a z tengelyre illeszkedő félsíkok (79b. ábra);

$\mathbf{r}(u, v, c) = \mathbf{i}\, c \cos v + \mathbf{j}\, c \sin v + \mathbf{k}(bv + u)$: z tengelyű körhengerek (79c. ábra);

A görbe koordinátavonalak az említett csavarfelületek, félsíkok és körhengerek metszésvonalai (79d. ábra).

D) $\mathbf{r}(c, v, w) = \mathbf{i}\, w \cos v + \mathbf{j}\, w \sin v + kc\,(1 + w^2)$, $z = c\,(1 + x^2 + y^2)$: z tengelyű forgási paraboloidok;

$\mathbf{r}(u, c, w)$: a z tengelyre illeszkedő félsíkok;

$\mathbf{r}(u, v, c)$: z tengelyű körhengerek.

E) $\mathbf{r}(c, v, w)$: z tengelyű hiperbolikus hengerek;

$\mathbf{r}(u, c, w)$: x tengelyű forgási paraboloidok;

$\mathbf{r}(u, v, c)$ az x tengellyel párhuzamos síkok.

2. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, w)$ függvényeknek megfelelő görbe vonalú koordináta-rendszerben a koordinátavonalak érintővektorát és a koordinátafelületek normálvektorát:

A) $\mathbf{r} = \mathbf{i}\, w \cos v + \mathbf{j}\, w \sin v + \mathbf{k}\,(bv + u)$;

B) $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,\frac{1}{2v}\left(w^2 + \frac{u^2}{w^2}\right) + \mathbf{j}\,\frac{1}{2}\left(w + \frac{u}{w}\right) + \mathbf{k}\,\frac{1}{2}\left(w - \frac{u}{w}\right)$.

Megoldás. A (4) és (5) értelmében a koordinátavonalak érintővektorai:

$$\mathbf{r}_u, \quad \mathbf{r}_v, \quad \mathbf{r}_w,$$

a koordinátafelületek normálvektorai pedig:

$$\mathbf{grad}\, u, \quad \mathbf{grad}\, v, \quad \mathbf{grad}\, w.$$

A (6a, b) értelmében a két vektorhármas egymásnak reciproka, azaz pl.

$$\mathbf{r}_u\, \mathbf{grad}\, u = 1, \quad \mathbf{r}_u\, \mathbf{grad}\, v = \mathbf{r}_u\, \mathbf{grad}\, w = 0, \quad \text{stb.}$$

A) $\mathbf{r}_u = \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_v = -\,\mathbf{i}\, w \sin v + \mathbf{j}\, w \cos v + \mathbf{k}\, b$, $\mathbf{r}_w = \mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin v$.

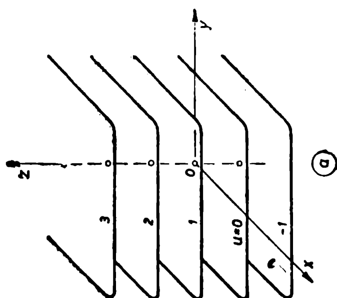
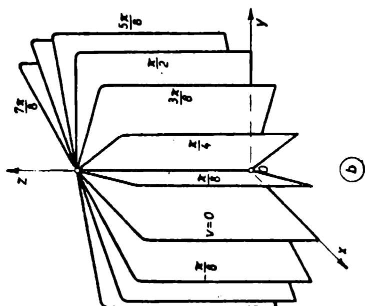
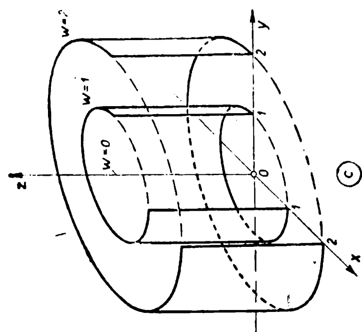
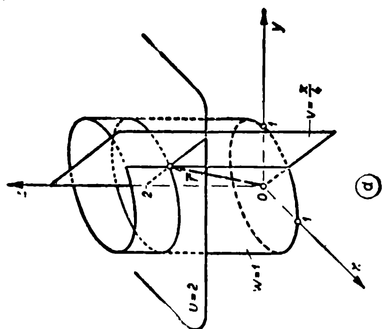
Állítsuk elő most az u, v, w paramétert az x, y, z függvényeként, majd képezzük gradiensüket:

$$u = z - b \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \qquad v = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \qquad w = \sqrt{x^2 + y^2};$$

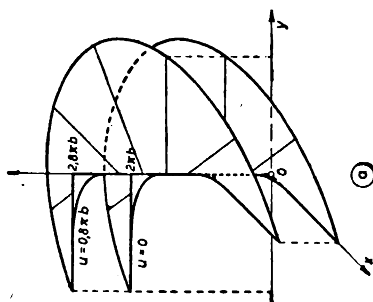
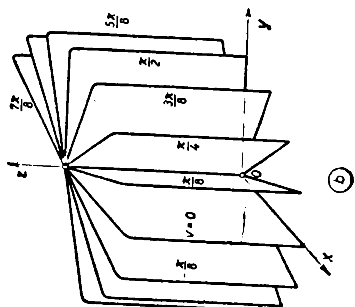
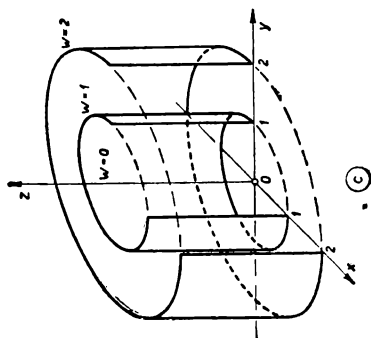
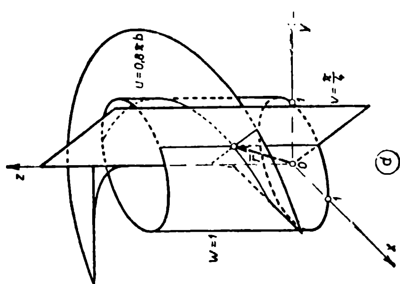
$$\mathbf{grad}\, u = \mathbf{i}\, b\, \frac{y}{x^2 + y^2} - \mathbf{j}\, b\, \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathbf{k} = \mathbf{i}\,\frac{b}{w} \sin v - \mathbf{j}\,\frac{b}{w} \cos v + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{grad}\, v = -\,\mathbf{i}\, \frac{y}{x^2 + y^2} + \mathbf{j}\, \frac{x}{x^2 + y^2} = -\,\mathbf{i}\,\frac{1}{w} \sin v + \mathbf{i}\,\frac{1}{w} \cos v,$$

$$\mathbf{grad}\, w = \mathbf{i}\, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathbf{j}\, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \mathbf{i} \cos v + \mathbf{j} \sin v.$$

78. ábra

79. ábra

Végül észleljük a két vektorhármas reciprocitását:

$$\boldsymbol{r}_u \operatorname{grad} u = 1 \cdot 1 = 1, \quad \boldsymbol{r}_u \operatorname{grad} v = 1 \cdot 0 = 0, \quad \boldsymbol{r}_u \operatorname{grad} w = 1 \cdot 0 = 0;$$

$$\boldsymbol{r}_v \operatorname{grad} u = -w \sin v \cdot \frac{b}{w} \sin v - w \cos v \cdot \frac{b}{w} \cos v + b \cdot 1 = 0,$$

$$\boldsymbol{r}_v \operatorname{grad} v = w \sin v \cdot \frac{1}{w} \sin v + w \cos v \cdot \frac{1}{w} \cos v = 1,$$

$$\boldsymbol{r}_v \operatorname{grad} w = -w \sin v \cdot \cos v + w \cos v \cdot \sin v = 0;$$

$$\boldsymbol{r}_w \operatorname{grad} u = \cos v \cdot \frac{b}{w} \sin v - \sin v \cdot \frac{b}{w} \cos w = 0,$$

$$\boldsymbol{r}_w \operatorname{grad} v = -\cos v \cdot \frac{1}{w} \sin v + \sin v \cdot \frac{1}{w} \cos v = 0,$$

$$\boldsymbol{r}_w \operatorname{grad} w = \cos v \cdot \cos v + \sin v \cdot \sin v = 1.$$

B) $u = -x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x}(y^2 + z^2), \quad w = y + z.$

Folytassuk az A) mintájára!

3. Határozzuk meg az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, w \cos v + \boldsymbol{j}\, w \sin v + \boldsymbol{k}\,(bv + u)$$

függvénynek megfelelő görbe vonalú koordináta-rendszerben

A) az $\boldsymbol{r}(0, v, a) = \boldsymbol{i}\, a \cos v + \boldsymbol{j}\, a \sin v + \boldsymbol{k}\, bv$ koordinátagörbe $0 \leqq v \leqq 2\pi$ szakaszának ívhosszát,

B) az $\boldsymbol{r}(0, v, w) = \boldsymbol{i}\, w \cos v + \boldsymbol{j}\, w \sin v + \boldsymbol{k}\, bv$ koordinátafelület $0 \leqq v \leqq 2\pi$, $0 \leqq w \leqq a$ darabjának felszínét,

C) a $0 \leqq u \leqq 3$, $0 \leqq v \leqq \pi/4$, $1 \leqq w \leqq 2$ görbe vonalú hasáb térfogatát.

Megoldás. A) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, a \cos v + \boldsymbol{j}\, a \sin v + \boldsymbol{k}\, bt$ koordinátagörbe csavarvonal; $0 \leqq v \leqq 2\pi$ szakaszának ívhossza — a (9b) értelmében —

$$s_v = \int_{v_1}^{v_2} |\boldsymbol{r}_v|\, dv = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 v + a^2 \cos^2 v + b^2}\, dv = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

B) Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, w \cos v + \boldsymbol{j}\, w \sin v + \boldsymbol{k}\, bv$ koordinátafelület csavarfelület; $0 \leqq v \leqq 2\pi$, $0 \leqq w \leqq a$ darabjának felszíne — a (10a) értelmében —

$$F_u = \int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} |\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_w|\, dv\, dw = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \left| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -w \sin v & w \cos v & b \\ \cos v & \sin v & 0 \end{vmatrix} \right| dv\, dw =$$

$$= 2\pi \int_0^{a} \sqrt{b^2 + w^2}\, dw = 2\pi b^2 \int_0^{\operatorname{ar\,sh}\frac{a}{b}} \operatorname{ch}^2 t\, dt = \pi \left(b^2 \operatorname{ar\,sh}\frac{a}{b} + a\sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

C) A szóban forgó görbe vonalú hasábot az $u_1 = 0$, $u_2 = 3$ (görbe vonalú koordinátájú) csavarfelületek, a $v_1 = 0$, $v_2 = \pi/4$ félsíkok és a $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ körhengerfelületek határolják; térfogata — a (11) értelmében —

$$V = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2} \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_w \, du\, dv\, dw = \int_0^3\int_0^{\pi/4}\int_1^2 \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -w\sin v & w\cos v & b \\ \cos v & \sin v & 0 \end{vmatrix} \right| du\, dv\, dw =$$

$$= \frac{3\pi}{4}\int_1^2 w\, dw = \frac{3\pi}{4}\left[\frac{w^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9\pi}{8}.$$

4. Határozzuk meg az alábbi $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w)$ függvényeknek megfelelő görbe vonalú koordináta-rendszerben a (koordinátafelület-elemekkel határolt) térfogatelemet:

A) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, w\cos v + \boldsymbol{j}\, w\sin v + \boldsymbol{k} u\,(1 + w^2)$;

B) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\frac{1}{2v}\left(w^2 + \frac{u^2}{w^2}\right) + \boldsymbol{j}\frac{1}{2}\left(w + \frac{u}{w}\right) + \boldsymbol{k}\frac{1}{2}\left(w - \frac{u}{w}\right)$;

C) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\frac{uw}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \boldsymbol{j}\frac{vw}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \boldsymbol{k}\frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}}$;

D) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, 2w\sqrt{u^2 + uv} + \boldsymbol{j}\, 2w\sqrt{uv + v^2} + \boldsymbol{k}\, 4w^2(u + v)$;

E) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\sin w\sqrt{2uv - v^2} + \boldsymbol{j}\cos w\sqrt{2uv - v^2} + \boldsymbol{k}\, v$.

Megoldás. A (11) értelemben a kérdezett térfogatelem

$$dV = |\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_w|\, du\, dv\, dw.$$

A) $$\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_w = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 + w^2 \\ -w\sin v & w\cos v & 2uv \\ \cos v & \sin v & 0 \end{vmatrix} = -w(1 + w^2),$$

$$dV = w(1 + w^2)\, du\, dv\, dw, \quad (w \geqq 0);$$

B) $$dV = \frac{w^4 + u^2}{4v^2w^2}\, du\, dv\, dw, \quad (w > 0);$$

C) $$dV = \frac{w^2}{(u^2 + v^2)^{3/2}}\, du\, dv\, dw, \quad (u^2 + v^2 \neq 0);$$

D) $$dV = 8w^3\frac{(u + v)^2}{\sqrt{uv}}\, du\, dv\, dw, \quad (w \geqq 0, \quad uv > 0);$$

E) $$dV = v\, du\, dv\, dw, \quad (v \geqq 0).$$

5. Állapítsuk meg a gömb- és hengerkoordináta-rendszerben a koordináta-alakzatok érintő-, illetve normálvektorát, továbbá ív-, felszín- és térfogatelemét.

Megoldás. A) A gömbkoordináta-rendszert — a szokásos jelölésekkel — az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\, r\cos\vartheta\cos\varphi + \boldsymbol{j}\, r\cos\vartheta\sin\varphi + \boldsymbol{k}\, r\sin\vartheta$$

függvény határozza meg; (ezt — más jelölésekkel — már bemutattuk az 1. A) példában)

A koordinátavonalak érintővektorai:

$$\boldsymbol{r}_r = \boldsymbol{i} \cos\vartheta \cos\varphi + \boldsymbol{j} \cos\vartheta \sin\varphi + \boldsymbol{k} \sin\vartheta = \boldsymbol{t}_r,$$
$$\boldsymbol{r}_\vartheta = -\boldsymbol{i}\, r \sin\vartheta \cos\varphi - \boldsymbol{j}\, r \sin\vartheta \sin\varphi + \boldsymbol{k}\, r \cos\vartheta = r\, \boldsymbol{t}_\vartheta,$$
$$\boldsymbol{r}_\varphi = -\boldsymbol{i}\, r \cos\vartheta \sin\varphi + \boldsymbol{j}\, r \cos\vartheta \cos\varphi = r \cos\vartheta\, \boldsymbol{t}_\varphi.$$

Ezek egymásra merőlegesek, lévén

$$\boldsymbol{t}_r\, \boldsymbol{t}_\vartheta = -\cos\vartheta \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \cos\varphi - \cos\vartheta \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\vartheta = 0,$$
$$\boldsymbol{t}_\vartheta\, \boldsymbol{t}_\varphi = \sin\vartheta \cos\varphi \cdot \sin\varphi - \sin\vartheta \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0,$$
$$\boldsymbol{t}_\varphi\, \boldsymbol{t}_r = -\sin\varphi \cdot \cos\vartheta \cos\varphi + \cos\varphi \cdot \cos\vartheta \sin\varphi = 0.$$

Koordinátafelületek normálvektorai:

$$\operatorname{grad} r = \operatorname{grad} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{i} \cos\vartheta \cos\varphi + \boldsymbol{j} \cos\vartheta \sin\varphi + \boldsymbol{k} \sin\vartheta = \boldsymbol{n}_r,$$

$$\operatorname{grad} \vartheta = \operatorname{grad} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \left[-\boldsymbol{i}\, xz - \boldsymbol{j}\, yz - \boldsymbol{k}(x^2 + y^2)\right] =$$
$$= \frac{1}{r} (-\boldsymbol{i} \cos\varphi \sin\vartheta - \boldsymbol{j} \sin\varphi \sin\vartheta + \boldsymbol{k} \cos\vartheta) = \frac{1}{r} \boldsymbol{n}_\vartheta,$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-\boldsymbol{i}\, y + \boldsymbol{j}\, x) =$$
$$= \frac{1}{r \cos\vartheta} (-\boldsymbol{i} \sin\varphi + \boldsymbol{j} \cos\varphi) = \frac{1}{r \cos\vartheta} \boldsymbol{n}_\varphi.$$

Szemmel látható, hogy

$$\boldsymbol{n}_r = \boldsymbol{t}_r = \boldsymbol{i} \cos\vartheta \cos\varphi + \boldsymbol{j} \cos\vartheta \sin\varphi + \boldsymbol{k} \sin\vartheta,$$
$$\boldsymbol{n}_\vartheta = \boldsymbol{t}_\vartheta = -\boldsymbol{i} \sin\vartheta \cos\varphi - \boldsymbol{j} \sin\vartheta \sin\varphi + \boldsymbol{k} \cos\vartheta,$$
$$\boldsymbol{n}_\varphi = \boldsymbol{t}_\varphi = -\boldsymbol{i} \sin\varphi + \boldsymbol{j} \cos\varphi;$$

következésképpen

$$\boldsymbol{n}_r\, \boldsymbol{n}_\vartheta = \boldsymbol{n}_\vartheta\, \boldsymbol{n}_\varphi = \boldsymbol{n}_\varphi\, \boldsymbol{n}_r = 0.$$

A fentieket összevetve a (12), (13) formulákkal, megállapítható, hogy a gömbkoordináta-rendszer ortogonális. (Ez a szemlélet alapján is belátható.)

Az előzőkből kiolvashatók a LAMÉ-féle együtthatók:

$$r_r = \frac{1}{g_r} = 1, \qquad r_\vartheta = \frac{1}{g_\vartheta} = r, \qquad r_\varphi = \frac{1}{g_\varphi} = r \cos\vartheta,$$

összhangban a (14) formulával.

A koordinátagörbék íveleme — a (15a) szerint —

$$ds_r = r_r\, dr = dr, \quad ds_\vartheta = r_\vartheta\, d\vartheta = r\, d\vartheta, \quad ds_\varphi = r_\varphi\, d\varphi = r \cos\vartheta\, d\varphi.$$

A koordinátafelületek felszíneleme — a (16) értelmében —

$$dF_r = ds_\vartheta\, ds_\varphi = r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \quad dF_\vartheta = ds_\varphi\, ds_r = r\cos\vartheta\, d\varphi\, dr,$$

$$dF_\varphi = ds_r\, ds_\vartheta = r\, dr\, d\vartheta.$$

Az (ilyen felszínelemek határolta) térfogatelem — a (17) értelmében —

$$dV = ds_r\, ds_\vartheta\, ds_\varphi = r^2 \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

B) A hengerkoordináta-rendszert — a szokásos jelölésekkel — az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,\varrho\cos\varphi + \boldsymbol{j}\,\varrho\sin\varphi + \boldsymbol{k}\,z$$

függvény határozza meg; (ezt — más jelölésekkel — már bemutattuk az 1. B) példában).

Ez szintén ortogonális koordináta-rendszer. Jellemző vektorai:

$$\boldsymbol{t}_\varrho = \boldsymbol{n}_\varrho = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi, \quad \boldsymbol{t}_\varphi = \boldsymbol{n}_\varphi = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi; \quad \boldsymbol{t}_z = \boldsymbol{n}_z = \boldsymbol{k},$$

ahol

$$\boldsymbol{t}_\varrho \boldsymbol{t}_\varphi = \boldsymbol{t}_\varphi \boldsymbol{t}_z = \boldsymbol{t}_z \boldsymbol{t}_\varrho = 0.$$

LAMÉ-féle együtthatói:

$$r_\varrho = \frac{1}{g_\varrho} = 1, \quad r_\varphi = \frac{1}{g_\varphi} = \varrho, \quad r_z = \frac{1}{g_z} = 1.$$

Az ív-, felszín- és térfogatelemek:

$$ds_\varrho = d\varrho, \quad ds_\varphi = \varrho\, d\varphi, \quad ds_z = dz;$$

$$dF_\varrho = \varrho\, d\varphi\, dz, \quad dF_\varphi = d\varrho\, dz, \quad dF_z = \varrho\, d\varphi\, d\varrho;$$

$$dV = \varrho\, d\varphi\, d\varrho\, dz.$$

6. Írjuk fel a **grad** ψ, div $\bar\omega$, $\Delta\psi$, **rot** $\bar\omega$ kifejezését gömb- és hengerkoordinátás alakban; $\bar\omega(\xi, \eta, \zeta)$.

Megoldás. A (18)—(21) alatt megismert

$$\mathbf{grad}\,\psi = \frac{\boldsymbol{t}_u}{r_u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\boldsymbol{t}_v}{r_v}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\boldsymbol{t}_w}{r_w}\frac{\partial\psi}{\partial w},$$

$$\operatorname{div}\bar\omega = \frac{1}{r_u r_v r_w}\left[\frac{\partial(\xi r_v r_w)}{\partial u} + \frac{\partial(\eta r_w r_u)}{\partial v} + \frac{\partial(\zeta r_u r_v)}{\partial w}\right],$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{r_u r_v r_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r_v r_w}{r_u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_w r_u}{r_v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{r_u r_v}{r_w}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)\right],$$

$$\mathbf{rot}\,\bar\omega = \frac{\boldsymbol{t}_u}{r_v r_w}\left[\frac{\partial(\zeta r_w)}{\partial v} - \frac{\partial(\eta r_v)}{\partial w}\right] + \frac{\boldsymbol{t}_v}{r_w r_u}\left[\frac{\partial(\xi r_u)}{\partial w} - \frac{\partial(\zeta r_w)}{\partial u}\right] +$$

$$+ \frac{\boldsymbol{t}_w}{r_u r_v}\left[\frac{\partial(\eta r_v)}{\partial u} - \frac{\partial(\xi r_u)}{\partial v}\right]$$

formulákat alkalmazzuk a gömb- és hengerkoordináta-rendszerben.

A) A gömbkoordináta-rendszerben

$$u = r, \quad v = \vartheta, \quad w = \varphi.$$

A kérdezett deriváltalakzatok — az 5. A) példában nyert

$$r_r = 1, \quad r_\vartheta = r, \quad r_\varphi = r \cos \vartheta$$

együtthatók és a $\boldsymbol{t}_r$, $\boldsymbol{t}_\vartheta$, $\boldsymbol{t}_\varphi$ érintő egységvektorok felhasználásával — így alakulnak e koordináta-rendszerben:

$$\operatorname{grad} \psi = \boldsymbol{t}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{t}_\vartheta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{\boldsymbol{t}_\varphi}{r \cos \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

$$\operatorname{div} \bar{\omega} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\xi r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial (\eta \cos \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi},$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} r^2 \right) + \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \cos \vartheta \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2},$$

$$\operatorname{rot} \bar{\omega} = \frac{\boldsymbol{t}_r}{r \cos \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\zeta \cos \vartheta) - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\boldsymbol{t}_\vartheta}{r} \left[\frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \zeta) \right] +$$

$$+ \frac{\boldsymbol{t}_\varphi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \eta) - \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right].$$

B) A hengerkoordináta-rendszerben

$$u = \varrho, \quad v = \varphi, \quad w = z.$$

A kérdezett deriváltalakzatok — az 5. B) példában nyert

$$r_\varrho = 1, \quad r_\varphi = \varrho, \quad r_z = 1$$

együtthatók és a $\boldsymbol{t}_\varrho$, $\boldsymbol{t}_\varphi$, $\boldsymbol{t}_z$ érintő egységvektorok felhasználásával — így alakulnak e koordináta-rendszerben:

$$\operatorname{grad} \psi = \boldsymbol{t}_\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} + \frac{\boldsymbol{t}_\varphi}{\varrho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \boldsymbol{t}_z \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \bar{\omega} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\xi \varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \varrho \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{rot} \bar{\omega} = \boldsymbol{t}_\varrho \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \boldsymbol{t}_p \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} \right) + \boldsymbol{t}_z \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \eta) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right].$$

c) Potenciálelméleti problémák*

α) A v meghatározása a div v, rot v és v_n alapján

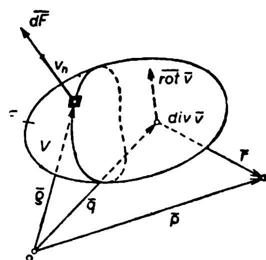
I°. Egyértelműségi tétel. 1'. Legyen ismeretes az F zárt felület határolta V tér minden q pontjában a $v(p)$ vektortér divergenciája és rotációja:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \varrho(\boldsymbol{q}), \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \bar{\omega}(\boldsymbol{q}), \tag{1a, b}$$

továbbá az F felület minden $\bar{\varrho}$ pontjában a $\boldsymbol{v}$ vektor normális vetülete:

$$v_n = \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{n}^0 = f(\bar{\varrho}),^{**} \tag{1c}$$

(80. ábra). Feladatunk e három feltételi egyenletet kielégítő $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ vektortér meghatározása.



80. ábra

2'. **Tétel.** *Az* (1a, b, c) *feltételek mellett a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ *vektortér egyértelműen meghatározható.*

Ui. tegyük fel, hogy két olyan $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$ vektor is létezik, amely az (1a, b, c)-nek eleget tesz. Ekkor a $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ különbségi vektorra nézve igaz, hogy

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{d} = 0, \quad d_n = 0. \tag{1a}$$

A $\operatorname{rot} \boldsymbol{d} = 0$ miatt a $\boldsymbol{v}$ vektor potenciálos:

$$\boldsymbol{d} = \operatorname{grad} \varphi,$$

a φ skalár pedig a $\operatorname{div} \boldsymbol{d} = 0$ miatt harmonikus a V-ben (vagyis ott kielégíti a LAPLACE-egyenletet):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{d} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \triangle\varphi = 0,$$

végül a $d_n = 0$ miatt az F felületen

$$d_n = \operatorname{grad} \varphi \cdot \boldsymbol{n}^0 = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0.$$

Alkalmazva most — a b) β) IV° (21) alatt megismert —

$$\iiint_{(V)} (\varphi \triangle\varphi + \operatorname{grad}^2 \varphi)\, dV = \oiint_{(F)} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dF \tag{1β}$$

GREEN-formulát, azt kapjuk, hogy

$$\iiint_{(V)} \operatorname{grad}^2 \varphi\, dV = 0,$$

következésképpen

$$\operatorname{grad} \varphi = \boldsymbol{d} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \text{azaz} \quad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2,$$

tehát valóban csak egyetlen, az (1a, b, c) feltételeknek eleget tevő $\boldsymbol{v}$ vektor létezik.

* E rész nem szerepel a szorosan vett tananyagban (1956).

** E c) részben (célszerűségi okokból) $\bar{p}$-vel jelöljük a vizsgált pontot, $\bar{q}$-val a V forrás-(nyelő-) és örvénytér pontjait, $\bar{r}$-rel a $\bar{p} - \bar{q}$ különbségi vektort, $\bar{\varrho}$-val az F felület pontjait; e vektorok nagyságát rendre p, q, r, ϱ módon jelöljük.

3'. A fentebbiekben és a későbbiekben is *feltételezzük*, hogy 1) a V tér véges számú olyan részre osztható, amelyek mindegyikében $\varrho, \bar{\omega}$ és parciális deriváltjaik egyenletesen folytonosak, 2) maga $\boldsymbol{v}$ mindenütt folytonos, de 3) deriváltjai véges számú felületen szakadással rendelkezhetnek. E feltételek mellett nyilván érvényes az (1β) formula.

4'. Megjegyzendő, hogy az (1a, b, c) egyenletrendszernek csak akkor *létezik* egyáltalában megoldása, ha — az ismert

$$\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = 0, \quad \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV = \oint\limits_{(F)} v_n\, dF$$

azonosságoknak megfelelően — fennáll, hogy

$$\operatorname{div} \bar{\omega} = 0, \quad \iiint\limits_{(V)} \varrho\, dV = \oint\limits_{(F)} v_n\, dF. \tag{1d}$$

II°. A POISSON-féle és a LAPLACE-féle egyenlet. Tárgyaljuk az I° 1'-ben megfogalmazott feladat *három speciális esetét*.

1'. Keresendő először azon $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r})$ vektortér, amely eleget tesz a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = \varrho, \quad \mathbf{rot}\, v_1 = 0 \tag{2a, b}$$

egyenletrendszernek.

A (2b) miatt $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{grad}\, \varphi$, a (2a) szerint pedig

$$\triangle \varphi = \varrho. \tag{3}$$

Ez a *skaláris* POISSON-*féle egyenlet*. Korlátos V tartomány esetén a (3) csak a V pontjaiban teljesül; ha azonban a ϱ-nak a V-ben előírt értékeit a V-n kívül tetszőlegesen felvesszük (pl. zérusnak), akkor a (3) az egész végtelen térre is megoldható.

2'. Keresendő másodszor azon $\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{r})$ vektortér, amely eleget tesz a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}_2 = \bar{\omega} \tag{4a, b}$$

egyenletrendszernek.

A (4a) miatt $\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}$, a (4b) szerint pedig

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{w} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{w} - \triangle \boldsymbol{w} = \bar{\omega}.$$

Ez — az általánosság megsértése nélkül

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \tag{4c}$$

feltételezésével — végül a

$$\triangle \boldsymbol{w} = -\bar{\omega} \tag{5a}$$

alakú *vektoriális* POISSON-*féle egyenletre*, vagy koordinátákra bontva — a (3)-hoz hasonló —

$$\triangle w_x = -\omega_x, \quad \triangle w_y = -\omega_y, \quad \triangle w_z = -\omega_z \tag{5b}$$

három skaláris POISSON-féle egyenletre vezet.

A végtelen térben nyilván a

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

lesz az a vektor, amely a (2a, b)-ből és a (4a, b, c)-ből összetett

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \varrho, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \bar{\omega}$$

egyenletrendszert kielégíti.

Korlátos V tér esetén kiszámítjuk az F felületre vonatkozó

$$a_{1n} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{n}^0 = f_1(\bar{\varrho}), \qquad a_{2n} = \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{n}^0 = f_2(\bar{\varrho})$$

értékeket; ezekkel

$$f_3(\bar{\varrho}) = f(\bar{\varrho}) - f_1(\bar{\varrho}) - f_2(\bar{\varrho}).$$

3'. Keresendő harmadszor azon $\boldsymbol{v}_3(\boldsymbol{r})$ vektortér, amely eleget tesz a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_3 = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_3 = 0, \quad v_{3n} = f_3(\bar{\varrho}) \tag{6a, b, c}$$

egyenletrendszernek.

A (6b) miatt $\boldsymbol{v}_3 = \operatorname{grad} \psi$, a (6a) szerint pedig

$$\triangle \psi = 0. \tag{7a}$$

Ez a LAPLACE-*féle egyenlet.* A (6c) értelmében végül

$$\operatorname{grad} \psi \cdot \boldsymbol{n}^0 = \frac{\partial \psi}{\partial n} = f_3(\bar{\varrho}). \tag{7b}$$

A LAPLACE-féle egyenletet kielégítő és az adott F felületen előírt normális deriválttal rendelkező ψ függvény meghatározását NEUMANN-*féle feladat*nak nevezik. E feladat igen nagy jelentőségű a hidrodinamikában.

Megjegyezzük, hogy a LAPLACE-féle egyenletet kielégítő és az adott F felületen előírt értékű ψ függvény meghatározását DIRICHLET-*féle feladat*nak nevezik. E feladat nagy fontosságú az elektro- és hidrodinamikában stb.

Könnyen belátható, hogy *korlátos V tér* esetén a

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$$

lesz az a vektor, amely a (2a, b); (4a, b, c) és (6a, b, c) egyenletből összetett

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \varrho(\boldsymbol{q}), \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \bar{\omega}(\boldsymbol{q}), \quad v_n = f(\bar{\varrho})$$

egyenletrendszert kielégíti, sőt — az I°-ben megismert egyértelműségi tétel értelmében — annak egyetlen megoldása.

III°. Diszkrét és folytonos eloszlás potenciálja. 1'. Lássuk először a II° 1'-ben nyert POISSON-egyenletnek egy egyszerű, fizikai jellegű, de nem teljesen szigorú megoldását.

Tegyük fel, hogy $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ mindenütt, kivéve a $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \ldots, \boldsymbol{q}_n$ pontot, amelyben $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bőségű forrás található.

Ekkor — mint tudjuk — a φ_1 potenciál

$$\varphi_1(\boldsymbol{p}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{4\pi r_i}, \quad \text{ahol} \quad r_i = |\boldsymbol{r}_i| = |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}_i|, \tag{8a}$$

a $v_1 = \mathbf{grad}\, \varphi_1$ fluxusa pedig valamely zárt F felületen

$$\iint_{(V)} v_1\, dF = \sum' e_i, \tag{8b}$$

vagyis a körülzárt források hozamának összege.

2'. Térjünk át a kérdéses

$$v = \mathbf{grad}\, \varphi \quad \text{és} \quad \operatorname{div} v = \varrho(p), \quad \text{azaz} \quad \triangle\varphi = \varrho(p) \tag{9}$$

esetre, feltéve, hogy az adott $\varrho(p)$ függvény első deriváltjaival együtt — esetleg véges számú felület kivételével — mindenütt *folytonos*, és hogy — végtelen tartomány esetén — a $p = |p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$ határátmenetnél $\varrho(p) \to 0$, mégpedig

$$\lim_{p \to \infty} p^{2+\lambda} \varrho(p) < A < \infty, \quad 0 < \lambda < 1 \tag{10}$$

módon. Ekkor a φ potenciál közelítő értéke

$$\varphi_1(p) = -\sum \frac{\varrho(q_i)\, \Delta V_i}{4\pi\, r_i},$$

pontos értéke pedig, max $\Delta V_i \to 0$ határátmenetnél

$$\boxed{\varphi(p) = -\iiint \frac{\varrho(q)\, dV}{4\pi\, r}.} \tag{11}$$

Könnyű belátni, hogy e $\varphi(p)$ függvény a (9) megoldása. Ui. a $v = \mathbf{grad}\, \varphi$ fluxusa valamely zárt felületen — a GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-tétel alkalmazásával —

$$\oint_{(F)} v\, dF = \lim \oint v_1\, dF = \lim \sum' \varrho(q_i)\, \Delta V_i =$$

$$= \iiint_{(V)} \varrho\, dV = \iiint_{(V)} \operatorname{div} v\, dV,$$

tehát $V \to 0$-nál $\operatorname{div} v = \varrho$, q. e. d.

3'. Eredményeink nagy jelentőségűek a tömegvonzás elméletében. NEWTON törvénye szerint a q pontbeli m tömeg a p pontbeli tömegegységre

$$f = -\frac{m}{r^2} r^0 = -\frac{m}{r^3} r \quad (r = p - q, \quad r = |r|)$$

vonzóerőt gyakorol. Ez előállítható

$$f = \mathbf{grad}\, \Psi, \quad \Psi = \frac{m}{r}$$

módon, ahol Ψ a vonzóerő potenciálja.

Folytonos, $\varrho(q)$ sűrűségű tömegeloszlás esetén az ún. NEWTON-*féle potenciál* és a vonzóerő nyilván

$$\Psi(p) = \iiint \frac{\varrho(q)\, dV}{r}, \quad f = \mathbf{grad}\, \Psi \tag{12}$$

alakot ölt.

IV°. **Potenciálfüggvény jellegzetes előállítása.** 1'. A továbbiakban fontos szerepet játszik a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{13a}$$

függvény. Ez — akár a $\boldsymbol{p}(x, y, z)$, akár a $\boldsymbol{q}(\xi, \eta, \zeta)$ pontot tekintjük változónak — kielégíti a LAPLACE egyenletet, azaz

$$\Delta_{\bar p} \frac{1}{r} = - \Delta_{\bar q} \frac{1}{r} = 0, \quad r \neq 0. \tag{13b}$$

Alkalmazzuk most az

$$\iiint\limits_{(V)} (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi)\, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dF \tag{14}$$

GREEN-formulát a $\psi = 1/r$ és egy olyan $\varphi(\boldsymbol{q})$ függvényre, amely első deriváltjaival együtt folytonos, de második deriváltjai véges számú felületen szakadásosak lehetnek. Legyen $\boldsymbol{p}(x, y, z)$ a (a levezetés során rögzített) vizsgálati, $\boldsymbol{q}(\xi, \eta, \zeta)$ pedig a változó pont.

Ha a $\boldsymbol{p}$ pont a V térrészen *kívül* van, akkor $\psi = 1/r$ a V-ben mindenütt folytonos, a (13b)-nek eleget tesz, tehát a (14) szerint

$$-\iiint\limits_{(V)} \frac{\Delta\varphi}{r}\, dV = \oint\!\!\!\oint \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dF. \tag{15}$$

2'. Ha azonban a $\boldsymbol{p}$ pont a V térrészen *belül* van, akkor a (14) a V térrészre nem alkalmazható, mert $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{p}$-nél $\psi = 1/r \to \infty$. Ehelyett a (14)-et a $V_\varepsilon = V - v$ térrészre írjuk fel, ahol v a $|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}| = \varepsilon$ egyenletű kis f gömbfelület belseje (81. ábra); így

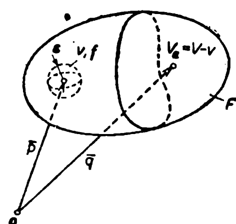
$$-\iiint\limits_{(V_\varepsilon)} \frac{\Delta\varphi}{r}\, dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dF - \oint\!\!\!\oint\limits_{(f)} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial \varepsilon}\right) df,$$

ahol az f gömbfelület normálisai az $\bar\varepsilon = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$ vektorok. A V_ε-ra és az f-re vonatkozó integrálok becslése és határértéke $\varepsilon \to 0$-nál:

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{(f)} \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\, df < \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot \max_{(f)} \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = 4\pi\varepsilon \cdot \max_{(f)} \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} \to 0,$$

$$-\oint\!\!\!\oint\limits_{(f)} \varphi \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\, df = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint\!\!\!\oint\limits_{(f)} \varphi\, df = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot \varphi(\boldsymbol{q}_{*0}) \to 4\pi\varphi(\boldsymbol{p}),$$

$$\iiint\limits_{(V_\varepsilon)} \frac{\Delta\varphi}{r}\, dV \to \iiint\limits_{(V)} \frac{\Delta\varphi}{r}\, dV.$$



81. ábra

Ezek figyelembevételével, majd egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$\varphi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V)}\frac{\Delta\varphi}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{(F)}\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dF - \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{(F)}\varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dF\,. \tag{16}$$

E nagyfontosságú formula *bármely* (első és második deriváltjaival együtt folytonos) *φ potenciálfüggvényt térbeli eloszlás, egyszerű réteg és kettős réteg potenciáljának összegeként állít elő*.*

3'. Ha $r \to \infty$, akkor $\varphi \to 0$, mégpedig úgy, hogy a $|\bar{\varrho}| = R$ gömbfelületen (F_R)

$$|\operatorname{grad}\varphi| < \frac{K}{R^{1+\lambda}}, \qquad |\varphi| < \frac{K}{R^{\lambda}} \qquad (K < \infty,\ \lambda > 0). \tag{17}$$

Az integrálok becslése és határértéke $R \to \infty$-nál:

$$\oiint\limits_{(F_R)}\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dF < \frac{4\pi R^2 K}{r R^{1+\lambda}} \to 0, \qquad \oiint\limits_{(F_R)}\varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dF < \frac{4\pi R^2 K}{r^2 R^{\lambda}} \to 0,$$

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\Delta\varphi}{r}\,dV \to \iiint\limits_{(V_\infty)}\frac{\Delta\varphi}{r}\,dV\,.$$

Ezek felhasználásával a (16) formula az $R \to \infty$ határátmenet során a

$$\varphi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V_\infty)}\frac{\Delta\varphi}{r}\,dV \tag{18}$$

alakra egyszerűsödik.

4'. Ha az (első és második deriváltjaival együtt folytonos) φ potenciál a V tartományban még *harmonikus* is, azaz ott

$$\Delta\varphi = 0, \tag{19}$$

akkor a (16) formula

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{(F)}\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dF - \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{(F)}\varphi\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r}\,dF \tag{20}$$

alakot ölt. Eszerint ***bármely harmonikus potenciálfüggvény előállítható egyszerű és kettős réteg potenciáljának összegeként.***

* **Az egyszerű és kettős rétegről l. bővebben a *β)* pontban!**

A (20) formulából kitűnik továbbá, hogy *harmonikus φ függvény V-beli értékeit teljesen meghatározzák a φ és a $\partial\varphi/\partial n$ függvény F menti értékei.*

Sajnos, rendszerint vagy csak a φ felületi értékei (DIRICHLET-feladat), vagy csak a $\partial\varphi/\partial n$ felületi értékei (NEUMANN-feladat) ismeretesek, ezért csupán a (20) nem teszi lehetővé sem a DIRICHLET-, sem a NEUMANN-feladat megoldását.

5′. Megemlítjük még a következő tételeket:

Harmonikus φ függvény F menti értékei teljesen meghatározzák a φ-nek V-beli értékeit.

Harmonikus φ függvény esetén a $\partial\varphi/\partial n$-nek F-menti értékei egy állandó erejéig meghatározzák a φ-nek V-beli értékeit.

Igazolásuk az I° 2′-höz hasonló módon történik.

Az egész végtelen térben harmonikus és a (17) *feltételnek eleget tevő függvény a* $\varphi = 0$.

Ennek igazsága a (18)-ból nyilvánvaló.

V°. A POISSON-egyenlet megoldása. 1′. Térjünk vissza a II° 1′-ben megismert, majd a III° 2′, 3′-ben egyszerűen megoldott

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\varphi \quad \text{és} \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = \varrho, \quad \text{azaz} \quad \triangle\varphi = \varrho \tag{21}$$

POISSON-egyenletre, szigorúbb tárgyalás céljából.

Igazolható, hogy *ha ezen egyenletnek létezik a* (17) *feltételt is kielégítő megoldása, akkor ez — a* (18) formulával összhangban — *csakis a*

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V_\infty)}\frac{\varrho(\boldsymbol{q})\,dV}{r} = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V_\infty)}\frac{\varrho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{22}$$

alakú NEWTON-*féle potenciál lehet.*

Minthogy azonban nem tudjuk előre, van-e a (21) egyenletnek megoldása, ezért meg kell mutatni, hogy a (22) valóban kielégíti a (21) egyenletet. E szigorúbb igazolás tekintetében az irodalomra utalunk.*

A fentieknek megfelelően, az eredeti

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = \varrho \tag{23}$$

egyenletrendszer megoldása végül:

$$\boxed{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\,\mathbf{grad}\iiint\limits_{(V_\infty)}\frac{\varrho(\boldsymbol{q})\,dV}{r}\,.} \tag{24}$$

2′. Térjünk rá most a II° 2′-ben említett

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \bar{\omega} \tag{25a}$$

egyenletrendszer, illetve a belőle

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0 \tag{25b}$$

* L. pl. Кочин [M. 8.] 221–227. o.

sajátságú $\boldsymbol{w}$ *vektorpotenciál*lal nyerhető

$$\Delta \boldsymbol{w} = -\bar{\omega} \tag{26a}$$

vektoriális POISSON-egyenlet, vagy a

$$\Delta w_x = -\omega_x, \quad \Delta w_y = -\omega_y, \quad \Delta w_z = -\omega_z \tag{26b}$$

skaláris POISSON-egyenletrendszer megoldására.

Az $\bar{\omega}$-ról feltételezzük, hogy div $\bar{\omega} = 0$, továbbá első deriváltjaival együtt — esetleg véges számú felület kivételével — mindenütt *folytonos*. Megjegyzendő, hogy e felületeken az $\bar{\omega}$ vektor normális komponensének folytonosnak kell maradnia, csak tangenciális komponense szenvedhet ott szakadást. Végül megköveteljük, hogy $p = |\boldsymbol{p}| \rightarrow \infty$ esetén

$$|p^{2+\lambda}\,\bar{\omega}| < A \quad (0 < \lambda < 1, \quad A < \infty) \tag{27}$$

legyen.

Ha a (26a, b)-nek létezik az említett feltételeket kielégítő megoldása, akkor — az 1'-ben tanultak értelmében — ez csakis a

$$w_x(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V_\infty)} \frac{\omega_x(\boldsymbol{q})\,dV}{r}, \quad w_y(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{V_\infty} \frac{\omega_y(\boldsymbol{q})\,dV}{r}, \quad w_z(\boldsymbol{p}) = \iiint\limits_{V_\infty} \frac{\omega_z(\boldsymbol{q})\,dV}{r} \tag{28a}$$

skaláris potenciálhármas, vagy a

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V_\infty)} \frac{\bar{\omega}(\boldsymbol{q})\,dV}{r} \tag{28b}$$

vektorpotenciál lehet.

Szigorúan véve még igazolni kell, hogy e vektorpotenciál kielégíti a (25b) második egyenletét. Erre nézve az irodalomra utalunk.*

A fentebbieknek megfelelően, a (25a) eredeti egyenlet megoldása végül:

$$\boxed{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{rot}\iiint\limits_{(V_\infty)} \frac{\bar{\omega}(\boldsymbol{q})\,dV}{r}\,.} \tag{29}$$

3'. Végül térjünk vissza az I° 1'-ben felvetett, majd II° 2'-ben tárgyalt feladatra, most *az egész végtelen tér*re vonatkozólag. Keresendő tehát azon $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ vektortér, amely az egész végtelen térben kielégíti a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \varrho, \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \bar{\omega} \tag{30}$$

egyenletrendszert.

Az 1' és 2' értelmében ennek a megoldása:

$$\boxed{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\,\mathbf{grad}\iiint\limits_{(V_\infty)} \frac{\varrho(\boldsymbol{q})\,dV}{r} + \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{rot}\iiint\limits_{(V_\infty)} \frac{\bar{\omega}(\boldsymbol{q})\,dV}{r}\,.} \tag{31}$$

Itt feltételezzük, hogy ϱ és $\bar{\omega}$ első deriváltjaival együtt folytonos (és korlátos) az egész végtelen térben, véges számú felület kivételével.

* L. pl. Кочин [M. 8.] 229–230 o.

E felületeken az $\bar{\omega}$ vektornak csak az érintőleges komponense szenvedhet szakadást, normális komponense pedig folytonos kell, hogy maradjon. Teljesülni kell még a $\operatorname{div} \bar{\omega} = 0$ feltételnek. Végül megkívánjuk, hogy ϱ és $\bar{\omega}$ a tér minden pontjában eleget tegyen az

$$|\varrho\, q^{2+\lambda}| < K, \quad |\bar{\omega}\, q^{2+\lambda}| < K \quad (0 < \lambda < 1, \quad K < \infty, \quad q = |\boldsymbol{q}|) \tag{32}$$

egyenlőtlenségnek.

Szigorúan véve még igazolni kell, hogy a (31) olyan megoldása a (30) egyenletrendszernek, amely $p = |\boldsymbol{p}| \to \infty$-nél eleget tesz az

$$|\boldsymbol{v}\, p^{1+\lambda}| < L \quad (0 < \lambda < 1, \quad L < \infty) \tag{33}$$

egyenlőtlenségnek. Erre nézve az irodalomra utalunk.*

Ha a (33) feltétel nem teljesül, akkor a (30) egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Pl. a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$$

egyenletrendszer ilyen megoldásai

$$\boldsymbol{v} = \text{const}, \quad \boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} \quad \text{stb.}$$

Megjegyzendő, hogy a (31) eredmény úgy tekinthető, mint *a $\boldsymbol{v}$ vektor felbontása potenciálos és szolenoidális komponensre.*

VI°. A Laplace-egyenlet megoldása. 1′. Térjünk vissza a II° 3′-ben felvetett és a IV° 4′-ben érintett feladatra. Keresendő tehát azon $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ vektortér, amely a V térben eleget tesz a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0 \tag{31'}$$

egyenletrendszernek, illetve a belőle $\boldsymbol{v} = \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi$ értelmében következő

$$\triangle \varphi = 0 \tag{32'}$$

Laplace-egyenletnek, az F határfelületen pedig — Dirichlet-feladat esetén — a

$$\varphi = f(\varrho), \tag{33'}$$

— Neumann-feladat esetén — a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f(\varrho) \tag{34}$$

feltételnek.

Ha esetleg az F felületen mind a (33′), mind pedig a (34) függvény ismeretes, akkor a φ értékét a V tetszőleges belső pontjában — a IV° 4′-ben megismert —

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi} \oint\!\!\oint_{(F)} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dF - \frac{1}{4\pi} \oint\!\!\oint_{(F)} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\, dF \tag{35}$$

formula szolgáltatja.

* L. pl. Кочин [M. 8.] 231–232. o.

2'. DIRICHLET-feladat esetén az F felületen csak a (33') függvény ismeretes. Ekkor nyilván igyekeznünk kell kiküszöbölni a (35) formulából a $\partial\varphi/\partial n$ deriváltat. E célból próbálunk olyan $g(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}) = g(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta)$ függvényt találni, amely a V térben ($\boldsymbol{q}$ szerint) kielégíti a LAPLACE-egyenletet, az F felületen pedig $-1/r$ értéket vesz fel, azaz

$$\triangle_{\bar{q}}\, g = 0, \qquad g(\bar{\boldsymbol{p}};\bar{\varrho}) = -\frac{1}{r}\,. \tag{36}$$

E $g(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q})$ függvény segítségével képezzük a

$$G(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}) = \frac{1}{r} + g(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}) \tag{37a}$$

alakú, ún. GREEN-függvényt; erre nézve

$$\triangle_{\bar{q}}\, G = 0, \qquad G(\boldsymbol{p};\bar{\varrho}) = 0. \tag{37b}$$

A G meghatározása láthatóan maga is DIRICHLET-feladat, mégpedig zérus kerületérték mellett.

Alkalmazzuk most a — b) β) IV°-ben megismert — második GREEN-formulát a φ és a g függvényre; $\triangle\varphi = \triangle g = 0$ lévén írható, hogy

$$\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{(F)} g\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dF - \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{(F)} \varphi\,\frac{\partial g}{\partial n}\,dF = 0. \tag{38}$$

A (35) formulában $1/r = G - g$ helyettesítéssel élve, majd a (37b)-t és a (38)-at figyelembe véve, a következő nevezetes eredményt kapjuk:

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{(F)} \varphi(\bar{\varrho})\left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{\bar{p};\,\bar{\varrho}} dF.} \tag{39}$$

E formula *harmonikus függvénynek saját kerületértékeivel való előállítását* szolgáltatja.

3'. NEUMANN-feladat esetén az F felületen csak a (34) függvény ismeretes. Ekkor a φ függvényt igyekszünk kiküszöbölni a (35) formulából. E célból olyan

$$H(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}) = \frac{1}{r} + h(\boldsymbol{p};\boldsymbol{q}) \tag{40a}$$

függvényt keresünk, amely a V térben és az F felületen

$$\triangle_{\bar{q}}\, H = 0, \qquad \text{illetve} \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{\bar{\varrho}} = \frac{4\pi}{F} \tag{40b}$$

tulajdonságú, ahol F a szóban forgó felület felszíne. A H meghatározása láthatóan maga is NEUMANN-feladat, mégpedig állandó kerületérték mellett. Mint a IV° 5'-ből tudjuk, a H függvény csak egy állandó erejéig határozható meg. A H teljes meghatározása céljából még megköveteljük, hogy

$$\oint\!\!\oint_{(F)} H(\boldsymbol{p};\bar{\varrho})\,dF = 0 \tag{40c}$$

legyen.

Alkalmazzuk most a — b) *β)* IV°-ben megismert — második Green-formulát a φ és a h függvényre; $\triangle\varphi = \triangle h = 0$ miatt írható, hogy

$$\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{(F)} h\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dF - \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{(F)} \varphi\frac{\partial h}{\partial n}\,dF = 0. \tag{41}$$

A (35) formulában $1/r = H - h$ helyettesítéssel élve, majd a (41)-et, a (40b)-t és a vele kapcsolatos

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{(F)} \frac{\partial H}{\partial n}\varphi\,dF = -\frac{1}{F}\oint\!\!\!\oint_{(F)} \varphi\,dF = \text{const} \tag{42}$$

körülményt figyelembe véve, a következő fontos eredményt kapjuk:

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{(F)} H(\boldsymbol{p};\bar{\varrho})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\bar{\varrho}} dF + C.} \tag{43}$$

E formula *harmonikus függvénynek normális deriváltja kerületértékeivel való előállítását* szolgáltatja.

Megjegyzendő, hogy a $\partial\varphi/\partial n = f(\bar{\varrho})$ kerületértékek nem írhatók elő tetszőlegesen, mert ki kell elégíteniök a — b) *β)* IV° (22) formulából következő —

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dF = 0 \tag{44}$$

feltételt.

VII°. A $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ m e g h a t á r o z á s a v é g e s t é r b e n, a $\varrho(\boldsymbol{q})$, $\bar{\omega}(\boldsymbol{q})$ és $f(\bar{\varrho})$ i s m e r e t é b e n. 1'. Végezetül — összefoglalás céljából — térjünk vissza az I° 1'-ben felvetett, a II° 3'-ben véges, az V° 3'-ben végtelen térre tárgyalt általános feladatra. Nevezetesen keresendő a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ vektortér, ha ismeretes a V térben

$$\text{div}\,\boldsymbol{v} = \varrho(\boldsymbol{q}), \quad \textbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \bar{\omega}(\boldsymbol{q}), \tag{45a}$$

az F határfelületen pedig

$$v_n = f(\bar{\varrho}), \tag{45b}$$

és ϱ, $\bar{\omega}$, f kielégíti a

$$\text{div}\,\bar{\omega} = 0, \quad \iiint_{(V)} \varrho(\boldsymbol{q})\,dV = \oint\!\!\!\oint_{(F)} f(\bar{\varrho})\,dF \tag{45c}$$

követelményeket.

Feltételezzük továbbá, hogy ϱ és $\bar{\omega}$ első deriváltjaival együtt — esetleg véges számú felület kivételével — mindenütt folytonos. E felületeken az $\bar{\omega}$ vektornak csak a tangenciális komponense szenvedhet szakadást, normális komponense nem.

A (45a, b, c) egyenletrendszer megoldása három vektor összege, nevezetesen

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}) = \textbf{grad}\,\varphi + \textbf{rot}\,\boldsymbol{w} + \textbf{grad}\,\psi. \tag{46}$$

2'. A φ potenciál — a V-n kívül $\varrho = 0$ feltevéssel —

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V)}\frac{\varrho(\boldsymbol{q})\,dV}{r} \tag{47}$$

alakot ölt.

A $\boldsymbol{w}$ vektorpotenciálra térve, a V-n kívüli $\omega = 0$ feltevés alkalmatlan, mert az F-en általában $\omega_n \neq 0$, tehát ott ω_n szakadást szenvedne. Ennek elkerülésére $\bar{\omega}$ a V-n kívül úgy választandó, hogy az F-en ω_n folytonos maradjon, a végtelenben pedig teljesüljön a (27) alatti $|p^{2+\lambda}\,\omega| < A$ feltétel; ekkor a $\boldsymbol{w}$ vektorpotenciál

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V_\infty)}\frac{\ddot{\omega}(\boldsymbol{q})\,dV}{r} \tag{48}$$

módon alakul.

Alkalmas $\bar{\omega}$ nyerhető a V külsejére vonatkozó

$$\bar{\omega} = \mathbf{grad}\,\chi, \qquad \omega_n = \frac{\partial\chi}{\partial n} \tag{49a}$$

feltevéssel, amelyből — a (45c) miatt — következik, hogy

$$\triangle\chi = 0, \qquad \oiint\limits_{(F)}\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dF = 0. \tag{49b}$$

A χ meghatározása tehát NEUMANN-feladat megoldását kívánja. Igazolható, hogy az említett tulajdonságú χ a végtelenben

$$|p^3\,\mathrm{grad}\,\chi| < M \qquad (M < \infty) \tag{49c}$$

módon viselkedik, ami megfelel a követelményeknek.

A $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p}) = \mathbf{grad}\,\varphi + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}$ vektortér tulajdonságai tehát:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{b} = \bar{\varrho}(\boldsymbol{q}), \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{b} = \bar{\omega}(\boldsymbol{q}), \qquad b_n(\bar{\varrho}) = \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \mathrm{rot}_n\,\boldsymbol{w}\,.$$

3'. Végül a ψ potenciált a V-ben, illetve az F-en a

$$\triangle\psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = f(\bar{\varrho}) - b_n(\bar{\varrho}) \tag{50}$$

egyenletek jellemzik, s e NEUMANN-feladat megoldása

$$\psi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{(F)} H(\boldsymbol{p};\bar{\varrho})\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\bar{\varrho}} dF. \tag{51}$$

Megjegyzendő, hogy — a (44) követelménynek megfelelően —

$$\oint\!\!\oint_{(F)} \frac{\partial \psi}{\partial n} dF = \oint\!\!\oint_{(F)} f(\bar{\varrho})\, dF - \oint\!\!\oint_{(F)} b_n(\bar{\varrho})\, dF = \iiint_{(V)} \varrho(\boldsymbol{q})\, dV - \oint\!\!\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dF -$$

$$- \oint\!\!\oint_{(F)} \operatorname{rot}_n \boldsymbol{w}\, dF = \iiint_{(V)} \Delta\varphi\, dV - \oint\!\!\oint_{(F)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dF - \oint\!\!\oint_{(F)} \operatorname{rot}_n \boldsymbol{w}\, dF = 0. \quad (52)$$

A $\psi(\boldsymbol{p})$ skalártér sajátságai tehát:

$$\operatorname{div} \mathbf{grad}\, \psi = 0, \quad \mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\, \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = f(\bar{\varrho}) - b_n(\bar{\varrho}).$$

4'. Végeredményben tehát a (46) függvény a (45a, b, c) egyenletrendszer megoldását szolgáltatja, mégpedig — az egyértelműségi tétel értelmében — egyetlen megoldását.

Megjegyzendő, hogy a fentiekkel teljesen analóg formulák vezethetők le síkbeli vektorterekre.

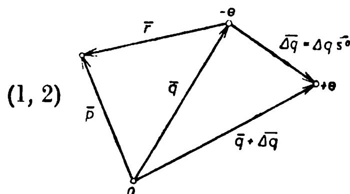
β) Felületi divergencia, gradiens és rotáció

1°. Forráspont. Dipóluspont. 1'. Ezideig főleg *folytonos* skalár- és vektortereket vizsgáltunk. Most tanulmányozzunk néhány olyan teret, amely valamely pontban, görbén, vagy felületen *szakadást* szenved.

2'. Legyen *a* $\boldsymbol{q}$ *pontban „e" bőségű (intenzitású) forráspont* (és más forrás vagy örvény ne legyen a térben). E vektortér potenciális és a $\boldsymbol{p}$ helyzetvektor függvényében*

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{e}{4\pi r},$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}) = \mathbf{grad}\, \varphi = \frac{e\,\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} = \frac{e\,\boldsymbol{r}^0}{4\pi r^2} \quad (1, 2)$$



82. ábra

módon írható le, ahol

$$r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}| =$$

$$= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \quad (3)$$

3'. Legyen most a $\boldsymbol{q}$ pontban $-e$ bőségű forráspont (azaz e bőségű nyelőpont), a $\boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \Delta q\, \boldsymbol{s}^0$ pontban pedig $+e$ bőségű forráspont, feltéve, hogy $\Delta\boldsymbol{q} \to 0$ és $e \to \infty$, de $e\,\Delta\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{m} = m\,\boldsymbol{s}_1^0$, $m < \infty$ (82. ábra). E határalakzat *a* $\boldsymbol{q}$ *pontbeli,* $\boldsymbol{m}$ *nyomatékvektorú dipóluspont.*

A (magányos) dipóluspont potenciálja — származtatásának megfelelően —

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = \lim_{\overline{\Delta q} \to 0} \left(-\frac{e}{4\pi|\boldsymbol{r} - \Delta\boldsymbol{q}|} + \frac{2}{4\pi|\boldsymbol{r}|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\overline{\Delta q} \to 0} e \cdot \Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \lim_{\overline{\Delta q} \to 0} e \cdot \left(\Delta\boldsymbol{q}\, \mathbf{grad}_{\bar{q}} \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} + \bar{\varepsilon}\, \Delta\boldsymbol{q} \right) = -\frac{1}{4\pi} \left(\boldsymbol{m}\, \mathbf{grad}_{\bar{q}} \frac{1}{r} \right) = -\frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial s_1} {}_{q} \frac{1}{r},$$

* Az alábbiakban $\bar{p}$ a vizsgált pontot, $\bar{q}$ illetve $\bar{\varrho}$ a forrás-(nyelő-), dipólus-, örvénypont, illetve -felület pontjait jelenti; $\bar{r} = \bar{p} - \bar{q}$.

a gradiens definíciójának felhasználásával; vagy

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = + \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{m}\ \mathbf{grad}_{\bar{p}} \frac{1}{r}\right) = \frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial s_1} \bar{p}\ \frac{1}{r}, \tag{4b}$$

figyelembe véve, hogy

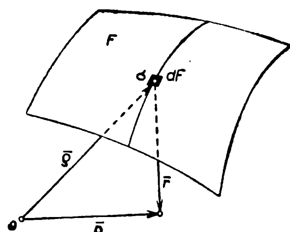
$$\mathbf{grad}_{\bar{q}} \frac{1}{r} = - \mathbf{grad}_{\bar{p}} \frac{1}{r} \left(= \frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2}\right); \tag{5}$$

végül $\boldsymbol{r}^0 \boldsymbol{s}_1^0 = \cos\alpha$ jelöléssel

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = - \frac{1}{4\pi} \frac{m \cos\alpha}{r^2}. \tag{6}$$

Megjegyzendő, hogy a mágnesrúd — hosszához képest nagy távolságból — dipólusnak tekinthető.

II°. Forrásréteg. Dipólusréteg. 1′. Legyen *az F felületen* $\sigma(\bar{\varrho})$ *sűrűséggel eloszló forrásréteg.* Ekkor a $\bar{\varrho}$ felületi pontot környező dF felületelemen $de = \sigma(\bar{\varrho})\, dF$ bőségű forrás található (83. ábra). Az egész F felületi forráseloszlás okozta vektortér tehát $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}) = \mathbf{grad}\, \varphi$ módon, potenciálja pedig



83. ábra

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{p}) = - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(F)} \frac{\sigma(\bar{\varrho})\, dF}{r}} \tag{7}$$

módon írható le, mert a *de* elemi forrásoknak megfelelő potenciálok nyilván összegeződnek. A (7) függvényt neveztük az α)-ban *egyszerű réteg* potenciáljának.

Ilyen forrásrétegnek tekinthető pl. az elektromos töltéseloszlás a vezető felületén.

2′. Mint tudjuk, a div $\boldsymbol{v}$ a térben eloszló források fajlagos (térfogategységre vonatkoztatott) bőségét szolgáltatja.* Jelen esetben e szerepet a σ sűrűség veszi át, mint a felületen eloszló források fajlagos (területegységre vonatkoztatott) bősége. Ezért a σ sűrűséget a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ vektortér *felületi divergenciá*jának nevezik, és

$$\sigma = \mathrm{Div}\, \boldsymbol{v} \tag{8a}$$

módon jelölik.

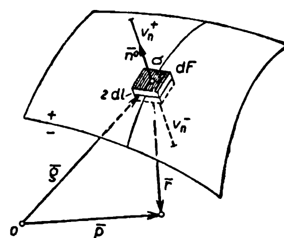
A Div $\boldsymbol{v}$-nek $\boldsymbol{v}$ segítségével való kifejezése céljából alkalmazzuk a ($\boldsymbol{v}$ vektor F zárt felületi fluxusának és a körülvett V térben eloszló források összbőségének egyenlőséget kifejező) GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-tételt azon elemi hasábra, amely a $\bar{\varrho}$ pontot környező dF felületelemnek az $\boldsymbol{n}$ normális mentén $\pm\, dl\, (\ll \sqrt{dF})$ mértékű párhuzamos eltolásával képezhető (84. ábra). A benne levő források bősége nyilván $\sigma\, dF$, a fluxus az ($\boldsymbol{n}$ irányba eső) pozitív fedőlapon $\boldsymbol{n}^0 \boldsymbol{v}^+ = v_n^+$, a negatív alaplapon $-\boldsymbol{n}^0 \boldsymbol{v}^- = -v_n^-$, az oldallapokon pedig elhanyagolható. Az említett tétel értelmében tehát

$$\sigma\, dF = (v_n^+ - v_n^-)\, dF,$$

* Pontosabban l. a 3. §. b) α) II° helyen!

következésképpen — a (8a) figyelembevételével —

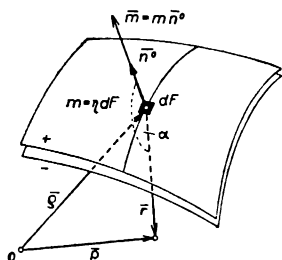
$$\boxed{\operatorname{Div} \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^{+} - \boldsymbol{v}^{-})\, \boldsymbol{n}^{0}\,.} \qquad (8b)$$



Eszerint *a felületi divergencia a* $\boldsymbol{v}$ *vektor kétoldali normális vetületének különbségével egyenlő.* Ha tehát valamely felületen a $\boldsymbol{v}$ vektor normális komponense szakadást szenved, akkor ez a felületen eloszló források miatt van.

3'. Tekintsük most *az F felületen* $\eta(\bar{\varrho})$ *sűrűséggel eloszló és rá merőleges* $\boldsymbol{m} = m\,\boldsymbol{n}^0$ *nyomatékvektorú dipólusréteget.* A dF felületelemen levő dipólus nyomatéka nyilván $m = \eta(\bar{\varrho})\, dF$, a $\boldsymbol{p}$ pontban létesített potenciálja — a (4a) értelmében —

$$d\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\eta(\bar{\varrho})\, dF \cdot \boldsymbol{n}^0 \operatorname{grad}_{\bar{q}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi}\eta(\bar{\varrho})\, dF \cdot \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,,$$



(85. ábra). Ilyen elemek összegeként az egész F felületen eloszló dipólusréteg $\boldsymbol{p}$-beli potenciálja:

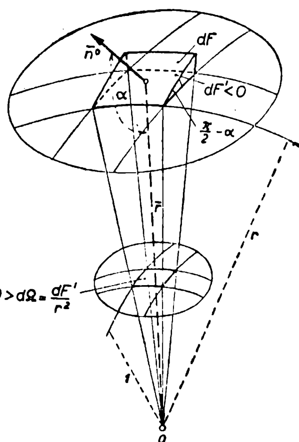
$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(F)} \eta(\bar{\varrho})\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\, dF\,.} \qquad (9)$$

E függvényt neveztük az α)-ban *kettős réteg* po tenciáljának 4'. A (6) felhasználásával potenciálunk

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(F)} \frac{\eta(\bar{\varrho})\cos\alpha(\bar{\varrho})}{r^2}\, dF \qquad (10)$$

alakot ölt. Ennek egyszerű geometriai értelmezés adható. A felületi pontot környező dF felületelem határgörbéje és a $\boldsymbol{p}$ pont által meghatározott kúpfelület ugyanis egy $d\Omega$ *térszöget* zár be, amely éppen a dF látószöge a $\boldsymbol{p}$-ből nézve. E térszög mérőszáma az $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{p} - \bar{\varrho}|$ sugarú gömbfelületből a kúpfelület által kimetszett $dF' = dF \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = dF \cos\alpha(\bar{\varrho})$ felületelem és r^2 hányadosaként nyerhető (a teljes térszög mérőszáma $4\pi r^2 : r^2 = 4\pi$ lévén), tehát (86. ábra)

$$d\Omega = \frac{dF\cos\alpha(\bar{\varrho})}{r^2}\,.$$



A $d\Omega$ előjele nyilván aszerint + vagy —, hogy a $\boldsymbol{p}$-ből a dF felületelem + (az $\boldsymbol{n}$ normális irányába néző) oldala látszik-e (mikor is $\cos\alpha(\bar{\varrho}) = \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) > 0$), vagy — oldala.

Ezek alapján a (10) formula átírható

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(F)} \eta(\bar{\varrho})\, d\Omega \qquad (11)$$

alakra.

Ha speciálisan $\eta(\varrho) = \eta_0 = \text{const}$, akkor nyilván

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{\eta_0}{4\pi}\iint\limits_{(F)} d\Omega = -\frac{\eta_0}{4\pi}\Omega \quad \text{és} \quad \boldsymbol{v} = -\frac{\eta_0}{4\pi}\,\mathbf{grad}\,\Omega, \tag{12}$$

ahol Ω az F felület látószöge (térszög!) a $\boldsymbol{p}$ pontból nézve.

5'. A (11)-ből következik, hogy *a* $\varphi(\boldsymbol{p})$ *potenciál szakadást szenved*, midőn a $\boldsymbol{p}$ pont *az F felületen* áthalad. Ha ugyanis a $\boldsymbol{p}$ ponttal a $\bar{\varrho}_0$ felületi pontot a felület pozitív oldaláról megközelítjük, és így a $\bar{\varrho}_0$-t környező kicsiny ΔF felület darabot látjuk, akkor ennek látószöge 2π-től, az egész felületé pedig a

$$-\frac{1}{2}\eta(\bar{\varrho}_0) - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(F-\Delta F)} \eta(\bar{\varrho})\, d\Omega$$

értéktől csak kissé különbözik. A $\boldsymbol{p} \to \bar{\varrho}_0^+$ határátmenetnél végül $\Delta F \to 0$ és így

$$\varphi_+(\bar{\varrho}_0) = -\frac{1}{2}\eta(\bar{\varrho}_0) - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(F)} \eta(\bar{\varrho})\, d\Omega. \tag{13a}$$

A negatív oldalról történő $\boldsymbol{p} \to \bar{\varrho}_0^-$ határátmenetnél azt kapjuk, hogy

$$\varphi_-(\bar{\varrho}_0) = +\frac{1}{2}\eta(\bar{\varrho}_0) - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(F)} \eta(\bar{\varrho})\, d\Omega. \tag{13b}$$

Végeredményben bármely felületi ponton a potenciál ugrása

$$\varphi_+ - \varphi_- = -\eta. \tag{14}$$

Megjegyzendő, hogy e potenciálkülönbség $\boldsymbol{n}^0$-szorosát *felületi gradiens*nek nevezzük és

$$\boxed{\mathbf{Grad}\,\varphi = (\varphi_+ - \varphi_-)\,\boldsymbol{n}^0} \tag{15}$$

módon jelöljük. Ez a legnagyobb változás (most nem relatív, hanem abszolút) nagyságát és irányát (normális) szolgáltatja, a közönséges gradiens mintájára.

III°. Ö r v é n y f o n a l. Ö r v é n y r é t e g. 1'. Legyen most a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ vektortér forrásmentes, viszont

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \bar{\omega}(\boldsymbol{p}). \tag{16}$$

Ekkor — mint tudjuk —

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}, \quad \text{ahol} \quad \boldsymbol{w} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V)} \frac{\bar{\omega}(\boldsymbol{q})\, dV}{r}. \tag{17}$$

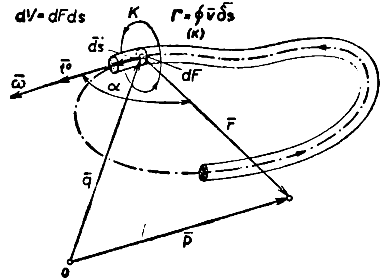
Vizsgáljuk azon esetet, midőn *csak egy G zárt örvényfonal mentén* $\bar{\omega} \neq 0$. Az örvényfonal intenzitása legyen Γ, érintőleges ívelemvektora a $\boldsymbol{q}$ pontban $\boldsymbol{ds} = ds\, \boldsymbol{t}^0$, ugyanott az örvényvektor $\bar{\omega} = \omega\, \boldsymbol{t}^0$, végül ugyanott az örvénycső keresztmetszete dF, térfogateleme $dV = dF\, ds$ (87. ábra). Ezek felhasználásával írható, hogy

$$\Gamma = \omega\, dF = \text{const}, \quad \bar{\omega}\, dV = \omega\, \boldsymbol{t}^0 \cdot dF\, ds = \Gamma\, \boldsymbol{ds},$$

továbbá — ezek figyelembevételével, a (17) alapján —

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi} \mathbf{rot}_{\bar{p}} \oint_{(G)} \frac{\Gamma\, \boldsymbol{ds}}{r} = \frac{\Gamma}{4\pi} \mathbf{rot}_{\bar{p}} \oint_{(G)} \frac{\boldsymbol{ds}}{r} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{(G)} \mathbf{rot}_{\bar{p}} \frac{\boldsymbol{ds}}{r} =$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{(G)} \mathbf{grad}_{\bar{p}} \frac{1}{r} \times \boldsymbol{ds} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{(G)} \left(-\frac{\boldsymbol{r}^0}{r^2} \times \boldsymbol{ds} \right)$$



87. ábra

ahol alkalmazást nyert a

$$\mathbf{rot}\,(\psi\, \boldsymbol{a}) = \psi\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{a} + \mathbf{grad}\, \psi \times \boldsymbol{a}$$

$$\left[\psi = \frac{1}{r}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{ds} \neq f(\boldsymbol{p}) \right]$$

formula. Végeredményben az örvényfonal létesítette vektorteret a

$$\boxed{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{(G)} \frac{\boldsymbol{ds} \times \boldsymbol{r}^0}{r^2}} \tag{18a}$$

formula határozza meg. Ebből következik, hogy

$$|\boldsymbol{dv}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \left| \frac{\boldsymbol{ds} \times \boldsymbol{r}^0}{r^2} \right| = \frac{\Gamma\, ds \sin \alpha}{4\pi\, r^2}. \tag{18b}$$

2'. (18a, b) nevezetes alkalmazása az az elektromágnesség területén *a* BIOT—SAVART-*törvény,* ahol a G vezető, a $\Gamma/4\pi$ áramerősség, a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ pedig a $\boldsymbol{p}$ pontbeli pozitív mágneses egységre ható erő vektora (jobbrendszerben). Ily módon az elektromos áram a mágneses tér örvényfonalának tekinthető.

3'. Érdekes megmutatni, hogy *a G határgörbéjű tetszőleges F felületen egyenletes Γ sűrűséggel eloszló dipólusréteg* — az F-en kívül — *ugyanolyan vektorteret létesít, mint a G menti Γ intenzitású örvényfonal.*

E megállapításnak az elektromágnességben AMPÈRE *tétele* felel meg, amely szerint a G vezetőben folyó I erősségű áram, valamint az F felületen egyenletes I sűrűséggel eloszló mágneses dipólusréteg azonos mágneses teret létesít.

Az egyenletesen eloszló dipólusréteg vektorterét leíró ismert

$$v(p) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\,\mathrm{grad}_{\bar p}\,\Omega \tag{19}$$

formulát kell igazolásul a (18a)-ra visszavezetni. E célból rögzített G mellett a $\boldsymbol{p}$ pont elenyésző $\boldsymbol{dp}$ eltolásának (vagy rögzített $\boldsymbol{p}$ mellett a G görbe $\boldsymbol{dq} = -\boldsymbol{dp}$ eltolásának) megfelelő $d\Omega$ térszög-növekményt állítsuk elő. A G és a ($-\boldsymbol{dp}$ eltolással nyert) G' görbe közti henger felületeleme, ennek az $\boldsymbol{r}$-re merőleges vetülete és végül látószöge $\boldsymbol{p}$-ből rendre (88. ábra)

88. ábra

$$-\boldsymbol{dp}\times\boldsymbol{ds} = \boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{dp},\quad (\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{dp})\boldsymbol{r}^0,\quad \frac{(\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{dp})\boldsymbol{r}^0}{r^2},$$

az egész hengerfelület látószöge pedig

$$d\Omega = \oint\limits_{(G)} \frac{(\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{dp})\boldsymbol{r}^0}{r^2} = \oint\limits_{(G)} \frac{\boldsymbol{dp}(\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{ds})}{r^2} = \boldsymbol{dp}\cdot\oint \frac{\boldsymbol{r}^0\times\boldsymbol{ds}}{r^2} = \boldsymbol{dp}\cdot\mathbf{grad}\,\Omega.$$

A keresett vektortér tehát — a (19) értelmében —

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\,\mathbf{grad}\,\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint \frac{\boldsymbol{ds}\times\boldsymbol{r}^0}{r^2},\quad \text{q. e. d.} \tag{20}$$

Megjegyzendő, hogy magán az F felületen az $\Omega(\boldsymbol{p})$ függvény dipólusréteg esetén *szakadásos,* viszont örvényfonal esetén nem (mert ekkor az F-nek nincs szerepe). Figyelemre méltó továbbá, hogy $\Omega(\boldsymbol{p})$ örvényfonal esetén *többértékű,* jobbrendszerben — 4π ciklikus állandóval; ui. a G görbe $\boldsymbol{ds}$ ívelemét körülzáró és $\boldsymbol{ds}$-hez képest a jobbcsavar-szabály szerint irányított K görbét egyszer körüljárva (89. ábra), az Ω látószög — a

$$\boldsymbol{\Gamma} = \oint\limits_{(K)} \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{dl} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{(K)} \mathbf{grad}\,\Omega\,\boldsymbol{dl} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\oint\limits_{(K)} d\Omega = -\frac{\Gamma}{4\pi}\cdot\Delta_K\Omega$$

eredmény értelmében —

$$\Delta_K\Omega = -4\pi \tag{21}$$

növekményt szenved.

89. ábra

4'. Vizsgáljuk végül az (örvényvonalakból képzett) *F felületen $\bar\omega$ sűrűséggel eloszló* *ö r v é n y r é t e g*-et. Készítsünk a $\boldsymbol{q}$ felületi ponton át normálmetszetet; (ebből az örvényvonalak — a jobbrendszer szerint — felénk tekintenek). Vegyünk fel a normálsíkban, a $\boldsymbol{q}$ pont körül egy tangenciálisan dl, normálisan dh oldalú elemi derékszögű négyszöget, majd ennek az örvényvonalak mentén történő $\pm\, ds/2$ eltolásával képezzünk a $\boldsymbol{q}$ körül egy dV elemi derékszögű hasábot: legyen $dh \ll dl,\ ds$ (90. ábra). Végül alkalmazzuk ez utóbbira az ismert

$$\iiint\limits_{(dV)} \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\,dV = \oint\!\!\!\!\!\!\bigcirc\limits_{(dF)} \boldsymbol{df}\times\boldsymbol{v} \tag{22}$$

formulát. Ekkor $df_a = df_f = dl\,ds$, $dV = dl\,ds\,dh$; a hasáb (tangenciális) alap- és fedőlapjára vonatkozó integrál

$$dl\,ds\,(\boldsymbol{n}^0 \times \boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{n}^0 \times \boldsymbol{v}^-),$$

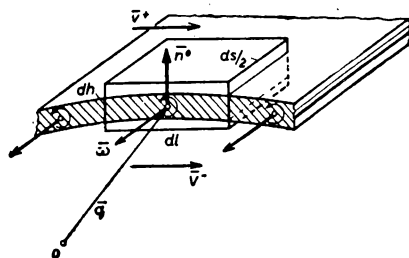
a (normális) oldallapjaira vonatkozó integrál pedig elhanyagolható; a (22) bal oldala

$$\bar{\omega}\,dl\,ds = \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{v}\,dl\,ds.$$

Végeredményben írhatjuk, hogy

$$\bar{\omega} = \mathbf{Rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}^0 \times (\boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-). \tag{23}$$

Eszerint *az örvényréteg felületi sűrűsége, az ún.* *f e l ü l e t i r o t á c i ó abszolút értékben a* $\boldsymbol{v}$ *tangenciális vetületének ugrásával egyenlő.*



90. ábra

IV°. M u l t i p ó l u s - p o n t. G ö m b f ü g g v é n y e k. 1′. Legyen a $\boldsymbol{q}$ pontban $-\boldsymbol{m}$, a $\boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \Delta q\,\boldsymbol{s}_1^0$ pontban pedig $+\boldsymbol{m}$ nyomatékú dipóluspont, feltéve, hogy $\Delta q \to 0$ esetén $m \to \infty$, de $\Delta q m \to k < \infty$. E határalakzat *a* $\boldsymbol{q}$ *pontbeli, k intenzitású k v a d r i p ó l u s - p o n t.* Az I° 3′-belihez hasonló megfontolásokkal kapjuk, hogy potenciáltere

$$\varphi(\boldsymbol{p}) = -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial}{\partial s_2}\bar{q}\frac{\partial}{\partial s_1}\bar{q}\frac{1}{r} = -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial}{\partial s_2}\bar{p}\frac{\partial}{\partial s_1}\bar{p}\frac{1}{r}. \tag{24}$$

Ezen az úton továbbhaladva nyerjük *a* $2k$*-adrendű m u l t i p ó l u s - p o n* tot; potenciálja

$$\varphi_{2k}(\boldsymbol{p}) = (-1)^{k-1}\frac{m_{2k}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial s_k}\bar{p}\cdots\frac{\partial}{\partial s_2}\bar{p}\frac{\partial}{\partial s_1}\bar{p}\frac{1}{r}. \tag{25}$$

A $\psi = 1/r$ függvénnyel együtt a multipólus-pont potenciálja is harmonikus, azaz

$$\Delta_{\bar{p}}\,\varphi_{2k} = c\,\Delta\left(\frac{\partial}{\partial s_k}\bar{p}\cdots\frac{\partial}{\partial s_1}\bar{p}\frac{1}{r}\right) = c\frac{\partial}{\partial s_k}\bar{p}\cdots\frac{\partial}{\partial s_1}\bar{p}\left(\Delta_{\bar{p}}\frac{1}{r}\right) = 0. \tag{26}$$

Megjegyzendő, hogy bevezetve a ($\boldsymbol{q}$ pontból mérendő) r, ϑ, ψ gömbkoordinátákat, a $2k$-adrendű multipólus-pont potenciálja az

$$Y_k(\vartheta, \psi) = r^{k+1}\frac{\partial}{\partial s_k}\cdots\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r} \tag{27}$$

alakú *gömbfüggvény* segítségével is kifejezhető.

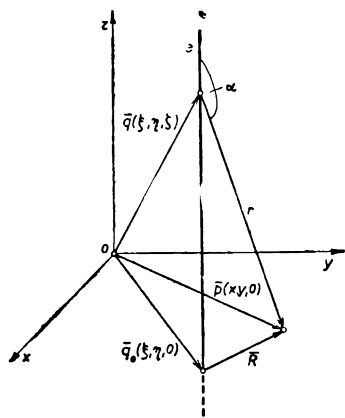
V°. K é t d i m e n z i ó s v e k t o r t e r e k. 1′. Tegyük fel, hogy minden $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p})$ vektor párhuzamos az x, y síkkal, és független a z koordinátától (planparalel vektortér). Az előzőkben megismert fogalmak ekkor is érvényben maradnak, de formuláik bizonyos változást szenvednek. Erre nézve egy-két példát mutatunk be.

2′. Legyen adva a $\boldsymbol{q}_0(\xi, \eta, 0)$ ponton átmenő, a z tengellyel párhuzamos, mindkét irányban végtelenbe nyúló, e fajlagos (hosszegységre vonatkoztatott) bőségű *forrás-*

vonal (91. ábra). A $\boldsymbol{p}(x, y, 0)$, $\boldsymbol{q}(\xi, \eta, \zeta)$, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \zeta \boldsymbol{k}$ jelölések alkalmazásával a forrásvonal vektortere — az I° 2′ (2) formulának megfelelően —

$$\boldsymbol{v} = \frac{e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{r}\, d\zeta}{r^3} = \frac{e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{R} - \zeta \boldsymbol{k})\, d\zeta}{\sqrt{(R^2+\zeta^2)^3}} = \frac{e\boldsymbol{R}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{(R^2+\zeta^2)^3}} =$$

$$= \frac{e\boldsymbol{R}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{\zeta}{R^2\sqrt{R^2+\zeta^2}}\right) = \frac{e\boldsymbol{R}}{4\pi R^2}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{R^2+\zeta^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{e\boldsymbol{R}}{2\pi R^2} = \frac{e\boldsymbol{R}^0}{2\pi R} \qquad (28a)$$



91. ábra

módon alakul. E vektortér potenciálos, mégpedig

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\ \varphi, \quad \text{ahol} \quad \varphi = -\frac{e}{2\pi}\ln\frac{1}{R} = \frac{e}{2\pi}\ln R. \qquad (28b)$$

Az x, y síkban ugyanilyen vektormezőt létesít a $\boldsymbol{q}_0$ pontbeli e bőségű (és csak az x, y síkba ömlő, tehát) *síkbeli forráspont.* Ui. a $\boldsymbol{q}_0$-on kívül e vektormező forrásmentes, mert

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{e}{2\pi}\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{R}}{R^2} = \triangle\varphi = \frac{e}{2\pi}\triangle \ln R =$$

$$= \frac{e}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln\sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} = 0, \qquad (29a)$$

továbbá fluxusa a $|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}_0| = R$ körön éppen e-vel egyenlő, lévén

$$|\boldsymbol{v}|\cdot 2R\pi = \frac{e}{2\pi R}\cdot 2R\pi = e. \qquad (29b)$$

A síkbeli forráspont (28b) vektortere közvetlenül is nyerhető, de itt szándékosan a térbeli forrásvonalból kiindulva vezettük le.

Az I° 3′-belihez hasonló módon igazolható, hogy a *síkbeli dipólus* potenciáltere

$$\varphi = -\frac{m}{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{1}{R} = -\frac{m\cos\alpha}{2\pi r}. \qquad (30)$$

3′. Vizsgáljuk végül a $\boldsymbol{q}_0$ ponton átmenő, a z tengellyel párhuzamos, mindkét irányban végtelenbe nyúló, Γ intenzitású *örvényvonal*at. Vektortere — a III° 1′ (18a) formulának megfelelően —

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{k}\, d\zeta \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi}\boldsymbol{k} \times \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{r}\, d\zeta}{r^3} = \frac{\Gamma}{2\pi}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{R})\int_{0}^{\infty}\frac{d\zeta}{\sqrt{(R^2+\zeta^2)^3}} =$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi R^2}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{R}) = \frac{\Gamma}{2\pi R}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{R}^0). \qquad (31a)$$

E vektortér is potenciálos, mégpedig

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi, \quad \text{ahol} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - \eta_0}{x - \xi_0}. \tag{31b}$$

Az x, y síkban ugyanilyen vektormezőt létesít a $\boldsymbol{q}_0$ pontbeli, Γ intenzitású (és $\boldsymbol{k}$ forgástengelyű) *síkbeli örvénypont*. Ui. a $\boldsymbol{q}_0$ ponton kívül e vektormező forrásmentes, mert — a (29a) felhasználásával —

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{R}}{R^2} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\nabla \times \left(\boldsymbol{k} \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right)\right] = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\left(\nabla \frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right)\boldsymbol{k} - (\nabla \boldsymbol{k})\frac{\boldsymbol{R}}{R^2}\right] = 0, \tag{32a}$$

továbbá cirkulációja a $|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}_0| = R$ körön éppen Γ-val egyenlő, lévén

$$|\boldsymbol{v}| \cdot 2R\pi = \frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot 2R\pi = \Gamma. \tag{32b}$$

A síkbeli örvénypont (31b) vektortere közvetlenül is nyerhető, de itt szándékosan a térbeli örvényvonalból kiindulva vezettük le.

γ) Időben változó terek folytonos közegben

I°. Általános megjegyzések. 1'. E pontban az időtől függő skalár- és vektortereket kívánjuk vizsgálni. A teret hordozó folytonos közeg (pl. folyadék, gáz) legyen mozgásban, amelyet térben és időben a $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}, t)$ sebességvektortér jellemez.

Az a) γ) IV°-ban már érintettük e kérdést; nevezetesen megállapítottuk, hogy a mozgó folytonos közeg hordozta skalár- és vektortér *teljes derivált*ja

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\boldsymbol{w}\nabla)u, \qquad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{w}\nabla)\boldsymbol{v}. \tag{1, 2}$$

E teljes deriváltak kiszámításánál az u és a $\boldsymbol{v}$ különböző időpontbeli értékeit a mozgó közeg ugyanazon részecskéjére vonatkozólag vettük figyelembe. Az (1, 2) szerint e teljes deriváltak a *helyi* (lokális) és a *mozgási* (konvektív) *derivált*ak összegével egyenlők.

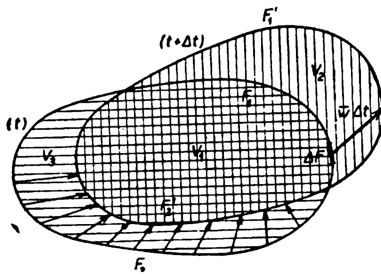
2'. Az alábbiakban *skalár- és vektortér változó* térben, felületen és görbe mentén vett integráljának teljes deriváltját* fogjuk tanulmányozni. Az (időben) változónak nevezett integrálási alakzatok a folytonos közeg mozgásának egész ideje alatt *a közeg ugyanazon részecskéi*ből állnak. E változó alakzatok az idő folyamán általában deformálódnak, mert részecskéik rendszerint különböző $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}, t)$ sebességgel mozognak. Ezért a szóban forgó teljes deriváltak számításánál az integrálandók változása mellett az integrálási alakzatok változása is figyelembe veendő.

II°. Változó térbeli integrál teljes deriváltja. 1'. Kiszámítandó az időben változó, tetszőleges $V(t)$ térben vett

$$I_3(t) = \iiint\limits_{(V(t))} u(\boldsymbol{r}, t)\, dV \tag{3}$$

* A szovjet irodalomban a *folyékony* (жидкий) jelző használatos a *változó* helyett; l. pl. *Kočin* M. 8.].

integrál idő szerinti teljes deriváltja. E célból vizsgáljuk először az idő Δt növekményének megfelelő ΔI_3 növekményt. A t időpontban az F felület határolta V teret elfoglaló részecskék a $t + \Delta t$ időpontban már az F' határolta V'-t töltik meg. Jelöljük V_1-gyel a V és a V' közös részét, V_2-vel az F_1 és az F_1' közé eső térrészt (amelyet a Δt idő alatt az F-en kilépő részecskék képeznek), végül V_3-mal az F_2 és az F_2' közé eső térrészt (amelyet a Δt idő alatt az F-en belépő részecskék alkotnak); nyilvánvalóan $V = V_1 + V_3$, $V' = V_1 + V_2$, továbbá $F = F_1 + F_2$, $F' = F_1' + F_2'$ (92. ábra). Ezek felhasználásával írható, hogy



92. ábra

$$\Delta I_3 = I_3(t + \Delta t) - I_3(t) =$$

$$= \iiint_{(V_1+V_2)} u(\mathbf{r}, t + \Delta t)\, dV - \iiint_{(V_1+V_3)} u(\mathbf{r}, t)\, dV =$$

$$= \iiint_{(V_1)} [u(\mathbf{r}, t + \Delta t) - u(\mathbf{r}, t)]\, dV +$$

$$+ \iiint_{(V_2)} u(\mathbf{r}, t + \Delta t)\, dV - \iiint_{(V_3)} u(\mathbf{r}, t)\, dV.$$

Figyelembe véve, hogy

$$u(\mathbf{r}, t + \Delta t) - u(\mathbf{r}, t) \approx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\mathbf{r},t} \Delta t, \quad dV_2 = w_n\, dF_1\, \Delta t, \quad dV_3 = -\, w_n\, dF_2\, \Delta t,$$

a különbségi hányados határértéke

$$\frac{dI_3}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I_3}{\Delta t} \iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial t}\, dV + \iint_{(F_1)} u\, w_n\, dF + \iint_{(F_2)} u\, w_n\, dF$$

alakot ölt, mert $\Delta t \to 0$-nál $V_1 \to V$. Végeredményben *az I_3 integrál teljes deriváltja* így alakul:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{(V)} u\, dV = \iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial t}\, dV + \oint\!\!\oint_{(F)} u\, w_n\, dF. \tag{4a}$$

Eszerint az I_3 integrál változási sebessége *két részből* áll: az első az u-nak a rögzített V térben végbemenő változásával kapcsolatos, a második pedig a V térnek az időben állandó u mellett bekövetkező változásával.

2'. A (4a) eredmény — az

$$\oint\!\!\oint_{(F)} u\, w_n\, dF = \iiint_{(V)} \operatorname{div}(u\, \mathbf{w})\, dV,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\, \mathbf{w}) = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{w}\, \mathbf{grad}\, u + u \operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{du}{dt} + u \operatorname{div} \mathbf{w}$$

ismert összefüggések alkalmazásával — *más alakban* is felírható, nevezetesen:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{(V)} u\, dV = \iiint_{(V)} \left(\frac{du}{dt} + u \operatorname{div} \mathbf{w}\right) dV.} \tag{4b}$$

3'. Teljesen analóg formula nyerhető *az*

$$I_3(t) = \iiint_{[V(t)]} v(\boldsymbol{r}, t)\, dV \tag{5}$$

integrál idő szerinti teljes deriváltjára:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_{(V)} v\, dV = \iiint_{(V)} \left(\frac{dv}{dt} + v \operatorname{div} \boldsymbol{w}\right) dV.} \tag{6}$$

III°. Változó felületi integrál teljes deriváltja. 1'. Kiszámítandó a tetszőleges, időben változó nyílt $F(t)$ felületen vett

$$I_2(t) = \iint_{[F(t)]} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} \tag{7}$$

integrál teljes deriváltja. Ez szintén két részből tevődik össze. Első része a vektortérnek a rögzített F felületen végbemenő változásával kapcsolatos:

$$\frac{d_1 I_2}{dt} = \iint_{(F)} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, d\boldsymbol{F}.$$

Második része az F felületnek az időben állandó vektortér mellett bekövetkező változásából adódik. Az F felület $t + dt$ időpontbeli helyzetét F'-vel, F határgörbéjét G-vel, az általa dt idő alatt leírt f henger felületelem-vektorát $d\boldsymbol{f} = d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{w}\, dt$-vel, az F, F' és f határolta V térrész elemét $dV = d\boldsymbol{F}\, \boldsymbol{w}$-vel jelölve, végül a GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ- és a STOKES-tételt alkalmazva — a 93. ábrán feltüntetett irányítások mellett — e másik rész így alakul:

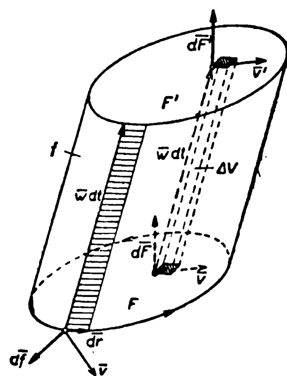
$$\frac{d_2 I_2}{dt} = \frac{1}{dt}\left[\iint_{(F')} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} - \iint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}\right] =$$

$$= \frac{1}{dt}\left[\iiint_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dV - \iint_{(f)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}\right] =$$

$$= \iint_{(F)} \boldsymbol{w} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} - \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, (d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{w}) =$$

$$= \iint_{(F)} \boldsymbol{w} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} + \oint_{(G)} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{r} =$$

$$= \iint_{(F)} [\boldsymbol{w} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \operatorname{\mathbf{rot}} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})]\, d\boldsymbol{F}.$$



93. ábra

Végeredményben *az* I_2 *integrál teljes deriváltja* a következő alakú:

$$\frac{d}{dt}\iint_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \iint_{(F)} \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{w} \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \operatorname{\mathbf{rot}} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})\right] d\boldsymbol{F}. \tag{8a}$$

Formulánk — az ismert

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}\nabla)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}\operatorname{div}\boldsymbol{v}$$

azonosság és a (2) felhasználásával — *más alakban* is felírható, nevezetesen :

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \iint\limits_{(F)} \left[\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{w}\right] d\boldsymbol{F}. \tag{8b}$$

Zárt F felület esetén — a b) β) III° értelmében — a (8a) formula

$$\frac{d}{dt}\oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \oint\!\!\!\oint\limits_{(F)} \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{w}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right] d\boldsymbol{F} \tag{9}$$

elakra egyszerűsödik.

2'. Térjünk rá a most nyert formulák alkalmazására! Először vizsgáljuk meg, hogy *milyen feltétel mellett marad az időben állandó a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ *vektortérnek a változó* $F(t)$ *felületen vett fluxusa.* Ekkor e fluxus idő szerinti teljes deriváltja zérus, tehát a (8b) értelmében

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(F)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \iint\limits_{(F)} \left[\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{w}\right] d\boldsymbol{F} = 0,$$

sőt ennek bármely F felületre vonatkozólag teljesülnie kell. Ebből következik, hogy a vizsgált tartomány minden pontjában fenn kell állnia a következő feltételnek:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0. \tag{10}$$

E feltétel jelentőségének megvilágítása céljából vezessük be most a vektorvonalak megmaradásának a fogalmát. A változó $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ vektortér vektorvonalainak egyenlete a t időpontban nyilván

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = 0, \tag{11}$$

vagy koordinátás alakban

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}.$$

Ezen egyenlet (rendszer) integrálásánál a t idő rögzített értékű paraméternek tekintendő.

Vizsgáljuk most egy másik t' időpontban a vektorvonalakat. Itt *két eset* lehetséges.

Általában egy tetszőleges vektorvonal a t' időpontban a közeg olyan részecskéiből áll, amelyek a t időpontban *különböző* vektorvonalakon helyezkednek el. Speciálisan előfordulhat, hogy a szóban forgó részecskék a t időpontban egy *közös* vektorvonalat képeztek. Ha ez utóbbi eset áll fenn bármely t és t' időpontra és az adott vektortér minden vektorvonalára, akkor azt mondjuk, hogy *a vektorvonalak a megmaradás tulajdonságával rendelkeznek.*

Megmaradó vektorvonalak esetén a vektorcsövek is valamennyien megmaradnak vektorcsöveknek a folytonos közeg mozgása idején, mert ezek — tudvalevőleg —

éppen a vektorvonalakból építhetők fel. Ekkor ugyancsak két esetet lehet megkülönböztetni: az első esetben a vektorcsövek intenzitása változik a mozgás folyamán, a második esetben változatlan marad. Ez utóbbi esetben azt mondjuk, hogy *a vektorcsövek intenzitása a megmaradás tulajdonságával rendelkezik.*

3'. Az elmondottakkal kapcsolatosan igazolhatók a következő ***tételek:*** *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ *vektortér vektorvonalai és vektorcsöveinek intenzitása megmaradjanak, abban áll, hogy az egész vizsgált tartományban és minden vizsgált időpontban teljesüljön a*

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{w} = 0 \tag{12}$$

egyenlőség [ez láthatóan azonos a (10) feltétellel].

Annak szükséges feltétele, hogy a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ *vektortér vektorvonalai megmaradjanak, abban áll, hogy az egész vizsgált tartományban és minden vizsgált időpontban teljesüljön a*

$$\left[\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{w}\right] \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{13}$$

egyenlőség.

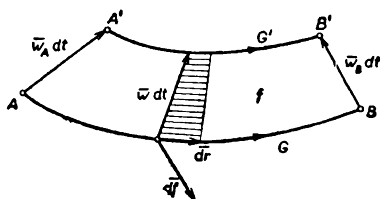
E tételek igazolása tekintetében az irodalomra utalunk.*

IV°. Változó görbe menti integrál teljes deriváltja. 1'. Kiszámítandó az időben változó, tetszőleges nyílt $G(t)$ görbe mentén vett

$$I_1(t) = \int\limits_{[G(t)]} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)\, d\boldsymbol{r} \tag{14}$$

integrál teljes deriváltja. Ez ismét két részből tevődik össze. Első része a vektortérnek a rögzített G görbén bekövetkező változásával kapcsolatos:

$$\frac{d_1 I_1}{dt} = \int\limits_{[G(t)]} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, d\boldsymbol{r}.$$



94. ábra

Második része a G görbének az időben állandó vektortér mellett végbemenő változásából adódik. Jelöljük a G görbe $t + dt$ időponti helyzetét G'-vel, G végpontjait A-val és B-vel, a G'-éit A'-vel és B'-vel, továbbá az $\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{w}_A\, dt$ vektor, az (A'-től B' felé irányított) G' görbe, a $\overrightarrow{B'B} = -\boldsymbol{w}_B\, dt$ vektor és a (B-től A felé irányított) G görbe által képzett (és pozitíve irányított) zárt görbét C-vel, végül a C határolta vonalfelületet f-fel, felületelem-vektorát $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{w}\, dt \times d\boldsymbol{r}$-rel (94. ábra). Ekkor — a STOKES- és a gradiens-tétel alkalmazásával — e második rész így alakul:

$$\frac{d_2 I_1}{dt} = \frac{1}{dt}\left[\int\limits_{(G')} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} - \int\limits_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}\right] = \frac{1}{dt}\iint\limits_{(f)} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}_A \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{v}_B \boldsymbol{w}_B =$$

$$= \int\limits_{(G)} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times d\boldsymbol{r}) - \int\limits_{(G)} \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(G)} [\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w})]\, d\boldsymbol{r}.$$

* L. pl. Кочин (M. 8.) 262—265. o.

Végeredményben *az I_1 integrál teljes deriváltja* a következő alakú:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(G)} \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \operatorname{grad} (\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w})\right] d\boldsymbol{r}. \tag{15a}$$

Formulánk — az ismert

$$\operatorname{grad} (\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}\,\nabla)\,\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$$

azonosság és a (2) felhasználásával — *más alakban* is felírható, nevezetesen:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \int\limits_{(G)} \left[\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{w}\right] d\boldsymbol{r}. \tag{15b}$$

d) Műszaki alkalmazások

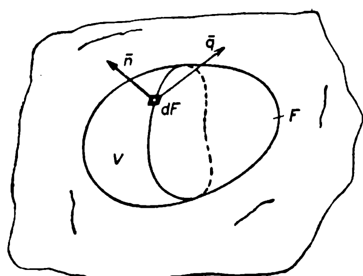
α) A hővezetés és a talajkonszolidáció egyenlete

1°. A hővezetés egyenlete. 1'. Tanulmányozzuk valamely test hőállapotát! Ezt akkor tekinthetjük ismertnek, ha a test bármely pontjában és tetszőleges időpontban meg tudjuk adni a T hőfokot (temperatúrát); más szóval a test hőállapota $T(\boldsymbol{r}, t)$ *skalártér*rel jellemezhető. Ha speciálisan T nem függ t-től, akkor időálló (stacionárius) hőállapotról beszélünk. A test *sűrűségét* jelöljük ϱ-val [ez inhomogén testben a hely $\varrho(\boldsymbol{r})$ függvénye], *hőkapacitását* pedig c-vel [inhomogén testben ez is a hely függvénye, $c(\boldsymbol{r})$].

Jelöljünk ki a test belsejében egy F határfelületű, V térfogatú részt, és vizsgáljuk e testrész hőmennyiségének változását. Ezt kétféle módon kell számba venni.

2'. Egyrészt dt idő alatt a $\varrho\, dV$ tömegelem hőfoka

$$\frac{\partial T}{\partial t}\, dt$$



95. ábra

változást, hőmennyisége — a c hőkapacitás értelmezése szerint —

$$dQ = c\,\varrho\, dV \frac{\partial V}{\partial t}\, dt$$

változást, tehát az egész V térfogatú testrész hőmennyisége

$$Q_1 = \iiint\limits_{(V)} c\,\varrho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV\, dt \tag{1a}$$

változást szenved.

Másrészt — feltéve, hogy a testben a hőátadás ún. *hővezetési folyamat,* bővebben, a hő $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}, t)$ intenzitású áramlás útján megy végbe — az F felületen dt idő alatt ki- és beáramló hőmennyiség különbsége (külső $d\boldsymbol{F} = dF\,\boldsymbol{n}^0$ normális mellett; 95. ábra)

$$Q_2 = \oint\limits_{F} \boldsymbol{q}\, d\boldsymbol{F}\, dt. \tag{1b}$$

Az energia-megmaradás elvének megfelelően a V térben hő nem keletkezik és nem tűnik el, tehát e kétféle változás ellentetten egyenlő, azaz összegük

$$Q_1 + Q_2 = dt \left\{ \iiint\limits_{(V)} c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \oiint\limits_{(F)} \boldsymbol{q}\, d\boldsymbol{F} \right\} = 0. \tag{2a}$$

Egyenletünk — a jól ismert GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-tétel alkalmazásával —

$$\iiint\limits_{(V)} \left(c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} \right) dV = 0 \tag{2b}$$

alakra írható át.

Minthogy ez bármely V térrészre igaz, kell, hogy *az integrálandó azonosan zérus* egyen. Ui. a középérték-tételt a (2b)-re alkalmazva, írhatjuk, hogy

$$\left(c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} \right)_{\bar{r}_k} V = 0, \text{ azaz } \left(c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} \right)_{\bar{r}_k} = 0,$$

ahol $\bar{r}_k$ valamely ún. középérték-hely a V-ben; ha a V-t egy tetszőleges $\boldsymbol{r}$ belső pontjára zsugorítjuk, akkor $\boldsymbol{r}_k \to \boldsymbol{r}$ és a megfelelő határérték — az integrálandó folytonossága miatt —

$$c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = 0, \tag{3}$$

a bal oldalt az $\boldsymbol{r}$ helyen véve.

4'. Lássuk most, hogyan függ a $\boldsymbol{q}$ hőáramlási vektor a T hőfoktól. A testben a hő a melegebb részektől a hidegebbek felé áramlik, mégpedig — izotróp testben — a legnagyobb viszonylagos hőfokesés, vagyis az izoterma felületek normálisa irányában. Eszerint

$$\boldsymbol{q} = -k \operatorname{\mathbf{grad}} T, \tag{4}$$

hol k az ún. hővezetési együttható, mely inhomogén testben a hely $k(\boldsymbol{r})$ függvénye. A (4)-et behelyettesítve a (3)-ba, a hővezetés egyenletét kapjuk,

$$c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} (k \operatorname{\mathbf{grad}} T) = 0 \tag{5}$$

alakban.

5'. Ha a test *homogén,* s így k és $c\varrho$ állandó, akkor — az $a^2 = k/c\varrho$ és $\operatorname{div} \operatorname{\mathbf{grad}} \equiv \Delta$ jelöléssel — ***a hővezetés egyenlete*** a

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)} \tag{6}$$

alakot ölti.

Végül *időálló* (stacionárius) hővezetés esetén $\partial T/\partial t = 0$, tehát ilyenkor a hővezetési egyenlet a

$$\Delta T = 0 \tag{7}$$

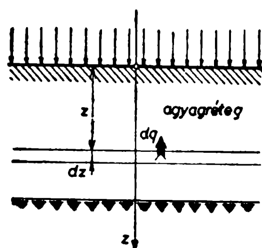
LAPLACE-egyenletbe megy át.

Megjegyzendő, hogy bármilyen hővezetési feladat teljes megoldásához még *kerületi feltételeket*, sőt — nem időálló hővezetés esetén — még *kezdeti feltételt* is kell megadni.

II°. A talajkonszolidáció egyenlete. 1'. A talajkonszolidáció TERZAGHI—GERSZEVANOV-féle elmélete a következő *feltevésekkel* él: *a)* a talaj hézagai teljesen vízzel telítettek; *b)* a víz és a talaj szilárd szemcséi egyaránt összenyomhatatlanok; *c)* a talajvíz mozgását a $v = ki$ alakú DARCY-törvény írja le, ahol v a sebesség, i a hidraulikus esés és k a vízáteresztő-képességi állandó; *d)* a talajsüllyedés időbeli elhúzódása kizárólag a víz lassú kiszorulásának következménye; *e)* az összenyomódó agyagréteg oldalirányban határolt és valamely vízszintes metszetének pontjaiban azonos feszültségi állapotú; *f)* a hézagtényező $\Delta e = e - e_0$ növekményének és tényleges feszültség megfelelő $\Delta p^* = p^* - p_0^*$ növekményének $a = \Delta e/\Delta p^*$ hányadosa a vizsgált szakaszon állandó.

E feltevések a valóságban csak többé-kevésbé teljesülnek, s így a rájuk alapozott elmélet is csak közelítő érvényű.

2'. A talaj bármely pontjában és tetszőleges időpontban a p^* *tényleges feszültség* és az $u = \delta_v h$ *semleges feszültség* összege az állandó $p = p^* + u$ terheléssel egyenlő, s így $\Delta p^* = -\Delta u = -\delta_v \Delta h$, ahol h a hidraulikus nyomómagasság, δ_v a víz fajsúlya. Következésképpen a felfelé (a $-z$ tengely felé) irányuló vízmozgás *hidraulikus esése* (96. ábra):



96. ábra

$$i = -\frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{1}{\delta_v}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\delta_v}\frac{\partial p^*}{\partial z}.$$

A *c)* és *e)* szerint a z, illetve $z + dz$ ordinátájú vízszintes sík felületegységén, az időegységre vonatkoztatva

$$q = 1 \cdot v = ki = -\frac{k}{\delta_v}\frac{\partial z}{\partial u},$$

illetve

$$q + \partial q = -\frac{k}{\delta_v}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz\right)$$

térfogatú víz folyik át; a térfogategységből kinyomuló víz térfogata tehát

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{k}{\delta_v}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{8a}$$

Az *a)*, *b)*, *d)* és *e)* értelmében e víztérfogat egyenlő a térfogategységnyi talajnak az időegységre vonatkoztatott térfogatcsökkenésével, amely a talaj e *hézagtényező*jével — az *f)* értelmében —

$$-\frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{a}{1+e}\frac{\partial p^*}{\partial t} = -\frac{a}{1+e}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{8b}$$

módon fejezhető ki.

3'. Végeredményben, a két szóban forgó kifejezés egyeztetésével és a

$$c = \frac{k(1+e)}{a\,\delta_v}$$

konszolidációs együttható bevezetésével az egydimenziós ***talajkonszolidáció egyenlete*** így alakul:

$$c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}\,. \tag{8c}$$

Minthogy egy dimenzióban $\partial^2 u/\partial z^2 \equiv \triangle u$, ezért a most nyert egyenlet alakra nézve megegyezik a hővezetés (6) egyenletével.

β) A hidrodinamika alapegyenletei

1°. A folytonossági egyenlet. 1'. Vizsgáljuk a gázok, vagy — ahogy másként nevezni szokás — az összenyomható folyadékok mozgását. Jelöljük ϱ-val a folyadék *sűrűség*et és legyen ez a helynek és az időnek $\varrho(\boldsymbol{r}, t)$ függvénye. A folyadék mozgását a *sebességvektor-tér* megadásával jellemezzük, vagyis megadjuk a $\boldsymbol{v}$ sebességvektort mint a helynek és az időnek $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ függvényét. A folyadék bármilyen mozgásánál a $\boldsymbol{v}$ és a ϱ között állandó kapcsolat van, amelyet az alább levezetendő folytonossági egyenlet juttat kifejezésre.

2'. Valamely tetszőleges rögzített F felület határolta, V köbtartalmú térrészben levő folyadék

$$M = \iiint\limits_{(V)} \varrho\, dV$$

tömege dt idő alatt, a sűrűség $\frac{\partial \varrho}{\partial t}\, dt$ változása következtében

$$dM_1 = \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \varrho}{dt}\, dV\, dt \tag{1a}$$

változást, az F felületen ezalatt végbemenő ki- és beáramlás különbségeként pedig (külső $d\boldsymbol{F} = dF\,\boldsymbol{n}^0$ normális mellett)

$$dM_2 = \oint\limits_{(F)} \varrho\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}\, dt \tag{1b}$$

változást szenved. Minthogy — *az anyagmegmaradás elvé*nek megfelelően — a V térben anyag nem keletkezhet, és nem tűnhet el, azért e kétféle változás ellentetten egyenlő, azaz összegük

$$dM_1 + dM_2 = dt\left\{\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, dV + \oint\limits_{(F)} \varrho\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F}\right\} = 0. \tag{2a}$$

Egyenletünk — az

$$\oint\limits_{(F)} \varrho\, \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{F} = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\, (\varrho\, \boldsymbol{v})\, dV$$

alakú GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-tétel alkalmazásával — az

$$\iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho\, \boldsymbol{v}\right] dV = 0 \tag{2b}$$

alakra írható át. Minthogy ez bármely V térrészre igaz, azonosan fenn kell állnia a következő egyenletnek:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{v} = 0. \tag{3a}$$

Ez az ún. ***folytonossági (kontinuitási) egyenlet.*** Felhasználva az a) γ)-ból ismert

$$\operatorname{div} (\varrho \boldsymbol{v}) = \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \operatorname{\mathbf{grad}} \varrho, \quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \operatorname{\mathbf{grad}} \varrho$$

azonosságokat, a (3a) formulát még *más alakban,* nevezetesen

$$\boxed{\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0} \tag{3b}$$

módon is felírhatjuk. Ugyanez koordinátás alakban:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \frac{\partial \varrho}{\partial y} + w \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0. \tag{3c}$$

3'. A folytonossági egyenletet még egyszerűbben nyerhetjük úgy, hogy az (időben változó) V folyadéktér

$$M = \iiint_{(V)} \varrho \, dV$$

tömegének az idő szerinti *teljes derivált*ját — az anyagmegmaradásnak megfelelően — zérussal tesszük egyenlővé, azaz — a c) γ) II° alapján — felírjuk, hogy

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_{(V)} \left(\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v}\right) dV = 0,$$

s ebből következtetjük — a V teljesen tetszőleges voltára hivatkozva — a kívánt

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

egyenletet.

4'. Legyen a folyadék — miként igen jó közelítéssel a valóságban is — *összenyomhatatlan* (inkompresszibilis), de esetleg inhomogén. Ez esetben minden folyadékrészecske sűrűsége változatlan marad, következésképpen — a teljes (individuális) derivált értelmezése szerint —

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0. \tag{4}$$

A (3b) folytonossági egyenlet ekkor

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{5}$$

alakot ölt; más szóval az összenyomhatatlan folyadék sebesség-vektortere *szolenoidális.* A $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ vektortér $d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ egyenletű vektorvonalait áramvonalaknak, a belőlük

felépített csöveket áramcsöveknek nevezzük. Az (5) következtében *egy áramcső bármely keresztmetszetén* a $\boldsymbol{v}$ sebességvektor fluxusa, vagyis *az átömlő folyadéktérfogat* időegységre vonatkoztatott része *állandó.*

5'. Ha az összenyomhatatlan folyadék sebességvektortere *potenciálos,* azaz

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\varphi \tag{6a}$$

s így örvénymentes, azaz

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = 0, \qquad \oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = 0, \tag{6b}$$

akkor az (5) folytonossági egyenlet

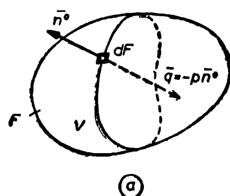
$$\mathrm{div}\ \mathbf{grad}\,\varphi = \triangle\,\varphi = 0 \tag{7}$$

módon alakul; eszerint *az összenyomhatatlan és örvénymentesen áramló folyadék sebességi potenciálja kielégíti a* LAPLACE-*egyenletet,* vagyis φ harmonikus.

II°. A hidrodinamika EULER-féle egyenlete 1'. Vezessük le most az ideális folyadékok hidrodinamikájának EULER-féle alapegyenletét. Mint ismeretes, a hidrodinamikában — a belső erők jellegétől függően — ideális és viszkózus folyadékot különböztetnek meg. A folyadék belsejében egy F határfelületű, V térfogatú részt kijelölve, a V-n kívüli folyadékrészecskék az F mentén erőhatást gyakorolnak a V-n belüliekre. Ezen erőket *belső erőknek* nevezzük, mert ezek a folyadékrészecskék kölcsönhatásaként keletkeznek. (Természetesen ezek magára a V térrészbeli folyadékra nézve külső erők.) Legyen a V térrészre az F felület valamely dF elemén ható ilyen erő $\boldsymbol{q}\, dF$. Ha ezen $\boldsymbol{q}$ vektor az F felületen mindenütt merőleges az ottani dF felületelemre, vagyis az $\boldsymbol{n}^0$ külső felületi normálissal egyenlő irányú (és ellenkező értelmű, a V-be mutatván),

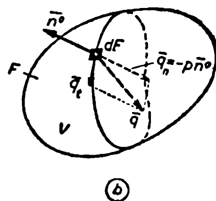
$$\boldsymbol{q} = -p\,\boldsymbol{n}^0, \tag{8}$$

azaz nincs tangenciális (belső súrlódási) komponense, akkor a folyadékot *ideálisnak,* a $p = |\boldsymbol{q}|$-t a folyadék *nyomásának* mondjuk (97*a.* ábra).



ⓐ

Ha viszont a $\boldsymbol{q}$ vektornak a dF felületelemhez képest tangenciális (belső súrlódási) komponense is van, akkor a folyadékot *viszkózusnak* nevezzük; ekkor a nyomás $p = -\boldsymbol{q}\boldsymbol{n}^0 = |\boldsymbol{q}| \cos(\boldsymbol{q}, -\boldsymbol{n}^0)$, és így nyilván függ az $\boldsymbol{n}^0$-tól (97*b.* ábra).



ⓑ

97. ábra

Ideális folyadékban a p nyomás igazolhatóan független a felületelem $\boldsymbol{n}^0$ normálisától, és így csak a hely és az idő függvénye, azaz $p = p(\boldsymbol{r}, t)$.

2'. Az említett alapegyenletet bevezetésénél felhasználjuk *a* D'ALEMBERT-*elvet,* amely szerint a pontrendszerre ható összes külső erők és inerciaerők egyensúlyban vannak, vagyis ezen erőrendszer eredő vektora zérus.

Jelöljük $\boldsymbol{f}$ vektorral a tömegegységre vonatkoztatott külső erőt (pl. a súlyerőt), és alkalmazzuk a D'ALEMBERT-elvet a V térrészbeli folyadék részecskéire. A $\varrho\, dV$ tömegelemre ható külső, illetve inercia-erő nyilván

$$\varrho \boldsymbol{f}\, dV, \quad \text{illetve} \quad -\varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\, dV,$$

ezek eredője pedig az egész V térrészben

$$\iiint_{(V)} \left(\varrho \boldsymbol{f} - \varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) dV. \tag{9a}$$

Külső erőként figyelembe veendő még a V térrész F felületén működő elemi $-p\,d\boldsymbol{F}$ nyomóerők

$$-\oint\!\!\!\oint_{(F)} p\, d\boldsymbol{F} \tag{9b}$$

eredője. Végeredményben — a D'ALEMBERT-elv értelmében —

$$\iiint_{(V)} \left(\varrho \boldsymbol{f} - \varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) dV - \oint\!\!\!\oint_{(F)} p\, d\boldsymbol{F} = 0. \tag{10a}$$

Felhasználva a b) $\beta)$ I°-ben tanult

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} p\, d\boldsymbol{F} = \iiint_{(V)} \mathbf{grad}\, p\, dV$$

integráltételt, a (10a)-t átírhatjuk

$$\iiint_{(V)} \left(\varrho \boldsymbol{f} - \varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \mathbf{grad}\, p\right) dV = 0 \tag{10b}$$

alakra. Minthogy ez bármely V térrészre igaz, azonosan fenn kell állnia a következő egyenletnek:

$$\varrho \boldsymbol{f} - \varrho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \mathbf{grad}\, p = 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\,\mathbf{grad}\, p. \tag{11a}$$

Ezt — az a) $\gamma)$ IV°-ben tanult

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v}$$

összefüggés alapján — még a

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\,\mathbf{grad}\, p} \tag{11b}$$

alakban is felírhatjuk. A (11a, b) *az ideális folyadékok hidrodinamikájának* EULER-***féle alapegyenlete***. Ugyanez koordinátás alakban:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= f_x - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= f_y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= f_z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{11c}$$

III°. A hidrodinamika Bernoulli-féle egyenlete. 1'. Az a) γ) II°-ben megismert

$$(\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\frac{v^2}{2} - \boldsymbol{v}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$$

azonosság felhasználásával a fentebbi Euler-féle alapegyenlet még a

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}\,\frac{v^2}{2} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\,\mathbf{grad}\,p \tag{11d}$$

alakra is átírható.

Tegyünk most még egy-két kiegészítő feltevést! Legyen először is az egységnyi folyadéktömegre vonatkoztatott $\boldsymbol{f}$ külső erő potenciálos, ún. *konzervatív* erő, vagyis

$$\boldsymbol{f} = -\,\mathbf{grad}\,U, \tag{12}$$

ahol U az $\boldsymbol{f}$ erő potenciálja. Pl. ha $\boldsymbol{f}$ súlyerő és a z tengely függőlegesen felfelé mutat, akkor az erő potenciálja

$$U = gz. \tag{13}$$

Legyen továbbá a folyadék ϱ sűrűsége csupán a p nyomás függvénye, azaz

$$\varrho = \varrho(p), \tag{14}$$

amikor is a folyadék ún. *barotrop*. Pl. ilyen az összenyomhatatlan folyadék, izotermikus és adiabatikus állapotváltozású gáz, amelyek állapotegyenlete rendre

$$\varrho = \text{const}, \qquad p = C\varrho, \qquad p = C\,\varrho^{\varkappa}. \tag{15}$$

Vezessük be most a

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)} \tag{16a}$$

függvényt, megjegyezve, hogy

$$\mathbf{grad}\,P = P'(p)\,\mathbf{grad}\,p = \frac{1}{\varrho(p)}\,\mathbf{grad}\,p. \tag{16b}$$

A (12) és a (16b) figyelembevételével a (11c) a

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = -\,\mathbf{grad}\left(U + P + \frac{v^2}{2}\right) \tag{17}$$

alakba, *a konzervatív erőtérben áramló ideális, barotróp folyadék* **egyenletébe** megy át Itt U, P és $v^2/2$ rendre a tömegegységre vonatkoztatott *potenciális, belső és kinetikus energia,* tehát

$$\Pi = U + P + \frac{v^2}{2} \tag{18}$$

a hasonló vonatkozású *össz-energia.*

Vegyünk fel most egy tetszőleges áramvonalat, rajta egy $\boldsymbol{r}_0$ rögzített és egy $\boldsymbol{r}$ futó pontot és integráljuk a közbeeső áramvonal-szakaszon a (17) egyenlet mindkét oldalát. Így nyerjük, hogy

$$\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, d\boldsymbol{r} - \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} (\boldsymbol{v} \times \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{r} = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, d\boldsymbol{r} - \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \mathbf{ro} \quad (d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) =$$

$$= \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, d\boldsymbol{r} = - \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \mathbf{grad}\, \Pi\, d\boldsymbol{r} = - \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} d\Pi = \Pi(\boldsymbol{r}) - \Pi(\boldsymbol{r}_0)\,,$$

mert *áramvonal mentén* $d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 0$; végeredményben:

$$\int_{\bar{r}}^{\bar{r}} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\, d\boldsymbol{r} = \Pi(\boldsymbol{r}) - \Pi(\boldsymbol{r}_0). \tag{19}$$

2'. Speciálisan, *időálló (stacionárius) áramlás* esetén a $\boldsymbol{v}$, ϱ és p nem függ a t időtől, de függhet az $\boldsymbol{r}$ helyzetvektortól. Ekkor nyilvánvalóan

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

és így — a (19) következtében —

$$\Pi\,(\boldsymbol{r}) = \Pi\,(\boldsymbol{r}_0), \tag{21a}$$

azaz

$$\boxed{U + P + \frac{v^2}{2} = \text{const.}} \tag{21b}$$

Ez a híres BERNOULLI-**féle egyenlet**; eszerint *ideális, barotróp folyadék konzervatív erőtér hatása alatti időálló áramlása esetén az egységnyi folyadéktömegre vonatkozó* Π *összenergia bármely áramvonal mentén állandó.*

Pl. összenyomhatatlan folyadéknak a súlyerő hatása alatti áramlása esetén a (21b) egyenlet a

$$gz + \frac{p}{\varrho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} \tag{22}$$

alakot ölti.

3'. Térjünk vissza az ideális, barotróp folyadék konzervatív erőtérbeli áramlásának (17) egyenletére és kiegészítőleg tegyük fel, hogy *az áramlás örvénymentes*, azaz

$$\oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = 0, \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = 0, \quad \text{tehát} \quad \boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, \varphi. \tag{23}$$

Felhasználva a nyilvánvaló

$$\frac{\partial \,\mathbf{grad}\, \varphi}{\partial t} = \mathbf{grad}\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

egyenlőséget, a (17) egyenlet

$$\mathbf{grad}\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\,\mathbf{grad}\, \Pi, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Pi \right) = 0$$

alakra írható át. Ebből következik, hogy a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Pi$$

kifejezés nem függ az $\mathbf{r}$ helyzetvektortól, hanem csak a t időtől függhet, tehát az egész, folyadékkal telt tartományban

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U + P + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}^2\, \varphi = g(t), \tag{24}$$

ahol $g(t)$ a t idő valamilyen függvénye. E formula, az ún. CAUCHY-*féle integrál jellemzi az ideális, barotróp folyadék konzervatív erőtérbeli örvénymentes áramlását.*

Ugyanakkor a (3b) *folytonossági egyenlet*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{grad}\, \varphi \cdot \mathbf{grad}\, \varrho + \varrho \,\triangle \varphi = 0 \tag{25}$$

módon alakul. Minthogy P a ϱ-nak meghatározott függvénye, így a (24) és a (25): két egyenlet két ismeretlen függvénnyel (ti. a ϱ-val és a φ-vel).

Ha a folyadék *összenyomhatatlan,* akkor a (24) formula

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U + \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}^2\, \varphi = g(t) \tag{26a}$$

alakot, a (25) pedig

$$\triangle\, \varphi = 0 \tag{26b}$$

alakot ölt, s e két egyenletből a p, illetve a φ meghatározható.

IV°. Összenyomható folyadék kis rezgései. 1′. Tekintsünk el a külső erőtől, azaz legyen $U = 0$, továbbá hanyagoljuk el a ϱ és a φ deriváltjainak négyzetét, szorzatát ezek első hatványaihoz képest. Ekkor a (24), (25) egyenletrendszer

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \,\triangle \varphi = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P = g(t) \tag{27a, b}$$

alakra egyszerűsödik.

2′. Tegyük fel most, hogy a φ függvény

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \int_{t_0}^{t} g(t)\, dt$$

alakú. Ekkor nyilvánvalóan

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g(t), \quad \triangle \varphi = \triangle \Phi.$$

Ezek figyelembevételével a (27a, b) egyenletrendszer

$$\frac{\partial \ln \varrho}{\partial t} + \triangle \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + P = 0 \tag{28a, b}$$

alakban jelenik meg. Az utóbbi egyenletet t szerint differenciálva, és a

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P'(p) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\varrho(p)} \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial t}$$

összefüggést felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{dp}{d\varrho} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial t} = 0. \tag{29}$$

Minthogy — a feltevés szerint — a gáz csak kis rezgéseket végez, ezért p és ϱ csak kevéssé tér el a nyugalmi állapotnak megfelelő p_0 és ϱ_0 értéktől. Bevezetve tehát a

$$c^2 = \frac{dp}{d\varrho} \approx \frac{p - p_0}{\varrho - \varrho_0} \tag{30}$$

jelölést, továbbá a (29) és a (28a) egyenletet összevetve, végeredményül a

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \triangle \Phi = c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)} \tag{31}$$

egyenletet kapjuk, mely az irodalomban ***hullámegyenlet*** néven ismeretes.

V°. Örvényes áramlás. HELMHOLZ örvénytétele. 1'. Térjünk vissza ismét az ideális, barotróp folyadék konzervatív erőtérbeli áramlásának (17) egyenletére, és kiegészítőleg tegyük fel, hogy — a III° 3' esettel ellentétben — most *az áramlás örvényes*, más szóval a

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \bar{\Omega}(\boldsymbol{r}, t) \tag{32}$$

örvényvektor zérustól különböző.

Vizsgáljuk az $\bar{\Omega}$ örvényvektor időbeli változását! E célból alkalmazzuk a **rot** differenciáloperátort a (17) egyenlet mindét oldalára; így azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{rot} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \mathbf{rot}\, (\boldsymbol{v} \times \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) = - \mathbf{rot\, grad}\, \Pi. \tag{33a}$$

Figyelembe véve az a) γ)-ból ismert

$$\mathbf{rot} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t}, \quad \mathbf{rot\, grad}\, \Pi = 0, \quad \mathrm{div}\, \bar{\Omega} = \mathrm{div}\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\mathbf{rot}\, (\boldsymbol{v} \times \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}) = \mathbf{rot}\, (\boldsymbol{v} \times \bar{\Omega}) = (\bar{\Omega}\, \nabla)\, \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\, \nabla)\, \bar{\Omega} + \boldsymbol{v}\, \mathrm{div}\, \bar{\Omega} - \bar{\Omega}\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}$$

összefüggéseket, a (33a) a

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\bar{\Omega} - (\bar{\Omega}\,\nabla)\,\boldsymbol{v} + \bar{\Omega}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \qquad (33b)$$

alakra, vagy — a teljes és a parciális derivált ismert kapcsolatát felhasználva — a

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} - (\bar{\Omega}\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} + \bar{\Omega}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \qquad (33c)$$

alakra írható át. *Ezen egyenlet meghatározza az $\bar{\Omega}$ örvényvektor időbeli változási sebességét.*

2'. Vizsgáljuk most a $d\boldsymbol{r}\times\bar{\Omega}$ egyenletű örvényvonalakat! Összevetve a (33c) egyenleteket a $d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{w}$ vektorvonalak megmaradásának a c) *γ)* III°-ban megismert

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} - (\boldsymbol{w}\,\nabla)\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$$

feltételével [ahol most $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}, t)$ tetszőleges vektortér, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ pedig a sebességvektortér], rögtön megállapíthatjuk, hogy a (33c) éppen a $d\boldsymbol{r}\times\bar{\Omega}$ örvényvonalak megmaradását, egyszersmind az örvénycsövek intenzitásának időbeli változatlanságát juttatja kifejezésre.

Ezzel igazolást nyert Helmholtz ***örvénytétele:*** *Konzervatív erőtérben áramló ideális, barotróp folyadékban mind az örvényvonalak, mind pedig az örvénycsövek intenzitása megmaradnak.*

3'. Tanulmányozzuk most a sebességvektor cirkulációjának időbeli változását *tetszőleges* folyadékban. E célból a folyadékgörbe menti integrál teljes deriváltjának a c) *γ)* IV°-ben megismert

$$\frac{d}{dt}\int_{(G)} \boldsymbol{w}\,d\boldsymbol{r} = \int_{(G)} \left[\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} + (\boldsymbol{w}\,\nabla)\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\right] d\boldsymbol{r}$$

formulájában [ahol most $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}, t)$ tetszőleges vektortér, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ pedig sebességvektortér] a $\boldsymbol{w}$-t a $\boldsymbol{v}$-vel azonosítva, továbbá a

$$(\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\times\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\frac{v^2}{2}$$

azonosságát felhasználva, a

$$\frac{d}{dt}\int_{(G)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \int_{(G)} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\,d\boldsymbol{r} + \int_{(G)} \mathbf{grad}\,\frac{v^2}{2}\,d\boldsymbol{r} \qquad (34)$$

eredményt kapjuk.

Ha a *G zárt* görbe, akkor az utolsó integrál — az (első) gradiens-tétel értelmében — nyilván zérussal egyenlő, és az alábbi fontos formulához jutunk:

$$\frac{d}{dt}\oint_{(G)} \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r} = \oint_{(G)} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\,d\boldsymbol{r}. \qquad (35)$$

Ezzel igazoltuk a következő ***tétel***-t: *A sebességvektor zárt G folyadékgörbe menti cirkulációjának idő szerinti deriváltja egyenlő a gyorsulásvektor G menti cirkulációjával.*

4'. Végezzük el most az előbbi vizsgálatot konzervatív erőtérben áramló ideális, barotróp folyadékra vonatkozólag. Az ilyen folyadék mozgásegyenlete — a III° 1' (17) és (18) szerint —

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\, \Pi,$$

a $\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{v}$ vektor zárt folyadékgörbe menti cirkulációjának teljes deriváltja pedig — a c) $\gamma)$ IV° értelmében —

$$\frac{d}{dt} \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \oint_{(G)} \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}\right] d\boldsymbol{r}.$$

E két formulát összevetve, látható, hogy

$$\frac{d}{dt} \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \oint_{(G)} \mathbf{grad}\, \Pi\, d\boldsymbol{r} = 0, \tag{34a}$$

következésképpen

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r} = \text{const.} \tag{34b}$$

Ezzel igazolást nyert THOMSON ***tétele:*** *Konzervatív erőtérben áramló ideális, barotróp (s akár — speciálisan — összenyomhatatlan) folyadékban a sebességvektor tetszőleges zárt folyadékgörbe menti cirkulációja állandó marad a mozgás időtartama alatt.*

$\gamma)$ MAXWELL-egyenletek. Elektrosztatika

1°. A MAXWELL-féle egyenletek. 1'. Az alábbiakban induktív úton, mégpedig a BIOT—SAVART-törvény (és ennek gerjesztési törvény néven ismert másik alakja), valamint a FARADAY-féle indukciótörvény általánosításaként felállítjuk a híres MAXWELL-féle egyenleteket, majd ezekből mint axiómákból kiindulva deduktív úton tárgyaljuk az elektrosztatika egyenletét. Megjegyzendő, hogy formuláinkat a modern GIORGI-féle mértékrendszerben írjuk fel.*

2'. A kísérleti úton nyert BIOT—SAVART-***törvény*** az áram és az általa létesített mágneses tér között állapít meg összefüggést; eszerint *az I erősségű áramot vezető C zárt áramkör környezetének tetszőleges pontjában a mágneses térerősség*

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^0}{r^2}, \tag{1}$$

ahol $d\boldsymbol{l}$ a vezetőnek (a pozitív árammal egyértelmű) ívelemvektora, $\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{r}^0$ az előbbi ívelemtől a vizsgált pontig vont vektor (98*a*. ábra).

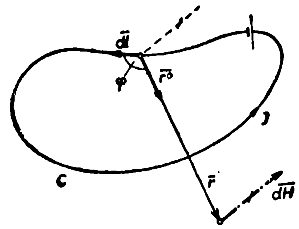
Ugyancsak az áram mágneses hatására vonatkozó kísérleti tényeket fejezi ki más alakban az ún ***gerjesztési törvény***; eszerint *valamely mágneses térben a mágneses*

* L. pl. *Simonyi* (T. 10.).

térerősségnek bármely G zárt görbe mentén vett cirkulációja a G-re felfeszített tetszőleges F felületen áthaladó áramok I (algebrai) összegével egyenlő, azaz

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{r} = \iint_{(F)} \boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{F} = I, \qquad (2)$$

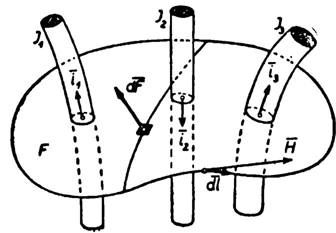
ahol $\boldsymbol{i}$ az áramsűrűség (98*b*. ábra).



Összevetve az (1)-et és a(2)-t az örvényvonal vektorterének és intenzitásának — a c) β) III°-ban megismert —

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^0}{r^2}, \quad \text{illetve} \quad \Gamma = \oint_{(G)} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}$$

formuláival, rögtön megállapítható, hogy a *C* áramkör a ***H*** mágneses erőtér *örvényvonal*ának tekinthető, s ennek *intenzitása* éppen az áramerősséggel egyenlő.



98. ábra

A (2) egyenlet — a STOKES-tétel alkalmazásával — az

$$\iint_{(F)} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{F} = \iint_{(F)} \boldsymbol{i}\, d\boldsymbol{F}$$

alakra írható át; ebből következik — az *F* tetszőlegessége miatt — az integrálandók egyenlősége, azaz

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}; \qquad (3)$$

más szóval az $\boldsymbol{i}$ vektorok a ***H*** vektortér örvényvektorai. A (3) *a (vezetésbeli) áram mágneses terének* — az (1) és a (2) integráltörvénnyel azonos fizikai tartalmú — *differenciáltörvénye.* Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0. \qquad (4)$$

3′. A *nagyfrekvenciás nyílt áramkörök*kel kapcsolatos vizsgálatok során kitűnt a fenti egyenletek pontatlansága, megmutatkoztak értelmezésének nehézségei, ellentmondásai. Ezek kiküszöbölésére J. C. MAXWELL — az elektromos töltés megmaradását kifejező

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

alakú, ún. *folytonossági egyenlet,* valamint a ϱ elektromos töltéssűrűség és a *D* elektromos eltolás közötti

$$\varrho = \operatorname{div} \boldsymbol{D}$$

összefüggés figyelembevételével — az $\boldsymbol{i}$ sűrűségű vezetésbeli áramot az

$$\boldsymbol{i}^* = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

sűrűségű járulékos, ún. *eltolási árammal* egészítette ki, amely — a (4)-et általánosító

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} + \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) = 0 \tag{5}$$

egyenlet értelmében — *a nyílt* (a vezetésbeli áramot hordozó) *áramkört* (a szigetelőben) *zárja,* továbbá — a (3)-at általánosító

$$\boxed{\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}} \tag{6a}$$

egyenlet szerint — *résztvesz a mágneses tér létesítésében,* mégpedig a frekvenciával együtt növekvő mértékben (99*a*. ábra). A (6a) az ún. ***első* Maxwell*-egyenlet.***

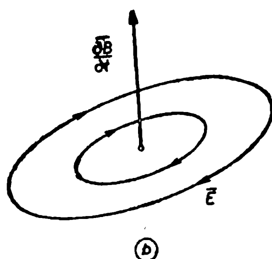
Ugyanez derékszögű koordinátás alakban:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{6b}$$

E tisztán elméleti úton nyert törvényszerűséget a kísérletek nagymértékben igazolták.

4'. A kísérleti úton nyert Faraday***-féle indukció-törvény*** a mágneses tér változásának elektromos hatásáról tájékoztat; eszerint *valamely vezetőhurokban az általa körülfogott fluxus változási sebességével ellentetten egyenlő feszültség indukálódik,* azaz

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{7}$$



99. ábra

A G hurokbeli feszültség és a G-re felfeszített tetszőleges F felületen vett fluxus integrál-alakban

$$U = \oint_{(G)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}, \quad \text{illetve} \quad \Phi = \iint_{(F)} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{F}$$

módon írható, ahol $\boldsymbol{E}$ az elektromos térerősség, $\boldsymbol{B}$ a mágneses indukció vektora. Ezek felhasználásával a (7) egyenlet

$$\oint_{(G)} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(F)} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{F} \tag{8a}$$

alakot, majd a Stokes-tétel alkalmazásával a

$$\iint_{(F)} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{F} = -\iint_{(F)} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\, d\boldsymbol{F} \tag{8b}$$

alakot ölti. Mivel ez bármely F felületre igaz, ezért az integrálandók azonosan egyenlők, azaz

$$\boxed{\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.} \tag{9a}$$

Ez az ún. ***második*** MAXWELL-***egyenlet***, amely a (7) indukciótörvénynek csak átírt alakja. Fizikai tartalma az, hogy *a mágneses indukció időbeli változása elektromos teret létesít* (99*b* ábra). A (9a) derékszögű koordinátás alakban:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{9b}$$

Figyelemre méltó, hogy — a (6) szerint — az $\boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ vektor és a körülötte cirkuláló $\boldsymbol{H}$ vektor *jobbrendszert*, viszont — a (9) szerint — a $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ vektor és a körülötte cirkuláló $\boldsymbol{E}$ vektor *balrendszert* képez (99*a*, *b*. ábra).

6'. A két MAXWELL-egyenlethez még bizonyos ***kiegészítő egyenletek*** járulnak, amelyeket a tapasztalat is megerősít. Ezek közül az első kettő *általános érvényű*, az anyag minőségétől független, nevezetesen:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho. \tag{10a, b}$$

Eszerint a mágneses indukcióvonalak zártak, az elektromos eltolási vonalak pedig töltésekből erednek, és töltésekbe torkolnak.

További három egyenlet *az anyag minőségétől függő összefüggést* állapít meg $\boldsymbol{D}$ és $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{H}$, valamint $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}_i$ és $\boldsymbol{i}$ között, nevezetesen:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{i} = \gamma (\boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}), \tag{10c, d, e}$$

ahol ε a dielektromos állandó, μ a mágneses permeabilitás, γ a fajlagos vezetőképesség és $\boldsymbol{E}_i$ az idegen elektromos térerősség. Megjegyzendő, hogy ε, μ és γ nem szigorúan vett anyagi állandók, mert értéküket az anyagon kívül egyéb tényezők (pl. izotrópia, frekvencia, $\boldsymbol{B}$, hőfok stb.) is befolyásolják.

Végül a szintén anyagi jellegű

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \mu \boldsymbol{H}^2) \tag{11}$$

egyenlet *az elektromágneses energia térbeli W sűrűségét* szolgáltatja.

Igazolható,* hogy a (6a), (9a) MAXWELL-egyenletekből és a (10—11) kiegészítő egyenletekből álló parciális differenciálegyenlet-rendszer — alkalmas kezdeti és kerületi feltételek mellett — *egyértelműen megoldható.*

* L. pl. *Simonyi* [T. 10.] 35. o.

7′. Végül a MAXWELL-féle egyenletrendszer alapján megadjuk az ***elektromágnesség felosztásá***-t.

A legegyszerűbb esetben sem időbeli változás, sem áram nincs, és nyilván megszűnik a kapcsolat az elektromos és a mágneses mennyiségek között. Külön tárgyalható tehát

az elektrosztatika, amelynek alapegyenletei:

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E};$$

a magnetosztatika, amelynek alapegyenletei:

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}.$$

Ha időbeli változás továbbra sincs, de állandó áram fellép, akkor már van kapcsolat az elektromos és a mágneses mennyiségek közt, lévén

a stacionárius áramok alapegyenletei:

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}, \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho,$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{i} = \gamma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_l).$$

Ha a mágneses tér időbeli változását figyelembe vesszük, de az elektromos térét még nem, akkor már elég szoros az említett kapcsolat, lévén

a kvazistacionárius áramok alapegyenletei:

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}, \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho,$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{i} = \gamma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_l).$$

Végül az összes időbeli változásokat tekintetbe veszik

az elektromágneses hullámok alapegyenletei:

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho,$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{i} = \gamma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_l).$$

Az alábbiakban röviden tárgyaljuk az elektrosztatikát, főleg a vektoranalitikus szempontból érdekes részleteket érintve.

II°. A z e l e k t r o s z t a t i k u s t é r. 1′. *Alapegyenletei* — az I° 7′ szerint —

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}. \tag{12a, b, c}$$

Szorítkozzunk vákuumra, ahol $\varepsilon = \varepsilon_0$ szigorúan vett állandó. A (12a) értelmében $\boldsymbol{E}$ előállítható valamely *U potenciálfüggvény* (negatív) gradienseként, azaz

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathbf{grad}\, U \tag{13}$$

módon. Ezt és a (12c)-t figyelembe véve, a (12b) vákuumra így alakul:

$$\triangle U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{14}$$

speciálisan $\varrho = 0$ esetén pedig:

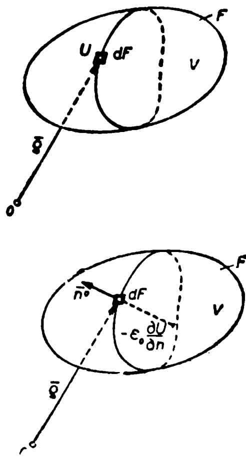
$$\triangle U = 0. \tag{15}$$

Ezek szerint *az elektrosztatikus teret elektromos töltésű térrészben a* POISSON-*féle, töltetlen térrészben pedig a* LAPLACE-*féle egyenlet írja le.*

2′. Legyen egy zárt felület határolta térrészben mindenütt ismeretes a $\triangle U$ értéke (tehát $-\varrho/\varepsilon_0$, illetve 0), továbbá legyen előírva a felületen mindenütt

az $U(\bar{\varrho})$ felületi potenciál, vagy (16)

a $\sigma(\bar{\varrho}) = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial U}{\partial n}$ felületi töltéssűrűség, (17)



100. ábra

(100*a*. és *b*. ábra). *Keresendő a* POISSON-*féle* (14), *speciálisan a* LAPLACE-*féle* (15) *egyenletnek a* (16), *illetve a* (17) *kerületi feltételt kielégítő megoldása.*

A c) α) I° 2′-belihez hasonló gondolatmenettel kimutatható, hogy *e kerületérték-feladatok* e g y é r t e l m ű e n *megoldhatók.*

3′. Ha a térben csak *folytonosan eloszló töltések* vannak (mégpedig a V térrészben $\varrho(\boldsymbol{q})$, a V-n kívül pedig $\varrho = 0$ sűrűséggel), akkor — a c) α) IV° értelmében — a $\boldsymbol{p}$ helyzetvektorú (s akár a V-ben levő) pontban

$$U(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V)}\frac{\triangle U(\boldsymbol{q})\,dV}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iiint\limits_{(V)}\frac{\varrho(\boldsymbol{q})\,dV}{r} \tag{18}$$

potenciál létesül, feltéve, hogy

$$r \to \infty\text{-nél}\ |U| < K/r^{\lambda},\ \text{ahol}\ \lambda > 0,\quad K < \infty. \tag{19}$$

Ha a V térrészben — a ϱ sűrűséggel folytonosan eloszló töltések mellett — valamely F felületen

$$\sigma = \varepsilon_0 \,\mathrm{Div}\, \boldsymbol{E} = \varepsilon_0\,(E_n^+ - E_n^-) = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial U^+}{\partial n} - \frac{\partial U^-}{\partial n}\right)$$

sűrűséggel eloszló *felületi töltések*, egy másik F'' felületen pedig

$$\bar{\eta} = \eta\,\boldsymbol{n}^0 = \varepsilon_0\,\mathbf{Grad}\,U = \varepsilon_0\,(U^+ - U^-)\,\boldsymbol{n}^0$$

nyomaték-sűrűségű *kettős rétegek* helyezkednek el, akkor a potenciáltér — a c) β) I°—II°-ben tanultak szerint —

$$U(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{(V)}\frac{\triangle U}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(F')}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial U^+}{\partial n} - \frac{\partial U^-}{\partial n}\right)dF - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(F'')}(U^+ - U^-)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dF =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iiint\limits_{(V)}\frac{\varrho\,dV}{r} - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iint\limits_{(F')}\frac{\sigma\,dF}{r} - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iint\limits_{(F'')}\eta\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dF \tag{20}$$

formulával jellemezhető.

4'. A gyakorlatban fontosabb az az eset, midőn *a V térrészben nincs töltés,* azaz $\varrho = -\varepsilon_0 \triangle U = 0$, az F határfelületre pedig a (16), vagy a (17) kerületi feltétel van előírva. Ekkor nyilván a c) *α)* VI°-ban tanulmányozott DIRICHLET-*féle,* illetve NEUMANN-*féle feladat*tal állunk szemben. A V térrészbeli potenciáleloszlás tehát a (15) és (16) esetén

$$U(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{4\pi} \oint\!\!\oint_{(F)} U(\bar{\varrho}) \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{\bar{p};\bar{\varrho}} dF, \tag{21}$$

a (15) és (17) esetén pedig

$$U(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi} \oint\!\!\oint \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{\bar{\varrho}} H(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q})\, dF. \tag{22}$$

Pl. a (21) formulát az origó középpontú, a sugarú gömbre alkalmazva, az

$$U(\boldsymbol{p}) = \frac{(a^2 - p^2)}{4\pi\, a} \oint\!\!\oint_{(F)} \frac{U(\bar{\varrho})\, dF}{r}$$

alakú ún. POISSON-integrálra jutunk.

A gyakorlati elektrosztatikában NEUMANN-feladat ritkán szerepel, mert a — rendszerint ismeretlen — felületi töltéseloszlás megadását igényli. Annál sűrűbben fordul elő DIRICHLET-feladat, de kevésbé általános alakban, amennyiben a V teret határoló F_i vezető felületek ekvipotenciálisak, azaz rajtuk $U(\bar{\varrho}_i) = U_i = \text{const}$, $(i = 1, 2)$.

Az *állandó kerületértékekkel adott* DIRICHLET-*feladatok* megoldására — a (21) formula helyett — egyszerűbb módszert alkalmazunk. A módszer lényege egy olyan $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r}(u, v, w)$ vektorfüggvény megkeresésése, amely az egyik paraméternek, pl. a w-nek bizonyos rögzített $w = w_i$ értékeihez $\boldsymbol{r}(u, v, w_i) = \bar{\varrho}_i\,(u, v)$ paraméterfelületekül éppen az adott F_i ekvipotenciális felületeket rendeli. Az alkalmas $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v})$ vektorfüggvényt megtalálva — a b) *γ)*-ban tanult módon — áttérünk az általa meghatározott *görbe vonalú koordináta-rendszerre.* Ebben felírjuk a LAPLACE-egyenlet új alakját, és olyan megoldását keressük, amely a $\bar{\varrho}_i\,(u, v)$ paraméterfelületeken állandó értékeket ad, azaz $U(w)$ alakú. Végül — az $U(w_i) = U_i\; (i = 1, 2)$ követelmények alapján — az $U(w)$ ismeretlen állandóit meghatározva, a feladat teljes megoldását nyerjük.

Pl. ha az U_i potenciálú F_i felületek (végtelen hosszúnak tekinthető) $x^2 + y^2 = r_i^2$ egyenletű körhengerek $(i = 1, 2)$, akkor a megfelelő vektorfüggvény nyilván

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r}(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z),$$

mert ez az $r = r_i$ paraméterekhez éppen az adott körhengereket rendeli paraméterfelületekül. A $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v})$ megszabta görbe vonalú koordináta-rendszerben a LAPLACE-egyenlet általában

$$\triangle U = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\right] = 0$$

alakú, de $U = U(r)$ feltétellel

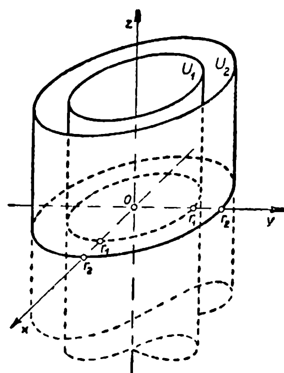
$$\triangle U = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} = 0$$

alakra, vagyis közönséges EULER-féle differenciálegyenletre egyszerűsödik. Általános megoldása nyilván

$$U = A \ln r + B,$$

az $U(r_i) = U_i$ $(i = 1, 2)$ feltételeket kielégítő partikuláris megoldása pedig (101. ábra)

$$U = \frac{U_1 - U_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r + \frac{U_2 \ln r_1 - U_2 \ln r_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$



101. ábra

e) Szemináriumi tárgykörök

α) Skalár- és vektorterek. A potenciálelméletből

I°. S k a l á r - és v e k t o r t e r e k (k i e g é s z í t é s). Egészítsük ki és mélyítsük el az a) és b) részben tanultakat, különös tekintettel a deriváltalakzatokra és ezek invariáns értelmezésére, az integrálredukciós tételekre és ezek alkalmazására, a görbe vonalú koordináta-rendszerekre stb.

Ajánlott irodalom: KOЧИН (M. 8.) 11–18. §. – LAGALLY (M. 7.) III. 1–4. §. – GANS (M. 13.) II. 1–9. §, III. 1–2. §. – SCHLEGELMILCH (M. 16.) II. 4. § 1–9., 5. § 1–4., 9. § 1–9. – RUTHERFORD (M. 24.) 60–78. o. – SPIELREIN (M. 9.) II. 16–22. §.

II°. P o t e n c i á l e l m é l e t i p r o b l é m á k (k i e g é s z í t é s). Egészítsük ki a c) részben tanultakat, különös tekintettel a LAPLACE-egyenletre, a DIRICHLET-feladatra, a GREEN-függvényre, a forrás-, dipólus-, örvényalakzatokra, végül a változó térbeli, felületi és görbementi integrálásra stb.

Ajánlott irodalom: KOЧИН (M. 8.) 19–21. §. – LAGALLY (M. 7.) III. 6., 7., 9. §. – GANS (M. 13.) III. 3–6. §. – SCHLEGELMILCH (M. 16.) 5. § 5–10., 7. § 1–2., 8. §, 12. §. – SPIELREIN (M. 9.) II. 23–27. §. – RUTHERFORD (M. 24.) 78–101., 111–122. o.

III°. A v e k t o r t e r e k g e o m e t r i a i s a j á t s á g a i. Tanulmányozzuk pl. a következő kérdéseket: Deriválás tetszőleges irányban, a vektorvonalak irányában. A gömbfüggvények főbb sajátságai. A vektorterek geometriája. Felületi normális terek. Ortogonális felületek középgörbülete. Egyenlő közű felületek. A LAPLACE-terek geometriai sajátságai. A görbe vonalú koordináta-rendszerek egyes speciális kérdései.

Ajánlott irodalom: LAGALLY (M. 7.) III. 8. §, 9. § 132–133. – SPIELREIN (M. 9.) III. 28–34. §.

β) Hidro- és elektrodinamikai alkalmazások

I°. A h i d r o d i n a m i k a a l a p e g y e n l e t e i (k i e g é s z í t é s). Egészítsük ki és mélyítsük el a d) β)-ban tanultakat, különös tekintettel az energiaegyenletre, a BERNOULLI-egyenletre, az impulzus- és impulzusnyomatéki egyenletre és ezek alkalmazásaira.

Ajánlott irodalom: KOЧИН (M. 8.) 15–17. §-ból. – GRUBER–BLAHÓ (T. 5.) 55–118. o. – LOJCJANSZKIJ (T. 6.) I–II–III. – LAGALLY (M. 7.) III. 5. §.

II°. A h i d r o d i n a m i k a e g y e s s p e c i á l i s k é r d é s e i. Tanulmányozzuk pl. a következő kérdéseket: Forrás-, dipólus- és örvényalakzatok sebességi potenciálja és sebességtere. Áramfüggvény, sebességi vektorpotenciál. Áramlás egyszerűbb testek körül; eredő erő és nyomaték stb.

Ajánlott irodalom: LOJCJANSZKIJ (T. 6.) VII.-ből.

III°. MAXWELL-egyenletek. Elektrosztatika (kiegészítés). Egészítsük ki és mélyítsük el a d) γ)-ban tanultakat, különös tekintettel a MAXWELL-egyenletek értelmezésére, az elektrosztatikus tér kiszámítására folytonosan eloszló, felületi töltések és kettős rétegek esetében, a LAPLACE-egyenlet megoldására pl. egyszerű térbeli esetekben, tengelyszimmetrikus esetben (BESSEL-függvényekkel), általános térbeli esetben (gömbfüggvényekkel) stb. Itt említsük meg a dielektrikumok, a magnetosztatika, a stacionárius áramok főbb kérdéseit.

Ajánlott irodalom: SIMONYI (T. 9.) I–II.-ből.

IV°. Kvázistacionárius áramok. Tanulmányozzuk pl. a következő kérdéseket: A kölcsönös indukció együtthatója. A mágneses tér energiája. Elektromágneses tér a vezetők belsejében. Ellenállás és belső önindukció a szkin-effektus figyelembevételével. A telegráf-egyenlet levezetése, megoldása és egyes kérdései.

Ajánlott irodalom: SIMONYI (T. 9.) IV.-ből.

V°. Elektromágneses hullámok. Tanulmányozzuk pl. a következő kérdéseket: A hullámegyenlet legegyszerűbb megoldása. Síkhullámok visszaverődése vezetőkről és szigetelő anyagokról. A MAXWELL-egyenletek megoldása reterdált potenciálok segítségével. Dipólus-antenna sugárzása. Antennák egyes kérdései. A MAXWELL-egyenletek megoldása az általánosított HERZ-féle vektor segítségével. A csőhullámok és üregrezonátorok egyes kérdései.

Ajánlott irodalom: SIMONYI (T. 9.) VI.-ból.

γ) Vegyes műszaki és fizikai alkalmazások

I°. A talajkonszolidáció egyenlete (kiegészítés). Tárgyaljuk behatóbban a talajkonszolidáció egyenletét, a talajmechanikában szokásos feltételek mellett.

Ajánlott irodalom: KÉZDY (T. 14.). – EGERVÁRY (M. 1.) BÉRES-rész.

II°. A diffúzió egyenlete. Vezessük le a diffúziónak a hővezetéséhez hasonló egyenletét.

Ajánlott irodalom: ALEXITS–FENYŐ (M. 25.). – JOOS (T. 2.) 524–528. o.

III°–V°. Az atommagfizika, a kvantum- és hullámmechanika egyes kérdései. Tanulmányozzuk e diszciplinák egyes, a vektoranalízis eszközeivel tárgyalható kérdéseit.

Ajánlott irodalom: JOOS (T. 2.) VII. B. – BLOHINCEV (T. 15.). – ORTVAY (T. 18.).

IV°. A relativitástan egyes kérdései. Tanulmányozzuk e diszciplina egyes, vektoranalitikus eszközökkel tárgyalható kérdéseit.

Ajánlott irodalom: NOVOBÁTZKY (T. 17.). – LANDAU–LIFSIC (T. 16.).

4. §. TENZORSZÁMÍTÁS (TENZORMEZŐK)

a) Tenzoraritmetika és -algebra

α) A tenzor fogalma és alapműveletei

I°. A (másodrendű) tenzor fogalma.

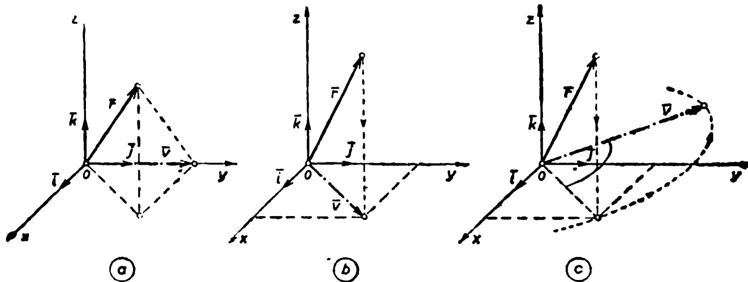
1′. Amint a 3. §. a) *β)* I°-ben e őre jeleztük, most a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ alakú vektor-vektor függvények közü külön vizsgálat tárgyává tesszük a legegyszerűbbeket, nevezetesen a *homogén lineáris* függvényeket. Ezek a

$$\boldsymbol{v}(c_1 \boldsymbol{r}_1 + c_2 \boldsymbol{r}_2) = c_1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1) + c_2 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_2) \tag{1}$$

függvényegyenlettel jellemezhetők, amely — a $c_1 = c_2 = 1$ és a $c_1 = c$, $c_2 = 0$ esetben

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_2) \text{ és } \boldsymbol{v}(c\, \boldsymbol{r}) = c\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{1a}$$

módon — a $\boldsymbol{v}$ és az $\boldsymbol{r}$ vektorok közötti *összeg- és aránytartást* juttatja kifejezésre. Az ilyen függvények geometriailag a $\boldsymbol{v}$ és az $\boldsymbol{r}$ vektorok között *affinitást* létesítenek.



102. ábra

Néhány homogén lineáris függvény és a megfelelő affin transzformáció pl.:

$\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{r}$: nyújtás, zsugorítás, tükrözés;

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{t}^0 (\boldsymbol{t}^0 \boldsymbol{r})$: vetítés $\boldsymbol{t}^0$ irányú egyenesre;

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}^0 \times (\boldsymbol{n}^0 \times \boldsymbol{r})$: vetítés $\boldsymbol{n}^0$ normálisú síkra;

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}^0 \times \boldsymbol{r}$: az előbbi, majd $\boldsymbol{n}^0$ körüli 90°-o forgatás.

A 102. ábrán *a)* a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{r})$, *b)* a $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{k}$, *c)* a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}$ affin transzformációkat szemléltettük.

2′. Mint ismeretes, a skalár-skalár, a vektor-skalár és a skalár-vektor függvények közül a homogén lineárisak rendre

$$y = a\,x, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\,t, \quad u = \boldsymbol{a}\boldsymbol{r}$$

alakban, vagyis egy skalár, illetve vektor tényező és a független változó szorzataként írhatók fel. *Hasonló szorzatalakhoz a homogén lineáris vektor-vektor függvényeknél csak egy új fajta, **A** jelű mennyiség levezetésével juthatunk,*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} \tag{2}$$

módon; az A-t homogén lineáris operátornak, vagy affin operátornak (röviden affininornak), de leggyakrabban *tenzor-nak nevezik.* Minden homogén lineáris vektorfüggvényhez, illetve affin transzformációhoz egy-egy $\boldsymbol{A}$ tenzor rendelhető; a $\boldsymbol{v}$ vektort a $\boldsymbol{A}$ tenzor és az $\boldsymbol{r}$ vektor *szorzat*ának, geometriailag pedig az $\boldsymbol{r}$ vektor $\boldsymbol{A}$ affin transzformációval nyert képének mondják.

3'. Kérdés, hogy az új tenzormennyiség jellemezhető-e — s ha igen, hogyan — a régi skalár- és vektormennyiségekkel.

Legyen az $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ (pl. az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) derékszögű egységvektor-hármas affin képe az

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_3 \tag{3}$$

vektorhármas. Ekkor az $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3$ tárgyvektor affin képe — az (1a értelmében — a

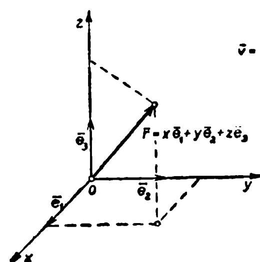
$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= u\,\boldsymbol{e}_1 + v\,\boldsymbol{e}_2 + w\,\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\,(x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3) = \\ &= x\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_3 = x\,\boldsymbol{a}_1 + y\,\boldsymbol{a}_2 + z\,\boldsymbol{a}_3\end{aligned} \tag{4}$$

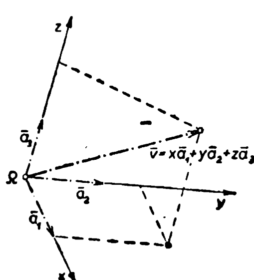
vektor (103. ábra). Eszerint *a (3) vektorhármas egyértelműen meghatározza az **A** tenzort, mint ennek három vektorkomponense.*

Az $\boldsymbol{A}$ tenzor három vektorkomponensének

$$a_{ik} = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_k \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{5a}$$

koordinátái az $\boldsymbol{A}$ tenzor *kilenc skalárkomponensét* képezik; a (3) és az (5a) értelmében





103. ábra

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}),\\ &\boldsymbol{a}_2(a_{12}, a_{22}, a_{32}),\\ &\boldsymbol{a}_3(a_{13}, a_{23}, a_{33}).\end{aligned} \tag{5b}$$

Az (5a) skalárokat vektoronként egy-egy oszlopba, vagyis

$$[a_{ik}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{6}$$

módon tabellázva, az $\boldsymbol{A}$ tenzor kvadratikus (!) *mátrix*ához jutunk. *A (6) mátrix szintén egyértelműen meghatározza az **A** tenzort* és a megfelelő affin leképzést.

Figyelembe véve, hogy a skalárok $3^0 = 1$, a vektorok $3^1 = 3$, a tenzorok $3^2 = 9$ skalárral jellemezhetők, indokolt ezeket rendre *nullad-, első- és másodrendű tenzorok*nak nevezni.

Az (5a) skalárkomponensek felhasználásával a (4) vektorfüggvény (pl.

$$\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{e}_1 = u = \boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{a}_1\,x + \boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{a}_2\,y + \boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{a}_3\,z = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z$$

módon) a

$$\left.\begin{aligned} u &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z \\ v &= a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z \\ w &= a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

skalár függvényrendszerbe írható át. A (7) alapján nyerhetők az $\boldsymbol{r}$ tárgyvektor x, y, z koordinátáiból a $\boldsymbol{v}$ képvektor u, v, w koordinátái.

4'. Megjegyzendő, hogy a fentebb megismert tenzorfogalom csak speciális esete a térelméletben használatos általánosabb tenzorfogalomnak; e speciális tenzort egyes szerzők háromméretű euklidesi térbeli,* mások affin ortogonális** tenzornak nevezik.

II°. Alapműveletek (első rész). 1'. A fentebb bevezetett tenzormennyiségek között (és részben a tenzor-, vektor- és skalármennyiségek között is) alapműveleteket értelmezhetünk, amelyek — mint látni fogjuk — néhány kivétellel eleget tesznek a skalároritmetika szabályainak. A tenzorok közötti műveletek a nekik megfelelő kvadratikus mátrixok közötti műveleteket vonnak maguk után, amelyeknek természetesen összhangban kell lenniök a mátrixszámítás aritmetikai szabályaival.***

Két tenzor egyenlő, azaz

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \quad \text{ha minden } \boldsymbol{r}\text{-re} \quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r}; \tag{8a}$$

mátrixuk

$$[a_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{e}_k] = [b_{ik}] \tag{8b}$$

értelmében megegyezik.

2'. *Az* $\boldsymbol{A}$ *tenzor és az* $\boldsymbol{r}$ *vektor* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}$ *(skaláris) szorzata* — mint azt már az $\boldsymbol{A}$ tenzor értelmezésénél, a (4) és az (5) formulában megállapítottuk —

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}(x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3) = x\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_3 = x\,\boldsymbol{a}_1 + y\,\boldsymbol{a}_2 + z\,\boldsymbol{a}_3 \tag{9a}$$

vagy a bal és a jobb oldal megfelelő koordinátáit egyeztetve

$$\left.\begin{aligned} u &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z \\ v &= a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z \\ w &= a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z \end{aligned}\right\}; \tag{9b}$$

a szorzat tehát olyan $\boldsymbol{v}$ vektor, amely az $\boldsymbol{r}$ vektor x, y, z koordinátáinak — az $\boldsymbol{A}$ tenzor $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ vektorkomponenseivel mint együtthatókkal (a skaláris szorzatra emlékeztető módon) képzett — homogén lineáris kifejezése. E szorzás disztributív és asszociatív, mert

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_2, \qquad \boldsymbol{A}(\lambda\,\boldsymbol{r}) = \lambda(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}),$$

de — kimutathatóan —nem kommutatív.

* Рашевский [M. 11.] ** Кочин [M. 8.] *** L. a sorozat C. IV. kötetét!

Az $\boldsymbol{0}$ *zérustenzor* értelmezése és mátrixa:

$$\boldsymbol{0}\,\boldsymbol{r} = 0, \quad [o_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{0}\,\boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_i\,0] = [0]. \tag{10}$$

Az $\boldsymbol{I}$ *egységtenzor* (idemtenzor) értelmezése és mátrixa:

$$\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}, \quad [i_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_k] = [\delta_{ik}], \tag{11}$$

ahol δ_{ik} a KRONECKER-*féle függvény,* melynek értéke

$$\delta_{ik} = \begin{Bmatrix} 0, \text{ ha } i \neq k \\ 1, \text{ ha } i = k \end{Bmatrix} \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{12}$$

3'. *Az* $\boldsymbol{A}$ *és a* $\boldsymbol{B}$ *tenzor* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ *ö s s z e g é*-t a

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r} \tag{13a}$$

egyenlőséggel értelmezzük; a $\boldsymbol{C}$ szintén tenzor, mert a $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r}$ függvény — a

$$\boldsymbol{C}\,(c_1\,\boldsymbol{r}_1 + c_2\,\boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{A}\,(c_1\,\boldsymbol{r}_1 + c_2\,\boldsymbol{r}_2) + \boldsymbol{B}\,(c_1\,\boldsymbol{r}_1 + c_2\,\boldsymbol{r}_2) =$$
$$= c_1\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r}_1) + c_2\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r}_2) = c_1\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r}_1 + c_2\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r}_2$$

szerint — összeg és aránytartó. Az így értelmezett összeadás kommutatív és asszociatív, mert

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} \quad \text{és} \quad (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r}). \tag{13b}$$

Az összeg mátrixának elemei — a

$$[c_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_i\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{e}_k)] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{e}_k] =$$
$$= [a_{ik} + b_{ik}]$$

értelmében — az összeadandó mátrixok megfelelő elemeinek összegei.

4'. *A* λ *skalár és az* $\boldsymbol{A}$ *tenzor* $\boldsymbol{C} = \lambda\,\boldsymbol{A}$ *s z o r z a t á*-t

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r} = \lambda\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}) \tag{14a}$$

módon értelmezzük; a $\boldsymbol{C}$ szintén tenzor, mert — az (1)-nek megfelelően —

$$\boldsymbol{C}(c_1\,\boldsymbol{r}_1 + c_2\,\boldsymbol{r}_2) = \lambda\,[\boldsymbol{A}(c_1\,\boldsymbol{r}_1 + c_2\,\boldsymbol{r}_2)] = \lambda\,[c_1\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_1 + c_2\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_2] =$$
$$= c_1 \cdot \lambda\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_1 + c_2 \cdot \lambda\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_2 = c_1\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r}_1 + c_2\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r}_2.$$

Az értelmezésből következik, hogy

$$\lambda\,(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda\,\boldsymbol{A} + \lambda\,\boldsymbol{B} \quad \text{és} \quad \lambda\,(\mu\,\boldsymbol{A}) = (\lambda\,\mu)\,\boldsymbol{A}.$$

A $\boldsymbol{C}$ mátrixának elemei — a

$$[c_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_i\,\lambda\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_k)] = [\lambda \cdot \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_k] = [\lambda\,a_{ik}] \tag{14b}$$

szerint — az $\boldsymbol{A}$ mátrixa megfelelői elemeinek λ-szorosai.

5'. *Az* $\boldsymbol{A}$ *és a* $\boldsymbol{B}$ *tenzor* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ *k ü l ö n b s é g é*-t

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) \tag{15a}$$

módon, vagyis $\boldsymbol{A}$ és a (-1) skalárral szorzott $\boldsymbol{B}$ összegeként értelmezzük. A különbség mátrixa:

$$[c_{ik}] = [a_{ik} + (-b_{ik})] = [a_{ik} - b_{ik}]. \tag{15b}$$

III°. Alapműveletek (második rész).* 1'. *Az* $\boldsymbol{A}$ *és a* $\boldsymbol{B}$ *tenzor* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ *szorzatá*-t

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r}) \tag{16a}$$

módon értelmezzük; vagyis a $\boldsymbol{C}$ tenzorral úgy szorozzuk az $\boldsymbol{r}$ vektort, hogy először a $\boldsymbol{B}$ tenzorral szorozzuk az $\boldsymbol{r}$ vektort, majd az $\boldsymbol{A}$ tenzorral a $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{r}$ vektort. A $\boldsymbol{C}$ szorzat) mátrixának ik indexű eleme — a

$$c_{ik} = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_i\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b}_k) = \boldsymbol{e}_i\,(b_{1k}\,\boldsymbol{a}_1 + b_{2k}\,\boldsymbol{a}_2 + b_{3k}\,\boldsymbol{a}_3) =$$

$$= a_{i1}\,b_{1k} + a_{i2}\,b_{2k} + a_{i3}\,b_{3k} = \boldsymbol{a}_i^*\,\boldsymbol{b}_k \tag{16b}$$

értelmében — az $\boldsymbol{A}$ mátrixa i-edik sorának, illetve a $\boldsymbol{B}$ mátrixa k-adik oszlopának elemeiből alkotott $\boldsymbol{a}_i^*$ (sor-) vektor, illetve $\boldsymbol{b}_k$ (oszlop-) vektor skaláris szorzata. Hasonló meggondolással a $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ szorzat mátrixa

$$[c'_{ik}] = [\boldsymbol{b}_i^*\,\boldsymbol{a}_k]. \tag{16c}$$

Látható, hogy az $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ és a $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ tenzorszorzat általában nem egyenlő, vagyis *két tenzor szorzása nem kommutatív művelet*, lévén általában $\boldsymbol{a}_i^*\,\boldsymbol{b}_k \neq \boldsymbol{b}_i^*\,\boldsymbol{a}_k$.

A tenzorok szorzására is érvényes az asszociatív és disztributív törvény, de csak a sorrend megtartása mellett, azaz

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}, \qquad \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}.$$

Tekintsük az $\boldsymbol{A}$ és a $\boldsymbol{B}$ tenzornak (saját mátrixához hasonló elrendezésű)

$$D\,(\boldsymbol{A}) = |\,a_{ik}\,|, \quad \text{illetve} \quad D\,(\boldsymbol{B}) = |\,b_{ik}\,| \tag{17}$$

determinánsát.** A determinánsok szorzástétele*** szerint

$$|\,a_{ik}\,|\,|\,b_{ik}\,| = |\,\boldsymbol{a}_i^*\,\boldsymbol{b}_k\,| = |\,c_{ik}\,|,$$

következésképpen

$$D\,(\boldsymbol{A})\,D\,(\boldsymbol{B}) = D\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}). \tag{18}$$

Eszerint *két tenzor szorzatának determinánsa egyenlő e tenzorok determinánsainak szorzatával.*

2'. *Az* $\boldsymbol{a}$ *vektor és az* $\boldsymbol{A}$ *tenzor* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}$ *(vektoriális) szorzatá*-t

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}) \tag{19a}$$

módon értelmezzük. A $\boldsymbol{C}$ tenzor mátrixa

$$[c_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_i\,\{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_k)\}] = [\boldsymbol{e}_i\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}_k)] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}_k].$$

E szorzás nem asszociatív és nem kommutatív, mert a vektoriális szorzás sem olyan, viszont tenzorok összeadásával kombinálva disztributív, azaz

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{B}, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{A}. \tag{19b}$$

3'. *Az* $\boldsymbol{a}$ *és a* $\boldsymbol{b}$ *vektor* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ *(diadikus) szorzatá*-t

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{r}) \tag{20a}$$

* Megjegyezzük, hogy az itt tárgyalandó különféle szorzások valamennyien eleget tesznek a mátrixok szorzási szabályának; l. pl. *Lovass—Nagy* [M. 26.].

** Itt $|\,a_{ik}\,|$ az a_{ik} általános elemű determinánst jelöli és nem az a_{ik} abszolút értékét!

*** L. pl. *Stachó* [M. 11.] 462. o.

módon értelmezzük; vagyis a $\boldsymbol{C}$ diadikus tenzorral, röviden diáddal úgy szorozzuk az $\boldsymbol{r}$ vektort, hogy a $\boldsymbol{b}$ és az $\boldsymbol{r}$ vektor skaláris szorzatával megszorozzuk az $\boldsymbol{a}$ vektort. A $\boldsymbol{C}$ tenzor mátrixa

$$[c_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{a}\, (\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{e}_k)] = [a_i\, b_k], \tag{20b}$$

a $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}$ tenzor mátrixé pedig nyilván

$$[c'_{ik}] = [b_i\, a_k]. \tag{20c}$$

A diadikus szorzás tehát *nem kommutatív*, lévén általában $a_i\, b_k \neq b_i\, a_k$.

Az $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ *és a* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{d}$ *diád* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{B}$ *szorzata* — a (16a) és a (20a) alapján felírható

$$\boldsymbol{C}\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\, (\boldsymbol{B}\, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}\, [\boldsymbol{c}\, (\boldsymbol{d}\, \boldsymbol{r})] = \boldsymbol{a}\, (\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{d}\, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{d})\, \boldsymbol{r}$$

értelmezés szerint — a

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{c})\, (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{d}) \tag{21}$$

diád.

4′. *Az* $\boldsymbol{A}$ *tenzor zérus és pozitív egész kitevőjű h a t v á n y a i*-t

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{A}^2, \ldots \tag{22}$$

módon értelmezzük.

Az $\boldsymbol{A}$ tenzor negatív egész kitevőjű hatványozása, valamint az $\boldsymbol{A}$ tenzorral való osztás szükségessé teszi az $\boldsymbol{A}$ tenzor reciprokának értelmezését.

IV°. A l a p m ű v e l e t e k (h a r m a d i k r é s z). 1′. Az $\boldsymbol{A}^{-1}$ reciprok tenzor értelmezésénél döntő szerepe van a $D\,(\boldsymbol{A})$ determinánsnak.

Az $\boldsymbol{A}$ tenzort zérus, lineáris, planáris, illetve *teljes tenzor*nak nevezzük, attól függően, hogy a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{r}$ affin leképzés során *az összes lehetséges* $\boldsymbol{r}$ *vektort* az origóba, kollineáris, komplanáris $\boldsymbol{v}$ vektorokba, illetve *az összes lehetséges* $\boldsymbol{v}$ *vektorba* viszi-e át, következésképpen attól függően, hogy az $\boldsymbol{A}$ tenzornak a

$$\boldsymbol{v} = x\, \boldsymbol{a}_1 + y\, \boldsymbol{a}_2 + z\, \boldsymbol{a}_3$$

előállításban szereplő $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ vektorkomponensei zérus, kollineáris, komplanáris, vagy általános helyzetű vektorok-e.

Ennek megfelelően *az* $\boldsymbol{A}$ *tenzor t e l j e s s é g é-nek szükséges és elégséges feltétele az, hogy determinánsa*

$$D\,(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{23}$$

legyen.

2′. *Az* $\boldsymbol{A}$ *tenzor* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}$ *r e c i p r o k á*-t

$$\boldsymbol{A}\, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{24}$$

módon értelmezzük, feltéve, hogy $\boldsymbol{C}$ egyáltalán létezik.

Valóban, nem minden tenzornak van reciproka. A (18) formula értelmében ugyanis

$$D(A)\,D(C) = D(I) = 1, \tag{25}$$

következésképpen kell, hogy $D(A) \neq 0$ legyen, mely a (23)-mal megegyező követelmény. *A* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}$ *reciprok tenzor létezésének* (szükséges és később elégségesnek is bizonyuló) *feltétele az* $\boldsymbol{A}$ *tenzor teljessége.*

A teljes $\boldsymbol{A}$ tenzor $\boldsymbol{A}^{-1}$ reciprokának tényleges előállítására felhasználjuk az $\boldsymbol{A} = [a_{ik}]$ tenzor*

$$\boldsymbol{A}^{\sim} = [a_{\widetilde{ik}}] = [A_{kl}] \tag{26a}$$

jelű és alakú ún. *adjungált tenzorát*, ahol A_{ki} az (a_{ik} elemhez képest a főátlóra nézve szimmetrikus) a_{kl} elemhez tartozó előjeles aldetermináns; részletezve:

$$\boldsymbol{A} = [a_{ik}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{\sim} = [a_{\widetilde{ik}}] = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}. \tag{26b}$$

A determináns sor vagy oszlop szerinti kifejtésére vonatkozó

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_{k\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i} A_{\nu k} = \delta_{ik} D(A)$$

tétel alkalmazásával írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\sim} = \boldsymbol{A}^{\sim}\boldsymbol{A} = [\sum_{\nu=1}^{3} a_{i\nu} A_{k\nu}] = [\sum_{\nu=1}^{3} a_{\nu i} A_{\nu k}] =$$
$$= [\delta_{ik} D(\boldsymbol{A})] = D(\boldsymbol{A})\,[\delta_{ik}] = D(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}.$$

Ebből következik, hogy

$$\boldsymbol{A} \cdot \frac{\boldsymbol{A}^{\sim}}{D(\boldsymbol{A})} = \frac{\boldsymbol{A}^{\sim}}{D(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}. \tag{27}$$

Ezt a (24)-gyel összevetve megállapíthatjuk, hogy *a teljes* $\boldsymbol{A}$ *tenzor* $\boldsymbol{A}^{-1}$ *reciprok tenzora az* $\boldsymbol{A}^{\sim}$ *adjungált tenzor és a* $D(\boldsymbol{A})$ *determináns hányadosával egyenlő*; jelekkel:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^{\sim}}{D(\boldsymbol{A})}. \tag{28}$$

* A továbbiakban — számos szerzőt követve — az $\boldsymbol{A}$ (tenzor) és az $[a_{ik}]$ (mátrix) jelölést egyenértékűnek fogjuk tekinteni. L. pl. Кочин [M. 8.].

Figyelemre méltó, hogy az A^{-1} reciprok tenzor három sor-vektorkomponensében az A tenzor három oszlop-vektorkomponensének reciprok-rendszerét lehet felismerni, pl.

$$\frac{\tilde{a_1}^*}{D(A)} = \frac{1}{D(A)}\left\{ i \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} i & a_{12} & a_{13} \\ j & a_{22} & a_{23} \\ k & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{a_2 \times a_3}{a_1\, a_2\, a_3}.$$

3'. *A teljes* A *tenzor negatív egész kitevőjű h a t v á n y a i* nyilván

$$A^{-1} = (A^{-1})^1, \quad A^{-2} = (A^{-1})^2, \quad A^{-3} = (A^{-1})^3, \; \ldots \tag{29}$$

módon értelmezhetők. Ezek szorzásnál egymással, valamint az A zérus és pozitív egész kitevőjű hatványaival felcserélhetők.

4'. *A* B *tenzor és teljes* A *tenzor h á n y a d o s a i*-t az

$$A\, C_1 = B, \quad \text{illetve} \quad C_2\, A = B \tag{30a}$$

tenzoregyenletek

$$C_1 = A^{-1} B, \quad \text{illetve} \quad C_2 = B\, A^{-1} \tag{30b}$$

megoldásaként értelmezzük. Minthogy a tenzorok szorzása általában nem kommutatív, ezért általában $C_1 \neq C_2$.

Megjegyzendő, hogy ha három tenzor, A, B és D között az

$$A = D\, B\, D^{-1} \tag{31a}$$

összefüggés áll fenn, akkor mégis általában

$$A \neq B. \tag{31b}$$

β) A tenzor különböző alakjai, invariánsai

I°. **Á t l ó s s z i m m e t r i á k.** *Az* A *tenzor* A^* *t r a n s z p o n á l t j á*-t* — tetszőleges u és v vektor mellett —

$$u\, A\, v = v\, A^*\, u \tag{1a}$$

módon értelmezzük. Az A^* egyértelműen meghatározott és mátrixa

$$[a^*_{ik}] = [e_i\, A^*\, e_k] = [e_k\, A\, e_i] = [a_{ki}], \tag{1b}$$

vagyis az A mátrixának a főátlóra vonatkozó tükörképe. Könnyen belátható, hogy

$$(A^*)^* = A, \quad (A \pm B)^* = A^* \pm B^*, \quad (\lambda\, A)^* = \lambda\, A^*, \quad (B\, A)^* = A^*\, B^*.$$

* Egyes szerzők (pl. *Szentmártony*) nem $A^{\sim}$-t, hanem A^*-ot nevezik adjungáltnak.

2'. *Az* $\boldsymbol{A}$ *tenzort szimmetrikus*-nak (tükrösnek) mondjuk, ha $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$, következésképpen

$$\boldsymbol{u} \boldsymbol{A} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \boldsymbol{A} \boldsymbol{u}, \tag{2a}$$

és mátrixa

$$[a_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_i] = [a_{ki}] \tag{2b}$$

módon a fő átlóra nézve szimmetrikus (tükrös).

3'. *Az* $\boldsymbol{A}$ *tenzort antimetrikus*-nak (váltónak) nevezzük, ha $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^*$, következésképpen

$$\boldsymbol{u} \boldsymbol{A} \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \boldsymbol{A} \boldsymbol{u} \tag{3a}$$

és mátrixa

$$[a_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_k] = -[\boldsymbol{e}_k \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_i] = -[a_{ki}] \tag{3b}$$

(ahol $a_{kk} = -a_{kk}$ miatt $a_{kk} = 0$) módon a főátlóra nézve tükrös elemeiben előjelváltó, a főátlóban pedig zérus elemeket tartalmaz.

4'. Az $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*$ tenzor szimmetrikus, az $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*$ tenzor pedig antimetrikus, lévén

$$[a_{ik} + a_{ki}] = [a_{ki} + a_{ik}], \quad \text{illetve} \quad [a_{ik} - a_{ki}] = -[a_{ki} - a_{ik}].$$

Minthogy nyilvánvalóan fennáll az

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{A}_{sz} + \boldsymbol{A}_a \tag{4}$$

egyenlőség, kimondhatjuk, hogy *minden tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy antimetrikus tenzor összegére.* E felbontás *egyértelmű,* mert $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'_{sz} + \boldsymbol{A}'_a$ feltevéssel dolgozva

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}'^*_{sz} + \boldsymbol{A}'^*_a = \boldsymbol{A}'_{sz} - \boldsymbol{A}'_a,$$

$$\boldsymbol{A}'_{sz} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{A}_{sz}, \quad \boldsymbol{A}'_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{A}_a, \quad \text{q. e. d.}$$

II°. A tenzor diadikus előállítása. 1'. Figyelembe véve a diadikus szorzat α) III° 3'-beli értelmezését, írhatjuk, hogy az $\boldsymbol{A}$ tenzor $\boldsymbol{a}_j$ (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}) vektorkomponensének és az $\boldsymbol{e}_j$ $(\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})$ egységvektornak (e sorrendben vett) diadikus szorzata

$$\boldsymbol{a}_j \circ \boldsymbol{e}_j = [c_{ik}] = [a_{ij}\delta_{kj}] \quad (j = 1, 2, 3), \tag{5a}$$

vagy részletezve

$$\boldsymbol{a}_1 \circ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 \circ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 \circ \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{5b}$$

A tenzorok összegének α) II° 3'-beli értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{5c}$$

Ennek alapján kimondhatjuk, hogy *bármely* $\boldsymbol{A}$ *tenzor előáállítható*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_1 \circ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{a}_2 \circ \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_3 \circ \boldsymbol{e}_3 \tag{6a}$$

módon, vagyis $\boldsymbol{a}_j \circ \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ *diádok összegeként.*

Hasonló meggondolásokkal nyerhető az

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1 \circ \boldsymbol{a}_1^* + \boldsymbol{e}_2 \circ \boldsymbol{a}_2^* + \boldsymbol{e}_3 \circ \boldsymbol{a}_3^* \tag{6b}$$

diadikus előállítás, ahol $\boldsymbol{a}_j^*$ (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}) a j-edik sorvektor.

III°. A tenzor invariánsai. 1′. Igazolható,* hogy

$$\left.\begin{aligned} a_{\rm I} &= \frac{1}{\boldsymbol{u\,v\,w}}\,[(\boldsymbol{A\,u})\,\boldsymbol{v\,w} + \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{A\,v})\,\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u\,v}\,(\boldsymbol{A\,w})],\\ a_{\rm II} &= \frac{1}{\boldsymbol{u\,v\,w}}\,[(\boldsymbol{A\,u})\,(\boldsymbol{A\,v})\,\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{A\,u})\,\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{A\,w}) + \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{A\,v})\,(\boldsymbol{A\,w})],\\ a_{\rm III} &= \frac{1}{\boldsymbol{u\,v\,w}}\,[(\boldsymbol{A\,u})\,(\boldsymbol{A\,v})\,(\boldsymbol{A\,w})] \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

kifejezések függetlenek az $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vektorhármas választásától, feltéve, hogy $\boldsymbol{u\,v\,w} \neq 0$. *Az* $\boldsymbol{A}$ *tenzor* eme *skalár-invariánsai* — célszerűen $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_3$ választással —

$$\left.\begin{aligned} a_{\rm I} &= \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{a}_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33},\\ a_{\rm II} &= \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{a}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\\ a_{\rm III} &= \boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{a}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = D(\boldsymbol{A}) \end{aligned}\right\} \tag{7b}$$

módon számíthatók ki.

Figyelemre méltó, hogy *az* $a_{\rm III}$ *skalár-invariáns* — az $a_{\rm III} = (\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{a}_3)/(\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3)$ értelmében — *az* $\boldsymbol{A}$ *affin leképzésnél bekövetkező térfogattorzulás relatív mértékét szolgáltatja.*

A (7b)-ből nyilvánvaló, hogy az $\boldsymbol{A}$ tenzor teljességi feltétele $a_{\rm III} \neq 0$ alakban is megoldható.

2′. Az *α)* III° 2′-ben tanultak szerint írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{I} = [c_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\,\{\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{e}_k)\}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{e}_k\,\boldsymbol{e}_i] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2\\ b_3 & 0 & -b_1\\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix};$$

eszerint *a* $\mathbf{C} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{I}$ *tenzor antimetrikus.*

* L. pl. *Szentmártony* [M. 4.].

Ugyanez megfordítva is igaz: *minden* *a n t i m e t r i k u s, vagyis*

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{8a}$$

alakú tenzor előállítható

$$A_a = a \times I, \quad a\,(a_{32}, \; -a_{31}, \; a_{21}) \tag{8b}$$

alakban, s vele — az *α)* III° 2′ szerint —

$$A_a\, r = (a \times I)\, r = a \times (I\, r) = a \times r; \tag{8c}$$

ezen előállítás beláthatóan egyértelmű. A szóban forgó a vektort az A_a antimetrikus tenzor *vektor-invariáns*ának nevezik.

3′. *Egy* A *általános tenzor* a *v e k t o r-i n v a r i á n s-án* — megállapodásszerűen — *antiszimmetrikus részének, az*

$$A_a = \frac{1}{2}(A - A^*) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & 0 \end{bmatrix} = a \times I \tag{9a}$$

tenzornak

$$a = \frac{1}{2}\,[(a_{32} - a_{23})\, e_1 + (a_{13} - a_{31})\, e_2 + (a_{21} - a_{12})\, e_3] \tag{9b}$$

vektor-invariánsát értjük. Ezzel

$$\frac{1}{2}(A - A^*)\, r = a \times r, \tag{9c}$$

következésképpen — az u és v vektortól függetlenül —

$$u(A - A^*)\, v = u\, A\, v - u\, A^*\, v = u\, A\, v - v\, A\, u = 2\, u\, a\, v. \tag{9d}$$

4′. Figyelemre méltó, hogy

$$b \circ a - a \circ b = [c_{ik}] = [b_i\, a_k - a_i\, b_k] = -\; [b_k\, a_i - a_k\, b_i] = -\; [c_{ki}]$$

vagyis *a kommutált diádok különbsége antimetrikus tenzor,* amelynek *vektor-invariánsa* — az *α)* III° 3′, valamint a vektoraritmetika ún. kifejtési tétele alapján felírható

$$(b \circ a - a \circ b)\, r = b(a\, r) - a(b\, r) = (a \times b) \times r \tag{10a}$$

összefüggés értelmében — a

$$c = a \times b \tag{10b}$$

vektor.

γ) Szimmetrikus tenzor és egyes alkalmazásai

1°. A főtengely-tétel. 1′. Az $\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{v}$ vektor választásától függetlenül

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} \tag{1a}$$

függvényegyenletnek eleget tevő s így

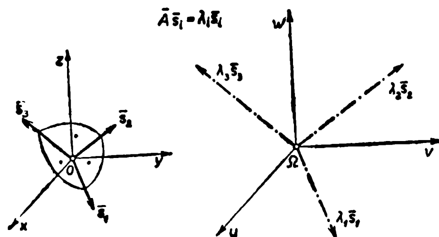
$$[a_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_k] = [\boldsymbol{e}_k\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{e}_i] = [a_{ki}] \tag{1b}$$

mátrixú szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ tenzorok elméletében döntő fontosságú az alábbi ún. ***főtengely-tétel:***

Minden szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ *tenzor létesítette* $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}$ *affin leképzésnél* (a 3 dimenziós térben) *legalább 3 egymásra merőleges* $\boldsymbol{s}_i$ *ún. sajátvektor irányát megtartja, és csupán nyújtást-zsugorítást-tükrözést szenvedhet a* λ_i *ún. sajátérték mértékében,*

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{s}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{s}_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

módon (104. ábra).



104. ábra

Ezen $\boldsymbol{s}_i$ egységvektorokat választva $\boldsymbol{e}_i$-knek, az $\boldsymbol{A}$ vektorkomponensei $\boldsymbol{a}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{s}_i$ alakot öltenek, *az* $\boldsymbol{A}$ *szimmetrikus tenzor diadikus alakja* pedig — a *β)* II° (5) formulának megfelelően — így írható:

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1\,\boldsymbol{s}_1 \circ \boldsymbol{s}_1 + \lambda_2\,\boldsymbol{s}_2 \circ \boldsymbol{s}_2 + \lambda_3\,\boldsymbol{s}_3 \circ \boldsymbol{s}_3. \tag{3}$$

A $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ értékhármast *az* $\boldsymbol{A}$ *spektrumá*nak, a (3) formulát pedig az $\boldsymbol{A}$ *spektrál-felbontásá*nak nevezik.

2′. Térjünk rá *a sajátérték-feladat megoldásá*ra, vagyis adott $\boldsymbol{A}$ mellett az ismeretlen $\boldsymbol{s}_i$ és λ_i meghatározására. A (2)-ből világos, hogy

$$\boldsymbol{s}_i\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i\,\lambda_i\,\boldsymbol{s}_i = \lambda_i \quad (\boldsymbol{s}_i^2 = 1), \tag{4}$$

vagyis λ_i az $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}$ ún. kvadratikus alaknak az $\boldsymbol{r}^2 = 1$ egységgömb $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}_i$ pontjában felvett értéke.

E *kvadratikus alak* valamely $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ derékszögű egységvektor-rendszerben

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} &= (x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3)\,(x\,\boldsymbol{a}_1 + y\,\boldsymbol{a}_2 + z\,\boldsymbol{a}_3) = \\ &= x\,(a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z) + \\ &+ y\,(a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z) + \\ &+ z\,(a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z)\end{aligned} \tag{5a}$$

módon írható, tehát ún. bilineáris tagokat (xy, yz, zx) is tartalmazhat, az $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$ sajátvektorok rendszerében pedig

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} &= (\xi\,\boldsymbol{s}_1 + \eta\,\boldsymbol{s}_2 + \zeta\,\boldsymbol{s}_3)\,(\lambda_1\,\xi\,\boldsymbol{s}_1 + \lambda_2\,\eta\,\boldsymbol{s}_2 + \lambda_3\,\zeta\,\boldsymbol{s}_3) = \\ &= \lambda_1\,\xi^2 + \lambda_2\,\eta^2 + \lambda_3\,\zeta^2\end{aligned} \tag{5b}$$

módon, vagyis *tiszta négyzetes alak*ban állítható elő.

Ez utóbbi alakból következik, hogy *a sajátértékek és a sajátvektorok* — az előbbiek $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ szerinti indexelése esetén — *a kvadratikus alakra vonatkozó alábbi kötött szélsőérték-feladatok megoldásai:*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \min(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{s}_1\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{s}_1, \text{ ha } \boldsymbol{r}^2 = 1; \\ \lambda_2 &= \min(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{s}_2\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{s}_2, \text{ ha } \boldsymbol{r}^2 = 1 \text{ és } \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{s}_1 = 0; \\ \lambda_3 &= \min(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{s}_3\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{s}_3, \text{ ha } \boldsymbol{r}^2 = 1 \text{ és } \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{s}_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

3'. A szóban forgó sajátérték-feladat tényleges numerikus megoldása a (2) vektoregyenlettel egyenértékű

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i)\,s_{1i} + a_{12}\,s_{2i} + a_{13}\,s_{3i} &= 0, \\ a_{21}\,s_{1i} + (a_{22} - \lambda_i)\,s_{2i} + a_{23}\,s_{3i} &= 0, \\ a_{31}\,s_{1i} + a_{32}\,s_{2i} + (a_{33} - \lambda_i)\,s_{3i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

homogén lineáris *egyenletrendszer* vizsgálatát igényli. Ennek a (0, 0, 0) triviálistól különböző megoldását keresve, *determinánsát* zérussal kell egyenlővé tenni, azaz

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Ez kifejtve és λ hatványai szerint rendezve, a

$$-(\lambda^3 - a_{\mathrm{I}}\lambda^2 + a_{\mathrm{II}}\lambda - a_{\mathrm{III}}) = 0 \quad (9)$$

alakú harmadfokú, ún. *karakterisztikus egyenletre* vezet, amelynek *együtthatói* — előjelüktől eltekintve —

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathrm{I}} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ a_{\mathrm{II}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ a_{\mathrm{III}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (9b)$$

vagyis éppen az $\boldsymbol{A}$ tenzor skalár-invariánsai. E karakterisztikus egyenlet gyökei szolgáltatják a λ_i *sajátérték*eket. Végül ezeket egyenként a (7)-be behelyettesítve, a most már határozott együtthatójú homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásaként nyerjük az $\boldsymbol{s}_i$ (s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}) *sajátvektorok*at.

A főtengelytétel igazolása tekintetében az irodalomra utalunk.*

* L. pl. *Szentmártony* [M. 4.].

II°. Szimmetrikus tenzorok indikátrixa. 1'. Az (5a, b) kvadratikus alakot egy konstanssal téve egyenlővé, valamilyen centrikus másodrendű felület egyenletét nyerjük.*

Egy szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ *tenzor indikátrix-ának az*

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r} = \pm 1 \qquad (10a)$$

egyenletű valós (vagyis tényleges pontokból álló) *másodrendű felületek együttesét nevezzük.* Egyenletünk a $\boldsymbol{A}$ sajátvektorai rendszerében tudvalevőleg a

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 = \pm 1 \qquad (10b)$$

alakot ölti; itt $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$.

Legyen az $\boldsymbol{A}$ tenzor *teljes,* azaz $a_{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$. Ha az $\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$ kvadratikus alak *határozott* (pozitív vagy negatív), s így a λ_i sajátértékek egyenlő előjelűek, akkor az indikátrix

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \qquad (11a)$$

egyenletű *ellipszoid.* Ha $\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$ *határozatlan,* s így $\lambda_1 < 0$, $\lambda_3 > 0$ (és pl. $\lambda_2 > 0$), akkor az indikátrix

$$-\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \pm 1 \qquad (11b)$$

egyenletű két konjugált (egy- és kétköpenyű) *hiperboloid.*

Legyen most az $\boldsymbol{A}$ tenzor *elfajuló,* azaz $a_{III} = 0$, mert egy vagy két sajátértéke zérus. Ha $\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$ *félhatározott,* akkor az indikátrix $\lambda_1 = 0$ esetén

$$\frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \qquad (12a)$$

egyenletű *elliptikus henger,* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ esetén

$$\frac{\zeta^2}{c^2} = 1 \qquad (12b)$$

egyenletű *párhuzamos síkpár.* Ha $\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$ *határozatlan,* akkor az indikátrix

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\zeta^2}{c^2} = \pm 1 \qquad (12c)$$

egyenletű két konjugált *hiperbolikus henger.*

2'. *Egy szimmetrikus* $\boldsymbol{A}$ *tenzorral együtt szimmetrikus* $\boldsymbol{A}$ *minden* pozitív egész kitevőjű, sőt — közönséges, vagyis reciprokkal rendelkező $\boldsymbol{A}$ esetén — minden negatív *egész kitevőjű hatványa is;* ui. pl.

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^{-1})^* = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}. \qquad (13)$$

A hatványozásnál a sajátvektorok nem változnak, a sajátértékek a megfelelő hatványra emelkednek. Így az $\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}^{2n+1}\boldsymbol{r}$ kvadratikus alak előjel-viszonyai ugyanazok, mint az $\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$-nél, viszont $\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}^{2n}\boldsymbol{r}$ pozitív határozott.

* A másodrendű alakzatok tenzoros tárgyalását l. pl. *Szentmártony* [M. 4.] művében.

*E hatványokkal kapcsolatos*ak az alábbi *indikátrixok:*

A szimmetrikus A^{-1} tenzor

$$r A^{-1} r = \pm 1 \quad (14)$$

egyenletű indikátrixa, az ún. *reciprok indikátrix;* ez az A-nak $r' A r' = \pm 1$ indikátrixából $r = A r'$ affin transzformációval nyerhető (105a. ábra, síkbeli viszonyokkal)

A szimmetrikus A^{-2} tenzor

$$r A^{-2} r = 1 \quad (15)$$

egyenletű indikátrixa, az ún. *mérték-indikátrix;* ez az $r' I r' = 1$ egységgömb $r = A r'$ affin transzformációval nyert képe (105b. ábra, s. v.).

A szimmetrikus A^2 tenzor

$$r A^2 r = 1 \quad (16)$$

egyenletű indikátrixa, az ún. *reciprok mérték-indikátrix;* ez az $r' I r' = 1$ egységgömbből $r = A^{-1} r'$, az $r' A^{-2} r' = 1$ mérték-indikátrixból pedig $r = A^{-2} r'$ affin leképzéssel nyerhető (105c. ábra, s. v.).

III°. Izometrikus és szimmetrikus tényező. 1'. Tekintsük azon M tenzort, amely bármely u, v vektorpárra eleget tesz az

$$(M u)(M v) = u v \quad (17)$$

*függvényegyenlet*nek. Az M tenzor megszabta affin leképzés — a (17)-ből $u = v$ esetben nyert

$$(M u)^2 = u^2, \quad \text{vagyis} \quad |M u| = |u| \quad (18a)$$

egyenlet értelmében — a vektorok hosszát megtartja, azaz *izometrikus* (mértéktartó), továbbá — a (17), a (18a) és a skalárszorzat értelmezése alapján nyert

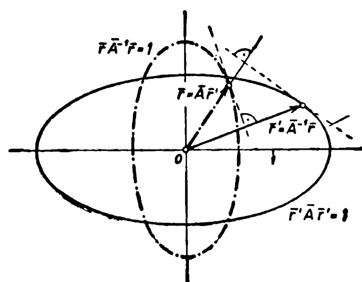
$$\cos(M u, M v) = \cos(u, v),$$

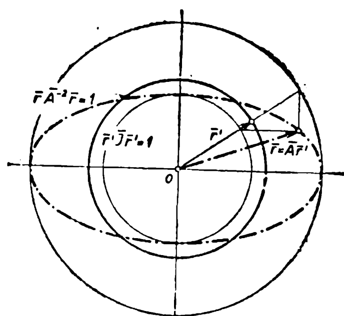
vagyis

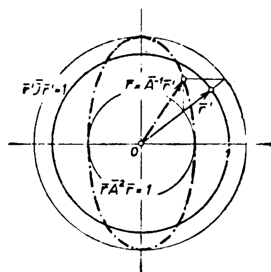
$$|\alpha| = |\text{arc}(M u, M v)| = |\text{arc}(u\, v)| \quad (18b)$$

egyenlet szerint — a szögek nagyságát is megtartja, azaz *abszolút izogonáli* (szögtartó).

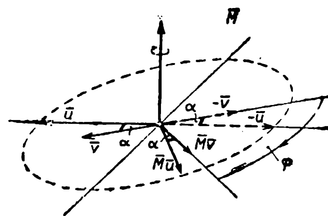
Könnyen belátható, hogy az affin leképzések közül csak *a merevtestszerű forgatások és a* (pontra, egyenesre, síkra vonatkozó) *tükrözések* rendelkeznek a fentebbi sajátságokkal (106. ábra).







105. ábra



106. ábra

Az $\boldsymbol{M}$ tenzor kétségtelenül *közönséges*, mert csak a $\boldsymbol{O}$ vektort viszi át a $\boldsymbol{O}$ vektorba. Így *az* $\boldsymbol{M}^{-1}$ *reciprok tenzor* létezik és — az

$$\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{M}^*(\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{M}^*\,\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{M}^*\,\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{-1}\,\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} \qquad (18c)$$

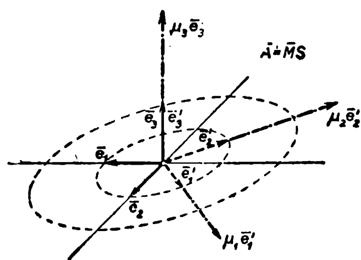
eredmény értelmében — *az* $\boldsymbol{M}^*$ *transzponált tenzorral egyenlő.*

2'. Az affin leképzésről újabb, szemléletes képet ad az alábbi ***tétel:***

Bármely $\boldsymbol{A}$ *tenzor* —

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{M} \qquad (19)$$

módon — felbontható egy izometrikus $\boldsymbol{M}$ *tenzor és egy szimmetrikus* $\boldsymbol{S}$, *illetve* $\boldsymbol{T}$ *tenzor szorzatára.* Az $\boldsymbol{M}$ létesítette leképzés a szimmetrikus $\boldsymbol{A}^*\,\boldsymbol{A}$ tenzor (egyik) sajátvektor-rendszerét beforgatja az ugyancsak szimmetrikus $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^*$ tenzor (egyik) sajátvektor-rendszerébe, az $\boldsymbol{S}$, illetve $\boldsymbol{T}$ megszabta leképzés viszont az $\boldsymbol{A}^*\,\boldsymbol{A}$, illetve $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^*$ sajátvektorai irányában nyújtást vagy zsugorítást, esetleg tükrözést végez az $\boldsymbol{S}$ és $\boldsymbol{T}$ tenzor (közös) sajátértékei mértékében, megjegyezve még, hogy $\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{A}^*\,\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{T}^2 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^*$ (107. ábra).



107. ábra

Ui. $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ és $(A\,A^*)^* = A^{**}A^* = AA^*$ értelmében $A^*\,A$ és $A\,A^*$ valóban szimmetrikus; az előbbi sajátvektorainak (egyik) jobbrendszere legyen e_1, e_2, e_3, az utóbbié pedig e'_1, e'_2, e'_3. Az $A\,e_i$ vektorok —

$$A\,A^*\,(A\,e_i) = A\,(A^*A)\,e_i = A\,\lambda_i\,e_i = \lambda_i\,(A\,e_i)$$

értelmében — az $A\,A^*$ sajátvektorai irányába esnek, és így alkalmas indexeléssel $A\,e_i = \mu_i\,e'_i$. Végeredményben

$$A = \sum_{i=1}^{3} \mu_i\,e'_i \circ e_i,$$

tehát az A létesítette leképzés valóban előállítható az

$$M = \sum_{i=1}^{3} e'_i \circ e_i \quad \text{és az} \quad S = \sum_{i=1}^{3} \mu_i e_i \circ e_i, \quad \text{illetve} \quad T = \sum_{i=1}^{3} \mu_i\,e'_i \circ e'_i$$

megszabta leképzések (19) szerinti szuperpozíciójaként. Ily módon $A = MS = TM$, tehát $A^* = S^*M^{-1} = M^{-1}\,T^*$, következésképpen $A^*A = S^*M^{-1}\,MS = S^*S = S^2$ és $A\,A^* = T\,M\,M^{-1}\,T^* = T\,T^* = T^2$.

b) A tenzoranalízis (a tenzortér) elemei

α) A deriválttenzor és sajátságai

I°. A deriválttenzor és mátrixa. 1'. Az a)-ban csak (nagyban, pontosan) *homogén lineáris* vektor-vektor függvényekkel foglalkoztunk. Ezeken kívül az alkalmazásokban szintén nagy szerepet játszanak a *differenciálható* vektor-vektor függvények. Az ilyen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvényeknek a független változó tetszőleges $\Delta\boldsymbol{r}$ növekményéhez tartozó *növekménye* előállítható

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r})\,\Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{r}, \Delta\boldsymbol{r})\,\Delta\boldsymbol{r}, \quad \lim_{|\Delta\boldsymbol{r}| \to 0} \boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{r}, \Delta\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (1a)$$

alakban. Tehát kicsiny $\Delta \boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r} \approx 0$ növekmény esetén

$$\Delta \boldsymbol{v} \approx d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}, \tag{1b}$$

vagyis a növekmények kapcsolata *kicsinyben, közelítőleg homogén lineáris*. Ebből következik, hogy *a vektor-vektorfüggvény deriváltja tenzor, az ún.* *deriválttenzor*. Szokásos jelölései:

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}) = \frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}), \tag{2}$$

megjegyezve, hogy a második nem tekinthető a differenciálok hányadosának, mert a vektorral való osztás nincs értelmezve. Igazolható*, hogy az (1a) *egyértelműen* meghatározza a deriválttenzort.

A $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$, vagy bármely $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ tenzor-vektor függvény ún. *tenzorteret* határoz meg; ilyen pl. a feszültségi, alakváltozási tenzortér.

2'. A $\boldsymbol{D}$ mátrixának megszerkesztése céljából fontoljuk meg, hogy – az (1b) szerint – pl. $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_1\, dx$ esetén

$$\partial \boldsymbol{v} = \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{e}_1 dx, \text{ tehát } \boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \text{ és pl. } d_{13} = \boldsymbol{e}_3\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial u}{\partial x};$$

hasonló megfontolással

$$\boldsymbol{d}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{d}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}.$$

A deriválttenzor mátrixa tehát így alakul:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Összevetve ezt a nabla-vektor 3. §. a) γ) I° alatti és a diadikus szorzat 4. §. a) α) III° alatti értelmezésével, rögtön szembetűnik, hogy

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{v} \circ \nabla) = (\nabla \circ \boldsymbol{v})^*; \tag{4}$$

tehát *a deriválttenzor előállítható a* $\boldsymbol{v}$ *és a* ∇ (e sorrendben vett) *diadikus szorzataként.*

* L. pl. *Hajós* [M. 2.].

II°. A deriválttenzor alakjai, invariánsai. 1'. A $\boldsymbol{D}$ deriválttenzor *transzponált*-ján — az a) β) (1a, b) mintájára — a

$$\boldsymbol{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla \circ \boldsymbol{v} \tag{5}$$

tenzort értjük.

A $\boldsymbol{D}$ *deriválttenzor is előállítható* — az a) β) (4) mintájára —

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^*) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^*) = \boldsymbol{D}_s + \boldsymbol{D}_a = \tag{6}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

módon, vagyis *egy szimmetrikus (tükrös) és egy antimetrikus (váltó) tenzor összegeként.*

Megemlítjük, hogy

$$\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}_a\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}_a^*\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\left(\frac{\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^*}{2}\right)^*\boldsymbol{n} = -\,\boldsymbol{n}\left(\frac{\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^*}{2}\right)\boldsymbol{n} = -\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}_a\,\boldsymbol{n},$$

következésképpen

$$\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}_a\,\boldsymbol{n} = 0; \tag{7a}$$

ezzel ellentétben

$$\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}_s\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\left(\frac{\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^*}{2}\right)\boldsymbol{n} = \delta_1(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}_1)^2 + \delta_2(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}_2)^2 + \delta_3(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}_3)^2 =$$

$$= \delta_1\,\xi^2 + \delta_2\,\eta^2 + \delta_3\,\zeta^2, \tag{7b}$$

ahol δ_i és $\boldsymbol{n}_i$ a

$$(\boldsymbol{D}_s - \delta_i\,\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{n}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{7c}$$

sajátérték-feladat megoldásai, megjegyezve, hogy

$$\delta_1 = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \delta_2 = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \delta_3 = \frac{\partial w}{\partial \zeta}. \tag{7d}$$

2'. A deriválttenzor *skalár-invariánsai* — az a) β) (7b) mintájára —

$$d_I = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \operatorname{div} \boldsymbol{v}, \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{d}_{II} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \delta_1 \delta_2 + \delta_1 \delta_3 + \delta_2 \delta_3, \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{d}_{III} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \delta_1 \delta_2 \delta_3 = \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_3. \tag{8c}$$

A deriválttenzor *vektor-invariánsa* — az a) β) (9b) mintájára —

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_3\right] = \frac{1}{2}\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v}; \tag{9a}$$

e vektor alkalmazásával

$$(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^*)\, \boldsymbol{dr} = \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{dr}. \tag{9b}$$

3'. Most megmutatjuk, hogy a div $\boldsymbol{v}$ és a **rot** $\boldsymbol{v}$ deriváltalakzatnak a 3. §. b) α)-ban tanult

$$\operatorname{div}_0 \boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{df}, \quad \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v} = \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} \boldsymbol{df} \times \boldsymbol{v}$$

alakú értelmezése valóban — a koordináta-rendszer választásától függetlenül — a $\boldsymbol{D}_0$ deriválttenzor d_{I0}, illetve 2 $\boldsymbol{d}_0$ invariánsára vezet.

Az egyszerűség kedvéért legyen a $\boldsymbol{r}_0$ pontra zsugorodó d_0F elemi zárt felület $\boldsymbol{r}_0$ középpontú és $|\boldsymbol{dr}| = dr$ sugarú gömb.

Ekkor a *divergenciá*ra vonatkozólag — a fentebbi (6)—(9b) formulák figyelembevételével — írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{df} = \frac{3}{4\, dr^3 \pi} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{D}_0\, \boldsymbol{dr}) \frac{\boldsymbol{dr}}{dr}\, df =$$

$$= \frac{3}{4 dr^4 \pi} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} (\boldsymbol{dr}\, \boldsymbol{D}_0\, \boldsymbol{dr})\, df = \frac{3}{4 dr^4 \pi} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} (\boldsymbol{dr}\, \boldsymbol{D}_{s0}\, \boldsymbol{dr} + \boldsymbol{dr}\, \boldsymbol{D}_{a0}\, \boldsymbol{dr})\, df =$$

$$= \frac{3}{4 dr^4 \pi} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} (\boldsymbol{dr}\, \boldsymbol{D}_{s0}\, \boldsymbol{dr})\, df = \frac{3}{4\, dr^4 \pi} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} (\delta_1\, d\xi^2 + \delta_2\, d\eta^2 + \delta_3\, d\zeta^2)\, df =$$

$$= \frac{3}{4\, dr^4 \pi} \cdot (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \cdot \frac{1}{3} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} dr^2\, df = \frac{3}{4\, dr^4 \pi} \cdot d_{I0} \cdot \frac{1}{3}\, 4\, dr^4\, \pi = \operatorname{div}_0 \boldsymbol{v},$$

amint állítottuk.

Rátérve a *rotációra* — az előbb említett formulák, továbbá a 3. §. b) α) (8a) alatt tanult

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{r}\,dF = \boldsymbol{a}\,V$$

formula, végül az $\boldsymbol{r}^2 = c$ gömbre érvényes

$$\oint\!\!\!\oint_{(F)} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}_s\,\boldsymbol{r})\,dF = 0$$

formula alkalmazásával — írható, hogy

$$\frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{dV_0}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} d\boldsymbol{f} \times (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{D}_0\,d\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{n}\,df = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{D}_0\,d\boldsymbol{r})\,df =$$

$$= \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{D}_{s0}\,d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{D}_{a0}\,d\boldsymbol{r})\,df = \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{d}_0 \times d\boldsymbol{r})\,df =$$

$$= \frac{1}{d_0V}\oint\!\!\!\oint_{(d_0F)} [(\boldsymbol{n}\,d\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{d}_0 - (\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{d}_0)\,d\boldsymbol{r}]\,df = \frac{\boldsymbol{d}_0}{d_0V}(dr\,d_0F - d_0V) =$$

$$= \frac{\boldsymbol{d}_0}{d_0V}(3\,d_0V - d_0V) = 2\,\boldsymbol{d}_0 = \mathbf{rot}_0\,\boldsymbol{v},$$

amint állítottuk.

III°. A deriválttenzor geometriai értelmezése. 1′. A $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ deriválttenzor a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ leképzés során az $\boldsymbol{r}$ hely elenyészően kis környezetében bekövetkező, vagyis *lokális hossz-, értelem- és szögváltozás*ról, bizonyos kifejezései pedig *a különböző dimenziójú lokális mértéktorzulás*ról adnak felvilágosítást.

Az elsőt illetőleg ugyanis — az a) γ) (19) mintájára felírható

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{S} \qquad (\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{*2}) \tag{10}$$

előállítás értelmében — a $\boldsymbol{D}$ tenzorú affin leképzés a $\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D}$ sajátvektorai irányában vett *nyújtás-zsugorítás-tükrözés* és a $\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D}$ sajátvektor-rendszerét a $\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{D}^*$-éba átvivő *merevtestszerű forgatás* szuperpozíciójaként nyerhető.

2′. A másodikat illetőleg a $d\boldsymbol{r} = dr\,\boldsymbol{n}$ vektor *relatív hosszváltozás*a ($\boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{v}$ jelöléssel)

$$\frac{|\,d\boldsymbol{v}\,| - dr}{dr} = |\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{n}\,| - 1; \tag{11a}$$

a $d\boldsymbol{r}_1 \times d\boldsymbol{r}_2 = |\,d r_1 \times d r_2\,|\,\boldsymbol{n}$ területvektorú paralelogramma *relatív területváltozás*a ($\boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{r}_i = d\boldsymbol{v}_i$ jelöléssel) — igazolhatóan —

$$\frac{|\,d\boldsymbol{v}_1 \times d\boldsymbol{v}_2\,| - |\,d\boldsymbol{r}_1 \times d\boldsymbol{r}_2\,|}{|\,d\boldsymbol{r}_1 \times d\boldsymbol{r}_2\,|} = |\,\boldsymbol{D}_*\,\boldsymbol{n}\,| - 1, \tag{11b}$$

ahol $\boldsymbol{D}_* = d_{II}\,\boldsymbol{I} - d_I\,\boldsymbol{D}^* + \boldsymbol{D}^{*2}$ a $\boldsymbol{D}$ tenzor ún. *duális tenzora*; végül a $d\boldsymbol{r}_1\,d\boldsymbol{r}_2\,d\boldsymbol{r}_3$ térfogatú paralelepipedon *relatív térfogatváltozás*a ($\boldsymbol{D}\,d\boldsymbol{r}_i = d\boldsymbol{v}_i$ jelöléssel)

$$\frac{|\,d\boldsymbol{v}_1\,d\boldsymbol{v}_2\,d\boldsymbol{v}_3\,| - |\,d\boldsymbol{r}_1\,d\boldsymbol{r}_2\,d\boldsymbol{r}_3\,|}{|\,d\boldsymbol{r}_1\,d\boldsymbol{r}_2\,d\boldsymbol{r}_3\,|} = |\,d_{III}\,| - 1. \tag{11c}$$

3'. Az alkalmazásokban előfordul még ($\boldsymbol{dr}_i = dr_i \boldsymbol{n}_i$ és $\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{dr}_i = \boldsymbol{dv}_i$ jelöléssel) az

$$\varepsilon_n = \frac{|\boldsymbol{dr} + \boldsymbol{dv}| - dr}{dr} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\boldsymbol{n}_2\,\boldsymbol{dv}_1}{dr_1} + \frac{\boldsymbol{n}_1\,\boldsymbol{dv}_2}{dr_2}$$

módon értelmezett ε_n *relatív megnyúlás*, illetve $\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2$ *szögváltozás*, az utóbbinál $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$ állással.* Ezekre — az $1 \gg \frac{|\boldsymbol{dv}_i|}{|\boldsymbol{dr}_i|} \gtrapprox \operatorname{arc\,tg}\frac{|\boldsymbol{dv}_i|}{|\boldsymbol{dr}_i|} = \max\gamma_i$ feltevéssel — egyszerű közelítő formulákat lehet levezetni. Nevezetesen — a $\boldsymbol{dr}/dr = \boldsymbol{n}$ jelöléssel —

$$\varepsilon_n = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{dr} + \boldsymbol{dv})^2} - dr}{dr} \approx \frac{\sqrt{dr^2 + 2\,\boldsymbol{dr}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{dr}}}{dr} - 1 =$$

$$= \sqrt{1 + 2\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{n}} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{n} - 1 = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}_s\,\boldsymbol{n},$$

lévén a (7a) szerint $\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}_a\,\boldsymbol{n} = 0$; továbbá

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 \approx \operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\gamma_2 \approx \frac{\boldsymbol{n}_2\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{dr}_1}{dr_1} + \frac{\boldsymbol{n}_2\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{dr}_2}{dr_2} =$$

$$= \boldsymbol{n}_2\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_1\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{n}_1\,(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^*)\,\boldsymbol{n}_2 = 2\,\boldsymbol{n}_1\,\boldsymbol{D}_s\,\boldsymbol{n}_2.$$

Végeredményben *jó közelítéssel*

$$\varepsilon_n = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{D}_s\,\boldsymbol{n}, \quad \gamma_{12} = 2\,\boldsymbol{n}_1\,\boldsymbol{D}_s\,\boldsymbol{n}_2. \tag{12a, b}$$

IV°. Differenciálási szabályok. 1'. Adjuk meg az összeg, a szorzat és az összetett függvény differenciálási szabályát, most már — a 3. §. a) β) II°-vel ellentétben — a deriválttenzor felhasználásával.

Minthogy a $\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$-et formálisan a skaláranalízis mintájára értelmeztük, nyilvánvaló, hogy a skaláranalízis ismert differenciálási szabályai érvényben maradnak, de — az m, n, u, v skalár vagy vektor jellegétől függetlenül —

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{\boldsymbol{dr}}(mu + nv) &= m * \frac{du}{\boldsymbol{dr}} + n * \frac{dv}{\boldsymbol{dr}}, \\ \frac{d}{\boldsymbol{dr}}(uv) &= u * \frac{dv}{\boldsymbol{dr}} \pm v * \frac{du}{\boldsymbol{dr}}, \\ \frac{d}{\boldsymbol{dr}}u[v(x)] &= \frac{du}{dv} * \frac{dv}{\boldsymbol{dr}} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

*értelmezés*sel, ahol a $\pm$ előjel az $uv = \pm vu$ szerint veendő, a * helyébe pedig az eredmény skalár, vektor vagy tenzor jellegének megfelelő szorzásjel teendő.

* Itt $\boldsymbol{n}_1$ és $\boldsymbol{n}_2$ nem főirányokat jelöl!

A fentebbi általános szabályokat alkalmazzuk most *néhány konkrét esetre*:

$$\frac{d'}{d\mathbf{r}}(u\,\mathbf{v}) = u\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} + \mathbf{v}\circ\frac{du}{d\mathbf{r}}, \tag{14a}$$

$$\frac{d}{d\mathbf{r}}(\mathbf{u}\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} + \mathbf{v}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)^{*}\mathbf{u} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\right)^{*}\mathbf{v}, \tag{15a}$$

$$\frac{d'}{d\mathbf{r}}\mathbf{u}\,[v(\mathbf{r})] = \frac{d\mathbf{u}}{dv}\circ\frac{dv}{d\mathbf{r}}, \tag{16a}$$

$$\frac{d}{d\mathbf{r}}u\,[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = \frac{du}{d\mathbf{v}}\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)^{*}\frac{du}{d\mathbf{v}}. \tag{17a}$$

2'. Ugyanezek — a szokásosabb

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\mathbf{r}} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},\\ &\frac{d}{d\mathbf{r}}u = \nabla u = \mathrm{grad}\,u, \quad \frac{d}{d\mathbf{r}}\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v} = \mathrm{div}\,\mathbf{v}\\ &\frac{d}{d\mathbf{r}}\times\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}, \quad \frac{d'}{d\mathbf{r}}\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \mathbf{v}\circ\nabla = (\nabla\circ\mathbf{v})^{*} = \mathbf{D}_{\bar{v}} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

jelölések alkalmazásával — így alakulnak:

$$(u\mathbf{v})\circ\nabla = u(\mathbf{v}\circ\nabla) + \mathbf{v}\circ\nabla u, \quad \mathbf{D}_{u\bar{v}} = u\,\mathbf{D}_{\bar{v}} + \mathbf{v}\circ\mathrm{grad}\,u; \tag{14b}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{u}\mathbf{v}) &= (\nabla\circ\mathbf{v})\,\mathbf{u} + (\nabla\circ\mathbf{u})\,\mathbf{v} = [(\nabla\circ\mathbf{v})\,\mathbf{u} - (\mathbf{v}\circ\nabla)\,\mathbf{u}] + [(\nabla\circ\mathbf{u})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\circ\nabla)\,\mathbf{u}] +\\ &+ (\mathbf{v}\circ\nabla)\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\circ\nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + (\mathbf{u}\,\nabla)\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\,\nabla)\,\mathbf{u},\\ \mathrm{grad}\,(\mathbf{u}\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\,\nabla)\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\,\nabla)\,\mathbf{u}; \end{aligned} \tag{15b}$$

$$\mathbf{u}\,[v(\mathbf{r})]\circ\nabla = \dot{\mathbf{u}}_{v}\circ\nabla v, \quad \mathbf{D}_{\bar{u}[v(\bar{r})]} = \dot{\mathbf{u}}_{v}\circ\mathrm{grad}\,v; \tag{16b}$$

$$\nabla u\,[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = (\nabla\circ\mathbf{v})\,\nabla_{\bar{v}}\,u, \quad \mathrm{grad}\,u\,[\mathbf{v}(\mathbf{r})] = \mathbf{D}_{v}^{*}\,\mathrm{grad}_{\bar{v}}\,u. \tag{17b}$$

3'. A szimmetrikus $\mathbf{A}$ tenzor $\mathbf{r}\,\mathbf{A}\,\mathbf{r} = \pm 1$ egyenletű *indikátrixa normálisának* megszerkesztésére ad egyszerű utasítást a (15a) szerint nyert

$$\frac{d}{d\mathbf{r}}(\mathbf{r}\,\mathbf{A}\,\mathbf{r}) = \left(\frac{d\,\mathbf{A}\,\mathbf{r}}{d\mathbf{r}}\right)^{*}\mathbf{r} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}}\right)^{*}\mathbf{A}\,\mathbf{r} = \mathbf{A}^{*}\mathbf{r} + \mathbf{I}\,\mathbf{A}\,\mathbf{r} = 2\,\mathbf{A}\,\mathbf{r} = \mathbf{n} \tag{19a}$$

differenciálási eredmény; a normális hossza (108. ábra)

$$\pm\,\overline{ON} = \mathbf{r}\,\mathbf{n}^{0} = \frac{\mathbf{r}\,\mathbf{A}\,\mathbf{r}}{|\mathbf{A}\,\mathbf{r}|} = \pm\frac{1}{|\mathbf{A}\,\mathbf{r}|}. \tag{19b}$$

108. ábra

4'. Különös figyelmet érdemel, hogy *a differenciálható*

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{du(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = \mathrm{grad}\,u(\mathbf{r}) \tag{20a}$$

gradiens-vektorfüggvény deriválttenzora *szimmetrikus;* ui. a

$$D_{\text{grad}\,u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{bmatrix} \qquad (20b)$$

alakú deriválttenzor tükrös elemei — a kétszer differenciálható többváltozós függvények vegyes második parciális deriváltjainak egyenlőségét kimondó YOUNG-tétel* értelmében — megegyeznek. A $D_{\text{grad}\,u}$ tenzor szimmetriája önállóan is igazolható.**

β) Tenzor-skalár és tenzor-vektor függvény analízise

1°. Tenzor-skalár függvény deriváltja.

1'. Legyen az R tenzorváltozó a t skalárváltozó függvénye; ekkor R mátrixos alakban

$$R(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} = [r_{ik}(t)] \qquad (1a)$$

módon, diadikus alakban pedig

$$R(t) = r_1(t) \circ e_1 + r_2(t) \circ e_2 + r_3(t) \circ e_3 = \sum_{i=1}^{3} r_i(t) \circ e_i \qquad (1b)$$

módon állítható elő.

2'. Értelmezzük az $R(t)$ tenzor-skalár függvény t szerinti deriváltját!

Definíció. *Az R tenzor t skalár szerinti deriváltján a tenzor növekménye és a skalár megfelelő növekménye hányadosának határértékét értjük, midőn ez utóbbi növekmény zérushoz tart;* jelekkel

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{dR}{dt} = \dot{R}(t). \qquad (2a)$$

Ugyanez mátrixos és diadikus alakban

$$\dot{R}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{r_{ik}(t+\Delta t) - r_{ik}(t)}{\Delta t}\right] = [\dot{r}_{ik}(t)] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{3} \frac{r_i(t+\Delta t) - r_i(t)}{\Delta t} \circ e_i = \sum_{i=1}^{3} \dot{r}_i(t) \circ e_i \qquad (2b)$$

módon nyerhető.

* L. pl. a sorozat A. VI. kötetében.
** L. pl. *Szentmártony* [M. 4.].

3'. A *differenciális szabályok* így alakulnak:

$$[\boldsymbol{R}_1(t) + \boldsymbol{R}_2(t)]^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{R}}_1(t) + \dot{\boldsymbol{R}}_2(t), \quad [u(t)\, \boldsymbol{R}(t)]^{\cdot} = \dot{u}(t)\, \boldsymbol{R}(t) + u(t)\, \dot{\boldsymbol{R}}(t),$$
$$[\boldsymbol{R}(t)\, \boldsymbol{r}(t)]^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{R}}(t)\, \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{R}(t)\, \dot{\boldsymbol{r}}(t), \quad [\boldsymbol{R}_1(t)\, \boldsymbol{R}_2(t)]^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{R}}_1(t)\, \boldsymbol{R}_2(t) + \boldsymbol{R}_1(t)\, \dot{\boldsymbol{R}}_2(t). \tag{3a-d}$$

Az $\boldsymbol{R}^{-1}$ reciprok-tenzor deriváltjához

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{I}, \quad \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{-1} + \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{R}}^{-1} = 0, \quad \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{R}}^{-1} = -\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{-1},$$
$$\dot{\boldsymbol{R}}^{-1} = -\boldsymbol{R}^{-1}\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{-1} \tag{3e}$$

úton jutunk.

II°. Tenzoros hatványsorok, polinómok. 1'. Fontos tenzor-skalár függvények definiálhatók az $\boldsymbol{A}t$ hatványai szerint haladó hatványsorok segítségével, a skaláranalízis mintájára. Pl. az e^{at}, sin at, cos at analógiájára

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \ldots, \tag{4a}$$

$$\sin \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{A}t - \frac{\boldsymbol{A}^3 t^3}{3!} + \frac{\boldsymbol{A}^5 t^5}{5!} - \frac{\boldsymbol{A}^7 t^7}{7!} + - \ldots, \tag{4b}$$

$$\cos \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^4 t^4}{4!} - \frac{\boldsymbol{A}^6 t^6}{6!} + - \ldots. \tag{4c}$$

A t skalár szerint differenciálva e hatványsorokat, azt találjuk, hogy ezek rendre kielégítik az

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}, \quad \ddot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{R} = 0, \quad \ddot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{R} = 0 \tag{5a – c}$$

tenzor-differenciálegyenleteket, vagyis az $\dot{r} = ar$, $\ddot{r} + a^2 r = 0$, $\ddot{r} + a^2 r = 0$, skalár-differenciálegyenletek analógonjait; a (4a—c) függvények tehát rendre az (5a—c) differenciálegyenletek partikuláris megoldásai.

2'. A hatványsorral definiált, vagyis

$$\boldsymbol{R}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \boldsymbol{A}^k t^k$$

alakú tenzorfüggvények — bizonyos feltételek mellett — polinómra, vagyis

$$\boldsymbol{R}(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k \boldsymbol{A}^k t^k$$

alakra redukálhatók. Ezzel kapcsolatban közlünk egy-két fontos tételt,* célszerűen bevezetve az $\boldsymbol{A}\, t = [a_{ik}]\, t = \boldsymbol{B} = [b_{ik}]$ jelölést.

* Bővebben és általánosabban: *Lovass—Nagy* [M. 26.].

HAMILTON—CAYLEY-*tétel*. *Bármely* $B = [b_{lk}]$ *tenzor kielégíti a hozzá tartozó*

$$d(\lambda) = D(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda + d_0) = 0 \tag{6a}$$

alakú, ún. karakterisztikus egyenletet, azaz

$$d(B) = -(B^3 + d_2B^2 + d_1B + d_0I) = 0. \tag{6b}$$

Tétel. *Ha a* B *tenzorhoz tartozó karakterisztikus egyenlet* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *gyökei mind egyszeresek, továbbá az adott* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z_k$ *hatványsor konvergenciaköre e gyököket magába foglalja, akkor az* $f(B)$ *tenzorfüggvény előállítható ún.* LAGRANGE-*féle tenzorpolinómok lineáris kombinációjaként,* mégpedig

$$f(B) = \sum_{k=1}^{3} f(\lambda_k) L_k(B) = \sum_{k=1}^{3} f(\lambda_k) \frac{d(B)}{d'(\lambda_k)(B - \lambda_k I)} = f(\lambda_1) \frac{(B - \lambda_2 I)(B - \lambda_3 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} +$$

$$+ f(\lambda_2) \frac{(B - \lambda_1 I)(B - \lambda_3 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + f(\lambda_3) \frac{(B - \lambda_1 I)(B - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}$$

módon.

3′. Szemléltessük e tételeket pl. az

$$f(B) = e^B = e^{At}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \omega \times I$$

tenzorfüggvényen. Ekkor az (5a, b) szerint

$$d(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega_3 t & \omega_2 t \\ \omega_3 t & -\lambda & -\omega_1 t \\ -\omega_2 t & \omega_1 t & -\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda^3 + \omega^2 t^2 \lambda) = 0 \qquad (\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}),$$

$$d(B) = -(B^3 + \omega^2 t^2 B) = -t^3 (A^3 + \omega^2 A) = 0, \quad A^3 = -\omega^2 A,$$

következésképpen

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \frac{A^4 t^4}{4!} + \frac{A^5 t^5}{5!} + \frac{A^6 t^6}{6!} + \ldots =$$

$$= I + \frac{A}{\omega}\left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} - + \ldots\right) + \frac{A^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega^2 t^2}{2!} - \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \frac{\omega^6 t^6}{6!} - + \ldots\right) =$$

$$= I + A \frac{\sin \omega t}{\omega} + A^2 \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}.$$

Másrészt a (6) szerint, a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\, i\,\omega\, t$ gyökök felhasználásával

$$e^{At} = \frac{e^0}{-i^2\omega^2 t^2}\,[A^2 t^2 - At\,(i\,\omega\, t - i\,\omega\, t) - Ii^2\omega^2 t^2] +$$

$$+ \frac{e^{i\omega t}}{i\,\omega\, t\cdot 2\, i\,\omega\, t}\,[A^2 t^2 + i\,\omega\, t\cdot At^2] + \frac{e^{-i\omega t}}{i\,\omega\, t\cdot 2\, i\,\omega\, t}\,[A^2 t^2 - i\,\omega\, t\cdot At] =$$

$$= I + \frac{A}{\omega}\,\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} + \frac{A^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{e^{i\omega t} + e^{i\omega t}}{2}\right) =$$

$$= I + A\,\frac{\sin\omega\, t}{\omega} + A^2\,\frac{1 - \cos\omega t}{\omega^2},$$

megegyezésben az előbbi eredménnyel.

III°. Vektor-tenzoros differenciálegyenletek. 1'. Ismerkedjünk meg egy-két fontos, vektor-tenzoros differenciálegyenlet megoldásával, annál is inkább, mert messzemenő analógia áll fenn a megfelelő skalár differenciálegyenletek megoldásához képest.

Amint ismeretes, az

$$\dot{x} - ax = g(t), \quad x(0) = x_0 \tag{7a}$$

skalár differenciálegyenletet és kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás

$$x(t;\, x_0) = e^{at}\, x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}\, g(\tau)\, d\tau. \tag{7b}$$

A (7a, b)-vel teljes analógiában, az

$$\dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}(t), \quad \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0 \tag{8a}$$

alakú, vagyis *elsőrendű lineáris állandó együtthatójú inhomogén vektor-tenzoros differenciálegyenletet* és vektoros kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás

$$\boldsymbol{r}(t;\, \boldsymbol{r}_0) = e^{\mathbf{A}t}\,\boldsymbol{r}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\,\boldsymbol{g}(\tau)\, d\tau, \tag{8b}$$

amint ez egyszerű behelyettesítéssel igazolható.

Megjegyzendő, hogy a (8a) az

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} + a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z &= g_1(t)\\ \dot{y} + a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z &= g_2(t)\\ \dot{z} + a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z &= g_3(t) \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x(0) &= x_0\\ y(0) &= y_0\\ z(0) &= z_0 \end{aligned}\right\} \tag{8c}$$

skalár differenciálegyenlet- és kezdeti feltétel-rendszerrel egyenértékű.

2'. Ismeretes továbbá, hogy az

$$\ddot{x} + ax = g(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{9a}$$

skalár differenciálegyenletet és kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás

$$x(t;\, x_0, \dot{x}_0) = \cos\sqrt{a}\,t\cdot x + \frac{\sin\sqrt{a}\,t}{\sqrt{a}}\,\dot{x}_0 + \int_0^t \frac{\sin\sqrt{a}\,(t-\tau)}{\sqrt{a}}\, g(\tau)\, d\tau. \tag{9b}$$

A (9a, b)-vel teljes analógiában, az

$$\ddot{r} + A r = g(t), \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0 \tag{10a}$$

alakú, vagyis *hiányos másodrendű lineáris állandó együtthatójú inhomogén vektor-tenzoros differenciálegyenlet*et és vektoros kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás

$$r(t;\, r_0, \dot{r}_0) = \cos \sqrt{A}\, t \cdot r_0 + \frac{\sin \sqrt{A}\, t}{\sqrt{A}} \dot{r}_0 + \int_0 \frac{\sin \sqrt{A}\,(t-\tau)}{\sqrt{A}} g(\tau)\, d\tau, \tag{10b}$$

amint ez behelyettesítéssel igazolható. Egyébként az A tenzor négyzetgyökének szereplése — tekintettel a megfelelő hatványsorokra — csak látszólagos.

Megjegyzendő, hogy a (10a) az

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z &= g_1(t) \\ \ddot{y} + a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z &= g_2(t) \\ \ddot{z} + a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z &= g_3(t) \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ z(0) &= z_0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \\ \dot{y}(0) &= \dot{y}_0 \\ \dot{z}(0) &= \dot{z}_0 \end{aligned}\right\} \tag{10c}$$

skalár differenciálegyenlet- és kezdeti feltétel-rendszerrel egyenértékű.

3'. Szemléltessük a fentebbieket pl. a *fix tengely körül,* $\bar{\omega}$ *szögsebességgel forgó merev test*

$$\dot{r} = \bar{\omega} \times r = (\bar{\omega} \times I) r = A r, \quad r(0) = r_0$$

differenciálegyenletén és kezdeti feltételen.

A (8a, b) szerint a megoldás

$$r(t;\, r_0) = e^{At} r_0,$$

vagy — az e^{At} mátrix II° 3'-ben nyert polinóm-alakjának felhasználásával —

$$r(t;\, r_0) = \left[I + A \frac{\sin \omega t}{\omega} + A^2 \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \right] r_0.$$

IV°. T e n z o r - v e k t o r f ü g g v é n y e k (t e n z o r t e r e k) é s s a j á t s á g a i k. 1'. Legyen az R tenzorváltozó a p vektorváltozó függvénye; ekkor R mátrixos alakban

$$R(p) = \begin{bmatrix} r_{11}(p) & r_{12}(p) & r_{13}(p) \\ r_{21}(p) & r_{22}(p) & r_{23}(p) \\ r_{31}(p) & r_{32}(p) & r_{33}(p) \end{bmatrix} = [r_{ik}(p)] \tag{11a}$$

módon, diadikus alakban

$$R(p) = r_1(p) \circ e_1 + r_2(p) \circ e_2 + r_3(p) \circ e_3 = \sum_{i=1}^{3} r_i(p) \circ e_i \tag{11b}$$

módon állítható elő.

Ha p a tér pontjainak helyzetvektora, akkor az $R = R(p)$ tenzor-vektor függvény geometriailag ún. *tenzorter*et határoz meg. A műszaki alkalmazásokban előfordul pl. feszültségi, alakváltozási stb. tenzortér.

2'. A vektortér divergenciájának és rotációjának analógiájára szokás képezni a tenzortér két nevezetes deriváltalakzatát. E célból vegyünk fel a $\boldsymbol{p}_0$ helyzetvektorú pont körül egy tetszőleges (ΔV térfogatot körülvevő, ΔF felszínű, $\boldsymbol{n}$ egységnormálisú) zárt felületet. Vezessük be továbbá az $\boldsymbol{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})$ egységvektor $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p})$ affin képeként a

$$\boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{r}_2 \cos\beta + \boldsymbol{r}_3 \cos\gamma \tag{12a}$$

vektort, valamint az $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p})$ és $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p})$ vektoriális szorzataként — az a) $\alpha)$ III° (19a, b) szerint — képzett

$$\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}) = [v_{ik}] = [\boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{r}_k] \tag{12b}$$

tenzort.

3'. Ezek után *az $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p})$ tenzortér $\boldsymbol{p}_0$ helyi d i v e r g e n c i á-ját*

$$\mathbf{Div}_0\, \boldsymbol{R} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\oint_{\Delta F} \boldsymbol{R}\, d\boldsymbol{f} = \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} \boldsymbol{R}\, d\boldsymbol{f} = \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} (\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{n})\, df = \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} \boldsymbol{v}_n\, df \tag{13a}$$

módon értelmezzük, teljes analógiában a $\mathrm{div}_0\, \boldsymbol{v}$-nek a 3. §. b) $\alpha)$ II°-ben megismert definíciójával. Az ott alkalmazott megfontolásokkal *a* **Div** $\boldsymbol{R}$ *kifejezése az* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *koordináta-rendszerében*

$$\mathbf{Div}\, \boldsymbol{R} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial x_3} = \boldsymbol{e}_1 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r_{1i}}{\partial x_i} + \boldsymbol{e}_2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r_{2i}}{\partial x_i} + \boldsymbol{e}_3 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r_{3i}}{\partial x_i} \tag{13b}$$

alakban nyerhető. A **Div** $\boldsymbol{R}$ láthatóan vektor!

A 3. §. b) $\beta)$ II°-ben tanult meggondolásokkal vezethető le a (13a)-ból — az F zárt felület határolta V térrészre vonatkozólag — *a* GAUSS—OSZTROGRADSZKIJ-*féle tétel tenzoros analógonja,* nevezetesen

$$\iiint_{(V)} \mathbf{Div}\ \boldsymbol{R}\, dV = \oint\!\!\oint_{(F)} \boldsymbol{R}\, d\boldsymbol{F}. \tag{14}$$

4'. Továbbá, *az $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p})$ tenzortér $\boldsymbol{p}_0$ helyi r o t á c i ó-ját*

$$\mathbf{Rot}_0\, \boldsymbol{R} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\oint_{(\Delta F)} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{R} = \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{R} =$$

$$= \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{R})\, df = \frac{1}{d_0 V} \oint\!\!\oint_{(d_0 F)} \boldsymbol{V}_n\, df \tag{15a}$$

módon értelmezzük, teljes analógiában a $\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v}$-nek a 3. §. b) $\alpha)$ IV°-beli definíciójával. Az ottani megfontolásokkal *a* **Rot** $\boldsymbol{R}$ *kifejezése az* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *koordináta-rendszerében*

$$\mathbf{Rot}\, \boldsymbol{R} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial x_3}\right| \circ \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \boldsymbol{r}_3}{\partial x_1}\right) \circ \boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial x_2}\right) \circ \boldsymbol{e}_3 \tag{15b}$$

alakban nyerhető. A **Rot** $\boldsymbol{R}$ láthatóan tenzor!

A 3. §. b) β) III°-beli *tétel tenzoros analógonja* — az ottanihoz hasonló meggondolással —

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{Rot} \boldsymbol{R}\, dV = \oint\limits_{(F)} \boldsymbol{dF} \times \boldsymbol{R} \tag{16}$$

alakban adódik.

Megemlítjük végül a 3. §. b) β) III°-ban tanult $\mathbf{rot}_0\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ *és* STOKES-*tétel tenzoros analógonját*, nevezetesen

$$\operatorname{Rot}_0 \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{d_0 F} \oint\limits_{(d_0 G)} \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{dr}, \quad \iint\limits_{(F)} \operatorname{Rot} \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{dF} = \oint\limits_{(G)} \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{dr}. \tag{17, 18}$$

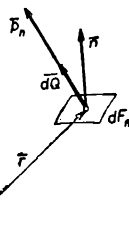
c) Műszaki alkalmazások

α) A rugalmasságtan alapegyenletei

1°. A feszültségről általában. 1'. A *rugalmasságtan* feladata az egyensúlyi külső erőrendszer hatása alatt álló rugalmas test feszültségállapotának és alakváltozásának, valamint a kettő kapcsolatának megállapítása.

Tájékozódjunk először a feszültségről általában! A test $\boldsymbol{r}$ helyzetvektorú pontjában, $\boldsymbol{n}$ normálisú dF_n felületelemen ébredő $\boldsymbol{p}_n$ *feszültség*en az ottani $\boldsymbol{dQ}$ erő és a $\boldsymbol{dF}_n$ hányadosát értjük, azaz (109. ábra)

$$\boldsymbol{p}_n = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta F_n} = \frac{\boldsymbol{dQ}}{dF_n} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}). \tag{1}$$



109. ábra

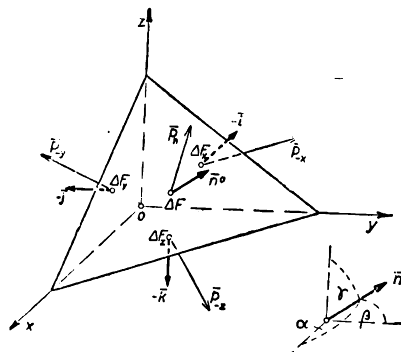
A feszültség tehát a helyzetvektoron kívül a felületelem normálvektorának is függvénye; a $\boldsymbol{p}_n$ jelölés indexe ez utóbbit jelzi.

Az *akció-reakció elve* értelmében

$$\boldsymbol{p}_{-n} = -\boldsymbol{p}_n. \tag{2}$$

2'. Vizsgáljuk egy $-\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{j}, -\boldsymbol{k}, +\boldsymbol{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ külső normálisú és ΔF_x, ΔF_y, ΔF_z, ΔF felszínű lapokkal határolt tetraéder egyensúlyát. Ekkor nyilván

$$\boldsymbol{p}_n \Delta F_n + \boldsymbol{p}_{-x} \Delta F_x + \boldsymbol{p}_{-y} \Delta F_y + \boldsymbol{p}_{-z} \Delta F_z + \boldsymbol{q}\, \Delta F \cdot \frac{\Delta h}{3} = 0,$$



110. ábra

ahol $\boldsymbol{q}$ a fajlagos térfogati (pl. súly-) erő, Δh pedig a tetraédernek ΔF alaplapra merőleges magassága (110. ábra). Ebből — a (2) formula és a

$$\Delta F_x = \Delta F \cos\alpha, \quad \Delta F_y = \Delta F \cos\beta,$$
$$\Delta F_z = \Delta F \cos\gamma$$

összefüggések felhasználásával $\Delta h \to 0$ határátmenet útján azt kapjuk, hogy az *elemi tetraéder* $\boldsymbol{n}$ normálisú lapján

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_x \cos\alpha + \boldsymbol{p}_y \cos\beta + \boldsymbol{p}_z \cos\gamma \tag{3a}$$

feszültség ébred. Ugyanaz koordinátás alakban — a normális komponenseket σ-val, a tangenciálisakat τ-val jelölve —

$$\left.\begin{aligned} p_{xn} &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\cos\beta + \tau_{xz}\cos\gamma \\ p_{yn} &= \tau_{yx}\cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{yx}\cos\gamma \\ p_{zn} &= \tau_{zx}\cos\alpha + \tau_{zy}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (3b)$$

módon írható. A $\boldsymbol{p}_n$ láthatóan az $\boldsymbol{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ vektor homogén lineáris vektorfüggvénye, s így — a 4. §. a) α) I° értelmében — felírható

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} \qquad (3c)$$

alakban is, ahol

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad (4)$$

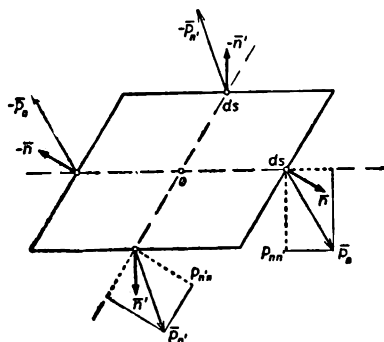
az ún. *feszültségtenzor*. E tenzor általában a hely függvénye. A test feszültségállapota teljesen meg van határozva, ha a $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ tenzortér ismeretes.

3'. A $\boldsymbol{p}_n$ feszültségvektor $\boldsymbol{n}'(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ irányú vetülete nyilván

$$p_{n'n} = \boldsymbol{p}_n\,\boldsymbol{n}' = p_{xn}\cos\alpha' + p_{yn}\cos\beta' + p_{zn}\cos\gamma',$$

ahol p_{xn}, p_{yn}, p_{zn} a (3b) szerint számítható; $\boldsymbol{n}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *irányú* vetülete pedig

$$p_{nn} = \sigma_n = \boldsymbol{p}_n\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma +$$
$$+ (\tau_{xy} + \tau_{yx})\cos\alpha\cos\beta + (\tau_{yz} + \tau_{zy})\cos\beta\cos\gamma + (\tau_{zx} + \tau_{xz})\cos\alpha\cos\gamma; \qquad (5a)$$



111. ábra

végül az $\boldsymbol{n}$ normálisú síkra való vetülete

$$p_{tn} = \tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}. \qquad (5b)$$

Írjuk fel a nyomatéki egyenletet egy dm magasságú, ds alapú, oldallapjain $\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{n}'$ normálisú *elemi rombikus hasáb* tengelyére. A működő két erőpár eredő nyomatéka

$$ds\,dm\,(p_{n'n}\,ds - p_{nn'}\,ds) = 0,$$

az egyensúlynak megfelelően (111. ábra). Ebből következik a

$$p_{n'n} = p_{nn'} \qquad (6a)$$

alakú ***reciprocitási tétel:*** *a* $\boldsymbol{p}_n$ *feszültség* $\boldsymbol{n}'$ *irányú vetülete megegyezik a* $\boldsymbol{p}'_n$ *feszültség* $\boldsymbol{n}$ *irányú vetületével.* A (3c) értelmében ez azt jelenti, hogy

$$\boldsymbol{n}'\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}', \qquad (6b)$$

tehát *a* $\boldsymbol{P}$ *feszültségtenzor* *s z i m m e t r i k u s*, azaz

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \qquad (6c)$$

Eszerint a nyírófeszültség két indexének sorrendje közömbös.

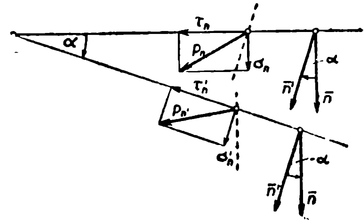
4′. *A σ_n normális feszültségkomponens α szög szerinti deriváltja* — az

$$\boldsymbol{n}^2 = 1, \quad 2\boldsymbol{n}\frac{d\boldsymbol{n}}{d\alpha} = 2\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{t} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{d\alpha}\boldsymbol{P}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\frac{d\boldsymbol{n}}{d\alpha} = \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}$$

összefüggések figyelembevételével (112. ábra) — a

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}) = 2\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{P}\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{p}_n = 2\tau_n \quad (7)$$

alakot ölti.



112. ábra

II° A feszültségtenzor sajátértékei. A (sztatikai) egyensúlyi egyenlet. 1′. Tárgyaljuk a szimmetrikus $\boldsymbol{P}$ feszültségtenzorral kapcsolatos sajátérték-feladatot.

A 4. §. a) γ) I°-ben megismert ***főtengely-tétel*** értelmében *a $\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}$ feszültségek között (3 dimenzióban) van legalább 3 egymásra merőleges $\boldsymbol{p}_i$ ún. főfeszültségvektor, amely párhuzamos a hozzá tartozó $\boldsymbol{n}_i$ ún. főirány-nyal, vagyis előállítható az $\boldsymbol{n}_i$ és a σ_i ún. főfeszültség szorzataként,*

$$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}_i = \sigma_i\,\boldsymbol{n}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (8)$$

módon. Ezek szerint *a $\boldsymbol{p}_i$ főfeszültség-vektoroknak nincs tangenciális komponensük,* azaz

$$\tau_i = \boldsymbol{t}_i\,\boldsymbol{p}_i = \frac{d\boldsymbol{n}_i}{d\alpha}\sigma_i\,\boldsymbol{n}_i = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\alpha}(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n})\right]_i = 0.$$

E tény — a (7) formula értelmében — egyszersmind a $\sigma_n = \boldsymbol{n}\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}$ kvadratikus alak szélsőértékének (szükséges) feltétele.

A főirányok koordináta-rendszerében *a szimmetrikus $\boldsymbol{P}$ feszültségtenzor diadikus alakja*

$$\boldsymbol{P} = \sigma_1\,\boldsymbol{n}_1 \circ \boldsymbol{n}_1 + \sigma_2\,\boldsymbol{n}_2 \circ \boldsymbol{n}_2 + \sigma_3\,\boldsymbol{n}_3 \circ \boldsymbol{n}_3$$

módon, *a $\sigma_n = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}$ kvadratikus alak* pedig

$$\sigma_n = \sigma_1\cos^2\xi + \sigma_2\cos^2\eta + \sigma_3\cos^2\zeta \qquad (9)$$

módon írható.

2′. Ez utóbbi tiszta négyzetes alakból kitűnik, hogy az $\boldsymbol{n}_i$ főirányok és a σ_i főfeszültségek — az utóbbiak $\sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \sigma_3$ szerinti indexelése esetén — a $\sigma_n = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}$ kvadratikus alakra vonatkozó alábbi *kötött szélsőérték-feladatok* megoldásai:*

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \min \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}_1, && \text{ha } \boldsymbol{n}^2 = 1; \\ \sigma_2 &= \min \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}_2, && \text{ha } \boldsymbol{n}^2 = 1 \text{ és } \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1 = 0; \\ \sigma_3 &= \min \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_3\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}_3, && \text{ha } \boldsymbol{n}^2 = 1 \text{ és } \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

* Megjegyzendő, hogy a főfeszültségeket számos szerző

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

módon indexeli.

A főfeszültségek és főirányok tényleges meghatározása a (8)-cal egyértékű

$$(\boldsymbol{P} - \sigma_i \boldsymbol{I})\, \boldsymbol{n}_i = 0 \tag{11a}$$

vektoregyenlet, illetve a neki megfelelő

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)\cos\xi_i + \tau_{xy}\cos\eta_i + \tau_{xz}\cos\zeta_i &= 0,\\ \tau_{yx}\cos\xi_i + (\sigma_y - \sigma_i)\cos\eta_i + \tau_{yz}\cos\zeta_i &= 0,\\ \tau_{zx}\cos\xi_i + \tau_{zy}\cos\eta_i + (\sigma_z - \sigma_i)\cos\zeta_i &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11b}$$

skalár *egyenletrendszer* megoldását igényli. Ennek nincs triviális megoldása, azaz $\cos\xi_i$, $\cos\eta_i$, $\cos\zeta_i$ nem lehet egyidejűleg zérus, mert $\cos^2\xi_i + \cos^2\eta_i + \cos^2\zeta_i = 1$; kell tehát, hogy az egyenletrendszer *determinánsa* zérus legyen, azaz

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{12a}$$

Ez — kifejtve és rendezve — a

$$-(\sigma^3 - p_{\mathrm{I}}\sigma^2 + p_{\mathrm{II}}\sigma - p_{\mathrm{III}}) = 0 \tag{12b}$$

*karakterisztikus egyenlet*re vezet, ahol

$$\left.\begin{aligned} p_{\mathrm{I}} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,\\ p_{\mathrm{II}} &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1,\\ p_{\mathrm{III}} &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3; \end{aligned}\right\} \tag{12c}$$

ezek éppen a $\boldsymbol{P}$ tenzor skalár-invariánsai. A (12b) egyenlet gyökei szolgáltatják a keresett σ_i *főfeszültségeket*, ezek figyelembevételével a (11b) egyenletrendszer megoldásai pedig az $\boldsymbol{n}_i$ ($\cos\xi_i$, $\cos\eta_i$, $\cos\zeta_i$) *főirányokat*.

Ha speciálisan σ_1 $(= \min\sigma_n) = \sigma_3$ $(= \max\sigma_n)$, akkor nyilván $\sigma_n = \text{const}$, s a (7) értelmében

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 2\tau \equiv 0.$$

Eszerint bármely irányhoz tartozó nyírófeszültség zérus, tehát *minden irány főirány.* Ezt hidrosztatikus feszültségállapotnak nevezzük.

3′. Térjünk ki röviden a feszültségállapot szemléltetésére. A 4. §. a) γ) II°-ben tanultak szerint *a* $\boldsymbol{P}$ *feszültségtenzor indikátrixa* az

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{P}\boldsymbol{r} = \pm 1 \tag{14a}$$

egyenletű valós másodrendű felületek együttese. Esetünkben (az $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|\,\boldsymbol{n} = r\boldsymbol{n}$ jelöléssel) $\sigma_n = \boldsymbol{n}\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}$, tehát a (14a) egyenlet $r^2\sigma_n = \pm 1$ alakba, vagy – az abszolút értékre áttérve —

$$r^2\,|\sigma_n| = 1, \quad \text{azaz} \quad r = 1/\sqrt{|\sigma_n|} \tag{14b}$$

alakba írható át. Eszerint a $\boldsymbol{P}$ feszültségtenzor indikátrixának $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{n}$ *helyzetvektorai* $r = 1/\sqrt{|\sigma_n|}$ *hosszúak.*

Tekintsük most *a P feszültségtenzor*

$$\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{P}^{-2}\,\boldsymbol{r} = 1 \qquad (15a)$$

egyenletű *mértékalakzatát*. Esetünkben (az előbbi jelöléssel) $\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{p}_n$; következésképpen

$$\boldsymbol{p}_n\,\boldsymbol{P}^{-2}\,\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_n\,\boldsymbol{P}^{-1}\,(\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{p}_n\,\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{p}_n) = \boldsymbol{n}^2 = 1, \qquad (15b)$$

mert $\boldsymbol{P}$ és így $\boldsymbol{P}^{-1}$ is szimmetrikus; ugyanez koordinátás alakban (a főirányok koordináta-rendszerében)

$$\frac{p_{\xi n}^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_{\eta n}^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_{\zeta n}^2}{\sigma_3^2} = 1, \qquad (15c)$$

mert a $\boldsymbol{P}^{-2}$ sajátértékei σ_i^{-2} alakúak. Eszerint a *P* feszültségtenzor mértékalakzatának $\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{n}$ *helyzetvektorai éppen a* $\boldsymbol{p}_n$ *feszültségvektorokkal azonosak.*

Vizsgáljuk meg most *a pl.* $\boldsymbol{n}_1$ *és* $\boldsymbol{n}_3$ *főirányok síkjába eső* $\boldsymbol{n}$ $(\cos\xi, 0, \cos\zeta)$ *normálisokhoz tartozó* $\boldsymbol{p}_n$ *feszültségvektorokat*. A főirányok koordináta-rendszerében a (3a) formula

$$\boldsymbol{p}_n = \sigma_1\,\boldsymbol{n}_1 \cos\xi + \sigma_2\,\boldsymbol{n}_2 \cos\eta + \sigma_3\,\boldsymbol{n}_3 \cos\zeta$$

alakra egyszerűsödik, ahol most $\cos\eta = 0$. Írható tehát ($\cos\zeta = \sin\xi$ lévén), hogy

$$p_n^2 = \boldsymbol{p}_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2\xi + \sigma_3 \sin^2\xi,$$

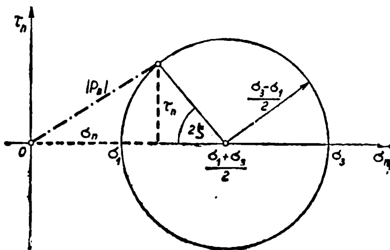
továbbá

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{p}_n = \sigma_1 \cos^2\xi + \sigma_3 \sin^2\xi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\cos 2\xi, \\ \tau_n &= \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{p}_n = (\sigma_3 - \sigma_1)\sin\xi\cos\xi = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\sin 2\xi, \end{aligned}\right\} \qquad (16a)$$

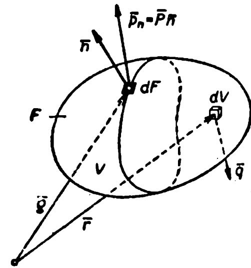
és természetesen $p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$. A (16a) az

$$R = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \qquad C\left|\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right| \qquad (16b)$$

sugarú, illetve középpontú ún. MOHR-*féle feszültségi kör* ξ paraméteres egyenletrendszere (113. ábra).



113. ábra



114. ábra

4'. Vizsgáljuk most a $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ fajlagos *térfogati erő* és a $\boldsymbol{p}_n(\bar{\varrho}) = \boldsymbol{P}(\bar{\varrho})\,\boldsymbol{n}(\bar{\varrho})$ fajlagos *külső terhelés* hatása alatt nyugalomban levő tetszőleges (V térfogatú és F felszínű) testrész *egyensúlyát* (114. ábra). Ekkor az eredő erő zérussal egyenlő, azaz

$$\iiint\limits_{(V)} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\,dV - \oint\limits_{(F)} \boldsymbol{P}(\bar{\varrho})\,d\boldsymbol{F} = 0, \qquad (17)$$

az eredő nyomaték szintén, azaz

$$\iiint_{(V)} [\boldsymbol{r}\times \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})]\, dV - \oint_{(F)} [\bar{\varrho}\times \boldsymbol{P}(\bar{\varrho})]\, \boldsymbol{dF} = 0, \tag{18}$$

ahol a $\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{n}\,(\bar{\varrho})\, dF$ felületelem-vektor a testből kifelé mutat.

A (17)-ből — a GAUSS-tétel tenzoros analogonjának [l. a b) β) IV°-ben] alkalmazásával — nyerjük, hogy

$$\iiint_{(V)} [\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{Div}\, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})]\, dV = 0.$$

Minthogy ez a test bármely V térfogatú részére igaz, kell, hogy az integrálandó azonosan zérus legyen; vagyis

$$\boxed{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{Div}\, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = 0,} \tag{19a}$$

koordinátás alakban pedig

$$\left.\begin{aligned} q_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ q_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ q_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{19b}$$

Ez a feszültségi állapotban nyugvó test tetszőleges pontjára érvényes ***(statikai) egyensúlyi egyenlet,*** illetve -rendszer.

A (18)-ból — hasonló átalakítással — a már ismert *reciprocitási tétel* adódik, mely szerint

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*, \quad \text{tehát} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \tag{20}$$

Ha a test az említett erők hatása alatt $\ddot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}, t)$ gyorsulással* mozog, akkor *(dinamikai) egyensúlyi egyenlete* nyilván

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{Div}\, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) - \varrho(\boldsymbol{r})\, \ddot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{21}$$

alakot ölt, ahol $\varrho(\boldsymbol{r})$ a test sűrűsége.

A feszültségi állapot meghatározása a (19a) és a (20) alapján (3 egyenlet, 6 ismeretlennel) nem lehetséges, más szóval a feladat *statikailag határozatlan.*

*A hiányzó egyenletek pótlásár*a az alábbiakban megszerkesztjük az alakváltozási (geometriai) egyenleteket (6 egyenlet, 9 újabb ismeretlennel), majd a rugalmassági (fizikai) egyenleteket (6 egyenlet, újabb ismeretlen nélkül).

Az így előállítandó egyenletrendszer (15 egyenlet, 15 ismeretlennel) — alkalmas határfeltételek mellett — egyértelműen** megoldható lesz.

* Itt $\bar{v}$ elmozdulást, $\dot{\bar{v}}$ sebességet jelent.
** L. bővebben *Bezuhov*[T. 19.].

Egyik ilyen *határfeltétel* a már ismert (s a test felületére felírandó)

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_x \cos\alpha + \boldsymbol{p}_y \cos\beta + \boldsymbol{p}_z \cos\gamma \tag{22}$$

egyenlet. További ilyen feltételek adódnak majd az alakváltozások (hossz- és szögváltozások) folytonosságából.

III°. Az alakváltozások. Geometriai egyenletek. 1'. A feszültségi állapotban levő test $\boldsymbol{r}$ pontjainak $\boldsymbol{v}$ *elmozdulása* valamilyen

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{23a}$$

vektorfüggvénnyel, vagy a vele egyenértékű

$$u = u\,(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z) \tag{23b}$$

skalár függvényrendszerrel jellemezhető. Legyen e $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ függvény *differenciálható;* ekkor a $\boldsymbol{r}$ helyzetvektor és a $\boldsymbol{v}$ elmozdulásvektor egymásnak megfelelő $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{dr}$, illetve $\Delta\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{dv}$ elenyészően *kis növekményei* közt — ismeretesen — a

$$\boldsymbol{dv} = \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r})\, \boldsymbol{dr} \tag{24a}$$

homogén lineáris kapcsolat áll fenn, ahol — a 3. §. a) β) II°-vel összhangban —

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{\nabla} \tag{24b}$$

az ún. *deriválttenzor.*

A $\boldsymbol{D}$ deriválttenzor — a b) α) (6) értelmében — előállítható

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^*) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^*) = \boldsymbol{D}_s + \boldsymbol{D}_a = \tag{24c}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

alakban.

2'. A b) α) (12a, b) értelmében

$$1 \gg \frac{|\boldsymbol{dv}_i|}{|\boldsymbol{dr}|} \geqq \operatorname{arc\,tg} \frac{|\boldsymbol{dv}_i|}{|\boldsymbol{dr}_i|} = \max \gamma_i$$

esetén, vagyis *kis deformációt* feltételezve, az $\boldsymbol{n}_i$ irányú relatív megnyúlás és az $(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_k)$ síkkal párhuzamos szögváltozás jó közelítéssel

$$\varepsilon_i = \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{n}_i, \quad \text{illetve} \quad \gamma_{ik} = 2\boldsymbol{n}_i \boldsymbol{D}_s \boldsymbol{n}_k.^*$$

Ezek szerint koordináta-tengelyekkel, illetve -síkokkal párhuzamosan vett

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \quad \text{illetve} \quad \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx} \tag{25a}$$

ún. *alakváltozási komponensek* éppen a $\boldsymbol{D}_s$ szimmetrikus tenzor elemeivel egyenlők, nevezetesen:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{25b}$$

Ezek az ún. ***alakváltozási (geometriai) egyenletek.***

Ezek figyelembevételével a $\boldsymbol{D}_s = \boldsymbol{S}$ szimmetrikus tenzor a

$$\boldsymbol{D}_s = \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{25c}$$

alakra írható át; ez az ún. *alakváltozási tenzor.*

3′. E tenzorral kapcsolatos

$$(\boldsymbol{S} - \varepsilon_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{n}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{26}$$

sajátérték-feladat megoldása azon $\boldsymbol{n}_i$ (alakváltozási) *főirányok*at szolgáltatja, amelyek mentén ε_i relatív mértékű nyúlás-zsugorodás van, de a rájuk merőleges síkban szögváltozás nincs, azaz $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$.

A *relatív térfogattorzulás* — az alakváltozási főirányok rendszerében dolgozva, a kis deformációval kapcsolatos $1 \gg |\boldsymbol{dv}_i| / |\boldsymbol{dr}_i| = \varepsilon_i$ körülmény figyelembevételével —

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{|\boldsymbol{dr}_1 + \boldsymbol{dv}_1||\boldsymbol{dr}_2 + \boldsymbol{dv}_2||\boldsymbol{dr}_3 + \boldsymbol{dv}_3| - dr_1\, dr_2\, dr_3}{dr_1\, dr_2\, dr_3} = \\ &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = s_I = \operatorname{div} \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{27}$$

közelítő formulával jellemezhető.

Speciálisan *izotróp dilatáció,* ún. tágulás esetén

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon \ (\text{és} \ \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0), \ \text{tehát} \\ \boldsymbol{S}_i = \varepsilon \boldsymbol{I}, \quad \varkappa_i = s_{Ii} = 3\varepsilon. \end{gathered} \tag{28}$$

* **Itt $\boldsymbol{n}_i$, $\boldsymbol{n}_k$ nem főirányokat jelöl!**

4'. A teljes alakváltozás felbontható *tiszta térfogatváltozás*ra (izotróp dilatációra) és *tiszta alakváltozás*ra (térfogatváltozás nélkül), azaz tenzora előállítható

$$\boldsymbol{S} = \varepsilon \boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}' \tag{29a}$$

módon, ahol az első skalár invariáns

$$s_\text{I} = \varkappa = 3\,\varepsilon + 0 = 3\,\varepsilon = \operatorname{div} \boldsymbol{v} \tag{29b}$$

alakú. Eszerint a tiszta alakváltozás $\boldsymbol{S}'$ tenzora

$$\boldsymbol{S}' = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = \frac{s_\text{I}}{3} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

mátrixú; e tenzort *deviátor*nak is nevezik.

5'. Végül szóljunk a (24c) alatt említett $\boldsymbol{D}_a$ *antimetrikus tenzor*ról! Ez —a b) α) II° értelmében — előállítható

$$\boldsymbol{D}_a = \bar{\omega} \times \boldsymbol{I}, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = \frac{1}{2}\,\textbf{rot}\,\boldsymbol{v} \tag{30}$$

alakban. A $\boldsymbol{D}_a$ ily módon a (lokális) *merevtestszerű forgás*t határozza meg, s az alakváltozásra nincs befolyással.

IV°. A r u g a l m a s s á g t ö r v é n y e. F i z i k a i e g y e n l e t e k. 1'. A $\boldsymbol{P}$ feszültségi és a $\boldsymbol{D}_s = \boldsymbol{S}$ alakváltozási tenzor nem független egymástól, mert a $\boldsymbol{S} = f(\boldsymbol{P})$ alakú fizikai egyenlet összefüggést létesít közöttük.

A rugalmasságtanban ezen kapcsolat a Hooke-*féle törvény* néven ismeretes,

$$\boldsymbol{S} = \mathfrak{C}\,\boldsymbol{P} \tag{31a}$$

alakú *lineáris* tenzor-tenzor függvény, ahol a $\mathfrak{C}$ tényező 6 dimenziós (azaz $6 \cdot 6 = 36$ skalár komponensű) és — kimutathatóan — szimmetrikus tenzor.

2'. A gyakorlatban használt rugalmas anyagokat *izotróp*nak tekintjük. Ennek megfelelően egyrészt az $\boldsymbol{S}$ és $\boldsymbol{P}$ főirányai azonosak, másrészt az egyes főfeszültségnek megfelelő alakváltozások egymásra szuperponálhatók. Ha pl. $\sigma_1 \neq 0$, de $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, akkor a fő alakváltozások

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\sigma_1}{mE}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\sigma_1}{mE},$$

ahol E a rugalmassági modulus, m a Poisson-féle állandó, az előjelváltás pedig a hosszanti és keresztirányú alakváltozások ellentétes értelmével indokolandó.

Ha viszont σ_1, σ_2, σ_3 egyaránt hat, akkor a *fő alakváltozások* — szuperpozícióval —

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{mE} - \frac{\sigma_3}{mE} = \frac{1}{mE}[(m+1)\sigma_1 - (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)],\\ \varepsilon_2 &= -\frac{\sigma_1}{mE} + \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_3}{mE} = \frac{1}{mE}[(m+1)\sigma_2 - (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)],\\ \varepsilon_3 &= -\frac{\sigma_1}{mE} - \frac{\sigma_2}{mE} + \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{mE}[(m+1)\sigma_3 - (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)],\end{aligned}\right\} \tag{31b}$$

alakot öltenek, és természetesen $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$. E skalár egyenletrendszer a ***fizikai egyenlet*** néven ismeretes

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{1}{mE}[(m+1)\boldsymbol{P} - p_I \boldsymbol{I}]} \tag{31c}$$

tenzoregyenlettel egyenértékű. Megjegyzendő, hogy az alakváltozások az x, y, z derékszögű koordináta-rendszerben

$$\varepsilon_x = \frac{1}{mE}[(m+1)\sigma_x - (\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)], \dots, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{m+1}{mE}\tau_{xy}, \dots \tag{31d}$$

alakúak. Szokás továbbá bevezetni a csúsztató rugalmassági modulust, mégpedig

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{mE}{2(m+1)} \tag{32}$$

módon.

3'. A feszültségi tenzor — az alakváltozási tenzor mintájára — ugyancsak előállítható *izotróp húzási* (nyomási) és *tiszta nyírási* komponens összegeként, vagyis

$$\boldsymbol{P} = \sigma\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P}' = \begin{bmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & \sigma\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma\end{bmatrix} \tag{33a}$$

alakban, ahol

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{p_I}{3}, \tag{33b}$$

és a $\boldsymbol{P}'$ tenzor deviátor.

4'. A (31c) — a (29a, b, c), (32) és (33a, b) figyelembevételével — átírható

$$\frac{s_I}{3}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}' = \frac{m+1}{mE}\left(\frac{p_I}{3}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P}'\right) - \frac{p_I}{mE}\boldsymbol{I} \tag{34a}$$

alakra; ebből az első skalár invariánsok, illetve a deviátorok

$$p_I = 3Ks_I, \quad \text{illetve} \quad \boldsymbol{P}' = 2G\,\boldsymbol{S}' \tag{34b}$$

összefüggése nyerhető, ahol

$$K = \frac{\sigma}{3\varepsilon} = \frac{p_I}{3s_I} = \frac{mE}{3(m-2)} \tag{35}$$

az ún. összenyomódási modulus.

A (31c)-t a $\boldsymbol{P}$-re megoldva, a (32), (34b) és (35) figyelembevételével a

$$\boldsymbol{P} = 2G\left(\boldsymbol{S} + \frac{s_I}{m-2}\boldsymbol{I}\right) \tag{36a}$$

alakú, vagy a

$$\mu = G, \quad \lambda = \frac{2G}{m-2} = \frac{2\,mE}{(m-2)\,(m+1)} \tag{37}$$

LAMÉ-féle állandók bevezetésével a szintén ***fizikai egyenlet***nek nevezett

$$\boxed{\boldsymbol{P} = 2\mu\,\boldsymbol{S} + \lambda\, s_I\, \boldsymbol{I}} \tag{36b}$$

alakú tenzoregyenletre jutunk. Ez utóbbi egyenértékű — az x, y, z koordináta-rendszerben — a

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu\,\varepsilon_x + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), & \tau_{xy} &= \mu\,\gamma_{xy}, \\ \sigma_x &= 2\mu\,\varepsilon_y + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), & \tau_{yz} &= \mu\,\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2\mu\,\varepsilon_z + \lambda\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), & \tau_{zx} &= \mu\,\gamma_{zx}, \end{aligned}\right\} \tag{36c}$$

skalár egyenletrendszerrel.

V°. A rugalmasságtan alapegyenlete. 1'. Írjuk fel mégegyszer az előzőkben nyert három jellegzetes egyenletet!

Egyensúlyi (dinamikai) egyenlet:

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{q} = \varrho\,\ddot{\boldsymbol{v}}. \tag{38a}$$

Alakváltozási (geometriai) egyenlet:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left[\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}} + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)^*\right]. \tag{38b}$$

Rugalmassági (fizikai) egyenlet:

$$\boldsymbol{P} = 2\mu\,\boldsymbol{S} + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{I}. \tag{38c}$$

Egy vektor- és két (szimmetrikus) tenzoregyenletünk van tehát, amely $3 + 6 + + 6 = 15$ skaláregyenlettel egyenértékű. Ugyancsak 15 a skalár *ismeretlenek* száma, nevezetesen

$$\left.\begin{matrix} \sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z, \ \tau_{xy}, \ \tau_{yz}, \ \tau_{zx}; \\ u, \ v, \ w; \\ \varepsilon_x, \ \varepsilon_y, \ \varepsilon_z, \ \gamma_{xy}, \ \gamma_{yz}, \ \gamma_{xz}. \end{matrix}\right\} \tag{38d}$$

Ily módon egyenletrendszerünk (általánosan) *megoldható,* mégpedig közvetlenül az összes ismeretlenekre.

A kívánt (partikuláris) megoldásnak egyértelműen* ki kell elégítenie a rugalmas test felületére vonatkozó

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}_x \cos\alpha + \boldsymbol{p}_y \cos\beta + \boldsymbol{p}_y \cos\gamma \tag{38e}$$

*határfeltételt.***

2'. Egyesítsük a (38a, b, c) egyenleteket oly módon, hogy a (38a)-ba helyettesítsük be a $\boldsymbol{P}$-nek (38c) kifejezését, ez utóbbiban az $\boldsymbol{S}$-nek (38b) alakját alkalmazva. Így nyerjük, hogy

$$\mathrm{Div}\left\{\mu\left[\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}} + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)^*\right] + \lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{I}\right\} + \boldsymbol{q} = \varrho\,\ddot{\boldsymbol{v}}; \tag{39a}$$

e vektoregyenlet első skalár komponens-egyenlete

$$\mu\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + q_x =$$

$$= \mu\,\Delta u + (\mu + \lambda)\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + q_x = \varrho\,\ddot{u} \tag{39b}$$

alakú. Végeredményben a ***rugalmasságtan alapegyenlete*** (LAMÉ) így írható:

$$\boxed{\mu\,\Delta\boldsymbol{v} + (\mu + \lambda)\,\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q} = \varrho\,\ddot{\boldsymbol{v}}.} \tag{39c}$$

E vektoregyenlet 3 skalár-egyenlettel egyenértékű. Ugyancsak 3 a skalár ismeretlenek száma, mégpedig az u, v, w elmozdulás-komponens. Ily módon az alapegyenlet általánosan megoldható, mégpedig közvetlenül a 3 elmozdulás-komponensre *(mozgásmódszer)*, közvetve — a (38b, c) igénybevételével — pedig a többi 12 ismeretlenre is.

A kívánt (partikuláris) megoldásnak egyértelműen ki kell elégítenie a rugalmas test felületére vonatkozó

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{n} = \mu\left[\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}} + \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{r}}\right)^*\right]\boldsymbol{n} + \lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \tag{39d}$$

határfeltételt.

d) Szemináriumi tárgykörök

α) A (másodrendű) tenzorok algebrája és analízise

1°. Tenzoralgebra (kiegészítés). Egészítsük ki és mélyítsük el az a) részben tanultakat, különös tekintettel a tenzor diadikus előállítására, invariánsaira, a főtengelytételre és alkalmazásaira stb. Tanulmányozzuk továbbá a másodrendű alakzatok (kúpszeletek, másodrendű felületek) tenzoros tárgyalásmódját, kiterjedve az acentrikus alakzatokra is, végül a forgások kifejezését (verzor) és összetételét stb.

Ajánlott irodalom: SZENTMÁRTONY (M. 4.) IV. — Кочин (M. 8.) III. 22—27. §. — LOVASS—NAGY (M. 26.) 1—3. §-ból. — LAGALLY (M. 7.) IV.-ből. — SPIELREIN (M. 9.) III. 2. — Рашевский (M. 22.) I. 1—9. §. — Кильчевский (M. 19.) II. A.

* L. bővebben: *Bezuhov* [T. 19.].

** Az ún. *erőmódszer* esetén még a (38b)-ből következő, ún. *összeférhetőségi egyenletek* is figyelembe veendők. L. *Bezuhov* [T. 19.].

II°. Tenzoranalízis (kiegészítés). Egészítsük ki és mélyítsük el a b) részben tanultakat, főleg a deriválttenzorral kapcsolatban.

Tanulmányozandó továbbá: Tenzor-skalár függvény deriváltja, hatványsora, differenciálegyenlete. Integráltételek stb.

Ajánlott irodalom: Кочин (M. 8.) III. 28—29. §. — SPIELREIN (M. 9.) III. 3. — Рашевский (M. 22.) I. 10—12., 16—18. §.

β) A tenzorszámítás mechanikai alkalmazásai

I°. A rugalmasságtan alapegyenletei (kiegészítés). Egészítsük ki és mélyítsük el a c) α)-ban tanultakat, különös tekintettel az alakváltozási viszonyokra (pl. tiszta alakváltozás, főnyúlások, nyúlási felületek, összeférhetőségi feltételek stb.), a rugalmassági viszonyokra (pl. HOOKE-törvény, alakváltozási munka, rugalmas potenciál, rugalmas test elmozdulási egyenlete stb.). Érintsük a főbb törési (redukált feszültségi) elméleteket, pl. DE SAINT — VENANT, MOHR — GUEST, HUBER — MISES stb. elméletet. Végül alkalmazzuk a fentieket konkrét esetekre, pl. a tiszta hajlítás esetére.

Ajánlott irodalom: REUSS (T. 3.) I—IV.-ből. — BEZUHOV (T. 19.) I—IV.-ből. — Кочин (M. 8.) III.-ból. —LAGALLY (M. 7.) V. 2—4. §. — Рашевский (M. 22.) I. 13—15., 20. §.

II°. Tehetetlenségi tenzor és a pörgettyűmozgás. Tárgyaljuk a következő kérdéseket: Merev test mozgása. Tehetetlenségi nyomaték és tenzor. Centrifugális nyomatékok. A STEINER-tétel általánosítása. Tehetetlenségi és perdületellipszoid. Síkbeli viszonyok: Erőmentes pörgettyű. A pörgettyűmozgás alapegyenlete. A centrifugális erő nyomatéka. EULER-egyenletek. Az EULER-szögek bevezetése. Tehetetlenségi tenzor, főtehetetlenségi tengelyek.

Ajánlott irodalom: REUSS (T. 3.) 44—61. o. — LAGALLY (M. 7.) V. 1. §. — Кочин (M. 8.) III. 24. §-ból.

III°. Súrlódó folyadékok hidrodinamikája. Tárgyaljuk a következő kérdéseket: Súrlódási tenzor. NAVIER — STOKES egyenletek. Disszipációs munka. Réteges áramlás. Gömb mozgása súrlódó folyadékban. Olaj áramlása csapágyban. Kisminta-törvény.

Ajánlott irodalom: GRUBER — BLAHÓ (T. 5.) 119—148. o. — BUDÓ (T. 1.) IV. 84—87. §. — Рашевский (M. 22.) I. 19. §.

γ) Vektor- és tenzorszámítás általános terekben

I°. *n* méretű terek. Tanulmányozandó témakörök: Az *n* méretű affin tér. Az *n* méretű euklidesi tér. A MINKOVSZKIJ tér. A speciális relativitástan egyes kérdései. Görbe vonalú koordináták affin és euklidesi terekben.

Ajánlott irodalom: OLLENDORF (M. 10.) VI. — Рашевский (M. 22.) II—VI. — NOVOBÁTZKY (T. 17.).

II°. A RIEMANN-tér. Tanulmányozandó témakörök: A RIEMANN-geometria eszméje. Vektorok és tenzorok. Abszolút differenciálás, differenciál-invariánsok. Geodétikus vonalak. Görbületi tenzor. Az általános relativitástan egyes kérdései.

Ajánlott irodalom: OLLENDORF (M. 10.) VII. — Рашевский (M. 22.) VII—X. — NOVOBÁTZKY (T. 17.) — Кочин (M. 8.) IV. — LAGALLY (M. 7.) VII.

III°. A HILBERT-tér. Tanulmányozandó témakörök: Komplex komponensű vektorok. Lineáris operátorok. Operátorfüggvények. Projektorok. Verzorok. Komplex számok, mint operátorok. Integrálegyenlet-vonatkozások. Egyes elektrotechnikai, rezgéstani, atommechanikai stb. alkalmazások.

Ajánlott irodalom: OLLENDORF (M. 10.) VIII. — LAGALLY (M. 7.) VIII.

Függelék

5. §. Általános tenzorelmélet (TENZOROK AZ E_n- ÉS AZ R_n-TÉRBEN)

a) A vektor és a tenzor általános fogalma

α) **A Riemann-tér (R_2 és R_n) és metrikája**

I°. B e v e z e t é s. 1'. Könyvünk előző §-ában megismerkedtünk az egyenesvonalú derékszögű koordinátarendszerrel ellátott *háromdimenziós euklidesi térben* (az E_3-ban) értelmezett ún. *közönséges tenzor* fogalmával, algebrájával, analízisével és rugalmasságtani alkalmazásukkal, mégpedig a közönséges vektorok (irányított egyenesdarabok, ill. rendezett koordinátahármasuk) ún. affin transzformációjával kapcsolatban.

A jelen §-ban a tenzorfogalom s vele együtt a tenzoralgebra és -analízis messzemenő *általánosítására* kerül sor. Először a paramétervonalaival mint görbe vonalú koordinátavonalakkal behálózott felületre, az ún. *kétdimenziós* Riemann-*térre* (az R_2-re) terjesztjük ki a tenzorelméletet, majd formális analógiával a görbült, *n-dimenziós* Riemann-*térre* (az (R_n-re) is, mégpedig általános transzformációkkal kapcsolatban. Az utóbbi általánosítás — speciális esetként — magába foglalja az egyenes vonalú derék-, vagy ferdeszögű koordinátás *n-dimenziós euklidesi térbeli* (az E_n-beli) tenzorelméletet.*

Hangsúlyozandó, hogy a szóban forgó általánosítás távolról sem öncélú. R_2- és R_3-térbeli vektorok és tenzorok gyakran szerepelnek pl. *héjelméleti, rugalmasságtani, mechanikai, fizikai* stb. *vizsgálatokban,* sőt a modern fizikában, pl. *relativitáselméletben* R_n-térbeliek is alkalmazást nyernek. E tény kellően megvilágítja az általános tenzorelmélet természettudományos jelentőségét.

Ezek után térjünk rá az R_2, majd az R_n tér bevezetésére!

II°. F e l ü l e t é s g ö r b é j e. 1'. Legyen értelmezve az u^1, u^2 paramétersík valamely (egyszeresen összefüggő, korlátos) B tartományában egy

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2) = \boldsymbol{i}x_1(u^1, u^2) + \boldsymbol{j}x_2(u^1, u^2) + \boldsymbol{k}x_3(u^1, u^2) \tag{1}$$

(valós, egyértékű) vektorfüggvény. Az így nyert összes $\boldsymbol{r} = \vec{OP}$ helyzetvektorok, ill. (x_1, x_2, x_3) derékszögű koordinátahármasok az E_3 euklidesi tér egy M ponthalmazát határozzák meg. Az $\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ függvény az M halmaz egy *paraméteres előállításának* nevezhető.

Az (1) függvényről feltesszük, hogy a B-ben *a)* változói szerint legalább egyszer folytonosan differenciálható (legalább ún. első osztályú), *b)* különböző $P \in M$ pontoknak különböző (u^1, u^2) értékpárok felelnek meg (kölcsönös egyértelműség), *c)*

* Hasznos előkészítés ehhez sorozatunk A. IX. kötetének második kiadásában a „Vektoralgebra az n-dimenziós lineáris és euklidesi térben" c. függelék.

$\boldsymbol{r}_1 \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1}$ és $\boldsymbol{r}_2 \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$ lineárisan független, azaz $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \neq \boldsymbol{0}$ (M pontja regulárisak). E féltételek teljesítése esetén az (1) az M ponthalmaz egy *megengedett paraméteres előállításának* nevezhető.

2'. Az (1) nem egyetlen lehetséges paraméteres előállítása M-nek, hanem belőle valamely

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \qquad (\alpha = 1, 2) \qquad (2)$$

paraméter-transzformációval újabb nyerhető,

$$\boldsymbol{r}\,[u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)] = \boldsymbol{\varrho}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \qquad (3)$$

alakban.

A (2) transzformációkról feltesszük, hogy *a)* egyszeresen összefüggő $\bar{B}$ értelmezési tartománnyal és a fentebbi B-vel megegyező értéktartománnyal rendelkeznek, *b)* $u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ függvényeik legalább első osztályúak és kölcsönösen egyértelműek $\bar{B}$-ben, és *c)* ott mindenütt zérustól különböző a JAKOBI-féle determinánsuk, azaz

$$D \equiv \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} = \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \neq 0; \qquad (4)$$

sőt *d)* az *a)* és *b)* következményeként a (2)-höz tartozó

$$\bar{u} = \bar{u}^\gamma(u^1, u^2) \qquad (\gamma = 1, 2)$$

alakú, ún. *inverz* transzformáció is létezik a B-ben, és az is legalább első osztályú. E feltételek teljesülése esetén a (2) *megengedett paraméter-transzformációnak* mondható.

Ezzel kapcsolatban két (1) alakú megengedett paraméteres előállítást ugyanazon ekvivalencia-osztályba tartozónak, röviden *ekvivalensnek* nevezünk, ha egy (2) alakú megengedett paraméter-transzformációval átvihetők egymásba.

Az (1) alakú megengedett paraméteres előállítások egy ekvivalencia-osztályának megfelelő ponthalmazt — definíciószerűen — *felületdarabnak* nevezünk. Ilyen darabok alkalmas egyesítéseként* jön létre a *felület.*

3'. Az (1) megengedett paraméteres előállású felület(darab) mentén — tudvalevőleg — valamely (legalább elsőosztályúnak feltételezett)

$$u^1 = u^1(t),\; u^2 = u^2(t) \qquad (\tau < t < T) \qquad (6)$$

paraméteres skalár függvénypárnak az (1)-ben való behelyettesítésével nyert

$$\boldsymbol{r} = [u^1(t), u^2(t)] = \boldsymbol{\varrho}(t) \qquad (\tau < t < T) \qquad (7)$$

paraméteres vektorfüggvénnyel határozunk meg egy ún. *felületi görbét.* Érintővektora valamely t paraméterű, rendes P pontjában — ismeretesen —

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_1\dot{u}^1 + \boldsymbol{r}_2\dot{u}^2 \quad [\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \neq \boldsymbol{0},\; (\dot{u}^1)^2 + (\dot{u}^2)^2 \neq 0] \qquad (8a)$$

alakban, vagyis ott a regularitás folytán lineárisan független $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ paramétergörbe-érintővektorok nem csupa zérus együtthatós lineáris kombinációjaként állítható elő. A felület P pontbeli *érintősíkja* célszerűen

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{r} = v^1\boldsymbol{r}_1 + v^2\boldsymbol{r}_2 \qquad (-\infty < v^\alpha < \infty) \qquad (8b)$$

* L. bővebben pl. *Kreyszig* [28].

módon, vagyis a $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}$ érintősíkbeli, ún. felületi vektorok halmazaként adható meg.

4'. A (3) felületi görbe *ívelemvektora* a (4)-ből $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1\, du^1 + \boldsymbol{r}_2 du^2$ alakban, *négyzete* pedig — célszerűen az ún. elsőrendű főmennyiségekre vonatkozó új,

$$\boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\beta \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\beta} = g_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (9)$$

jelölések bevezetésével —

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \boldsymbol{r}_\alpha\, \boldsymbol{r}_\beta\, du^\alpha\, du^\beta = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta =$$

$$= g_{11}\,(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 \quad (> 0) \qquad (10)$$

alakban nyerhető. [Új és régi jelöléseink megfelelése:

$$g_{11} = E,\ g_{12} = g_{21} = F,\ g_{22} = G.]$$

A (10) kvadratikus differenciálforma a felületelmélet ún. *első alapformája*. Ez — mint ismeretes — a felület hossz-, szög- és felszínméretviszonyait, röviden *metrikáját* határozza meg, s ezért metrikus alapformulának is szokás nevezni. A $g_{\alpha\beta}$ együtthatók egyszersmind — mint látni fogjuk — az ún. mértéktenzor komponensei.

Pl[1]. A gömbfelület szokásos paraméteres előállítása (vö. a 74. o. 2. A) példájával és a 75. o. 34. ábrájával; most $u \equiv u^1$ és $v \equiv u^2$):

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2) = (r \cos u^1 \cos u^2, r \cos u^1 \sin u^2, r \sin u^1) \begin{pmatrix} 0 \leqq u^2 < 2\pi, \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqq u^1 \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Parciális deriváltjai:

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^1} = (-\, r \sin u^1 \cos u^2, -\, r \sin u^1 \sin u^2, r \cos u^1),$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^2} = (-\, r \cos u^1 \sin u^2, r \cos u^1 \cos u^2, 0).$$

Elsőrendű főmennyiségei:

$$g_{11} = (\boldsymbol{r}_1)^2 = r^2, \qquad g_{12} = g_{21} = \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2\, \boldsymbol{r}_1 = 0, \quad g_{22} = (\boldsymbol{r}_2)^2 = \boldsymbol{r}^2 \cos u^1.$$

Első alapformája:

$$ds^2 = r^2\, (du^1)^2 + r^2 \cos^2 u^1\, (du^2)^2.$$

III°. A RIEMANN-tér és metrikája. 1'. E felületelméleti előkészítés után most értelmezhetjük a RIEMANN-féle metrika, geometria és tér fogalmát.

Definíció: *Egy kvadratikus differenciálformulával megadott metrikát* RIEMANN-*metrikának, a hozzá tartozó geometriát* RIEMANN-*geometriának, végül az ilyen metrikát és geometriát felmutató teret* RIEMANN-*térnek (R) szokás nevezni.*

A rendezett valós koordináta-n-esek $\{(u^1, u^2, \ldots, u^n), \ldots\}$ halmazával leírható *n-dimenziós* RIEMANN-*tér* (R_n) *metrikáját* a

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \quad (> 0) \qquad (11)$$

a differenciálformával értelmezzük. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy a $g_{\alpha\beta}$ együtthatók indexeik szimmetrikus függvényei $(g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha})$. A $ds^2 > 0$ pozitív határozottságot esetleg elejthetjük; ez történik pl. a relativitáselméletben, fizikai meggondolások alapján.

A (10) és a (11) metrika összevetéséből nyilvánvaló, hogy az (1) egyenletű *felület kétdimenziós* RIEMANN-*térnek* (R_2), a felület differenciálgeometriája pedig kétdimenziós RIEMANN-differenciálgeometriának tekinthető. Az R_n-terek tanulmányozásához hasznos és szemléletes előképet szolgáltatnak az R_2-terek, vagyis a felületek.

2'. Az R_2 és az R_n-térnek az utolsó évtizedekben mind jelentősebbé vált tárgyalási módszere a *tenzorszámítás*, mégpedig azon általános értelmezésben és modern szimbolikával, amelyet az alábbiakban kívánunk röviden vázolni. E módszer számottevő *előnye*, hogy a szemléletes R_2 térből közvetlenül, alapvető sajátságainak változása és újabb lényeges meggondolások nélkül vezet a tetszőleges dimenziójú R_n térre. Ezen általánosíthatóságon túlmenőleg a módszer számos újabb előnye nyilvánul meg különféle kérdésekben és nem utolsó sorban egyszerű jelölésrendszerében. Mindezen előnyökről a továbbiakban lesz alkalmunk meggyőződni.

3'. A tenzorszámítás modern, az eleganciáig leegyszerűsített *szimbolikájáról* már most célszerű egyet-mást előrebocsátani. A tenzoros számításokban sűrűn szerepelnek többszörös szummációk, amelyek erősen rontják a formulák kezelhetőségét és áttekinthetőségét. Lényeges könnyítést eredményez e tekintetben a RIEMANN-geometriában szokássá vált alábbi

Szummációs megállapodás: *A szummajelet* $\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\right)$ *elhagyjuk, és az összegezést olyan (1-től n-ig) futó (α) indexszel jelezzük, amely egy szorzatban kétszer szerepel, mégpedig egyszer alsó és egyszer felső indexként.*

Pl². Az R_n tér metrikus alapformája a hagyományos és az új szummációs jelöléssel így írható:

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \equiv g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \quad (> 0). \tag{12}$$

Pl³. További példák az új összegezési szimbolikára:

a) $\dot{r} = r_\alpha \dot{u}^\alpha \equiv r_1 u^1 + r_2 u^2;$ *b)* $dr = r_\alpha du^\alpha \equiv r_1 du^1 + r_2 du^2;$

c) $a^\alpha b_\alpha \equiv a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3;$ *d)* $a^\alpha \dfrac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} \equiv a^1 \dfrac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^1} + a^2 \dfrac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^2} + \ldots + a \dfrac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^n};$

e) $g_{\alpha\alpha}\, du^\alpha\, du^\alpha \equiv g_{11} (du^1)^2 + g_{22} (du^2)^2 \neq g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta.$

Mint említettük, a szorzatban kétszer (egyszer fent, egyszer lent) szereplő index összegezést jelez, ezért *szummációs indexnek* nevezhető (l. a 3. pl. *a)—c)* esetét); ezzel szemben nem utal összegezésre a szorzatban csak egyszer előforduló index, ezért *szabad indexnek* mondható (l. a 3. pl. *d)* esetét). Egy számítás folyamán a kezdetben bevezetett szabad indexek nem változtathatók meg, a szummációs ndexek viszont igen. Az utóbbiaknál csupán a szabad indexek és a szóban forgótól független szummációk jelölésére szolgáló betűk mellőzendők (l. a 3. pl. *e)* esetét). A szummációs és a szabad indexek mindenkor gondosan megkülönböztetendők!

Ugyanez vonatkozik az *indexek alsó és felső elhelyezésére.* Mint látni fogjuk, e megkülönböztetés a jelzett mennyiség kétféle koordinátatranszformációs magatartásának külső jellemzésére szolgál.

4'. Térjünk vissza röviden az R_2-tér, vagyis a felület $g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\beta$ mértékszámaira és transzformálásukra!

Mint már utaltunk rá, *az (1) felület reguláris pontjaiban* (ahol $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \neq 0$) *a (10) első alapforma definit pozitív.* Ui. a regularitás folytán

$$(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)^2 = (\boldsymbol{r}_1)^2 (\boldsymbol{r}_2)^2 \sin^2 \delta = (\boldsymbol{r}_1)^2 (\boldsymbol{r}_2)^2 (1 - \cos^2 \delta) = (\boldsymbol{r}_1)^2 (\boldsymbol{r}_2)^2 - (\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2)^2 =$$

$$= g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 = g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \det (g_{\alpha\beta}) > 0, \tag{13a}$$

következésképpen a (10) kvadratikus alak diszkriminánsa,

$$\operatorname{discr} (g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta) = 4 [(g_{12})^2 - g_{11} g_{22}] = -4 [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2] < 0; \tag{13b}$$

a (10) tehát — valós zérushelyek hiányában — definit, mégpedig $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$ értelmében definit pozitív, q. e. d.

Ezután igazoljuk, hogy *az $\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$ felületre az $u^\alpha = u^\alpha (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$* ($\alpha = 1, 2$) *megengedett transzformációt alkalmazva, eredeti és transzformált* (alakú, de invariáns értékű) *első alapformájának $g_{\alpha\beta}$, ill. $\bar{g}_{\gamma\delta}$ együtthatói között az alábbi transzformációs összefüggés létesül:*

$$\bar{g}_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta}, \quad \text{ill.} \quad g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\gamma\delta} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 1, 2; \\ \gamma, \delta = 1, 2 \end{pmatrix} \tag{14a, b}$$

Ui. a ds ívelem nyilvánvalóan koordinátainvariáns geometriai jelentésére, valamint a többváltozós transzformációs függvények $du^\alpha = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} d\bar{u}^\gamma$ differenciáljára való tekintettel

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta = g_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta} d\bar{u}^\gamma\, d\bar{u}^\delta = \bar{g}_{\gamma\delta}\, d\bar{u}^\gamma\, d\bar{u}^\delta, \tag{14c}$$

ahonnan a (14*a*) már kiolvasható; hasonlóan nyerhető a (14*b*), a szintén legalább első osztályú [azaz folytonos $\dfrac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha}$ parciális deriváltakkal rendelkező] $\bar{u}^\gamma = \bar{u} (u^1, u^2)$ ($\gamma = 1, 2$) inverz transzformáció létezése folytán.

Folytatólag igazoljuk, hogy *az előbbi transzformációnál, ill. inverzénél az első alapforma diszkriminánsának* $(-1/4)$*-szerese így transzformálódik:*

$$\bar{g} = J^2 g, \ \text{ill.}\ g = \bar{J}^2 \bar{g}, \tag{15a, b}$$

ahol

$$J = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} = \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}, \qquad \bar{J} = \frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} = \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1}$$

a direkt, ill. az inverz transzformáció Jacobi-determinánsa. Ui. a (14*a*) formula alkalmazásával, majd a $\beta = \gamma$, végül az $\alpha = \delta$ indexegyezésnek megfelelő zérus tényezők figyelembevételével — a (15*a*) vonatkozásában — írható, hogy

$$\bar{g} = \bar{g}_{11} \bar{g}_{22} - (\bar{g}_{12})^2 = g_{\alpha\beta}\, g_{\gamma\delta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^2} \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^1} \right) =$$

$$= (g_{\alpha 1} g_{2\delta} - g_{\alpha 2} g_{1\delta}) \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \right) =$$

$$= [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2] \cdot \left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \right)^2, \quad \text{q. e. d.} \tag{15c}$$

A (15b) igazolása hasonlóan történik.

β) Kontravariáns és kovariáns vektorok az R_n-térben

1°. Transzformációk. 1′. Most — az R_n-tér fogalmáról és az R_2-tér mértékviszonyairól szerzett előismeretek nyomán — hozzálátunk az *általános tenzorelmélet* vázolásához. E *β)* szakaszban kifejtjük az alapgondolatot, a következőkre pedig az általánosítás marad, mégpedig bizonyos számítási teendők árán, de lényeges új megfontolások nélkül

Fentebb megvizsgáltuk a felület, vagyis az R_2-tér $g_{\alpha\beta}$ mértékszámainak magatartását valamely $u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ megengedett transzformációnál és a $\bar{g}_{\gamma\delta}$-két az inverz $\bar{u}^\gamma = \bar{u}^\gamma(u^1, u^2)$-nél. Ez része az alábbiakban vizsgálandó szélesebb körű problémának, amelyek keretében a bennünket érdeklő mennyiségeknek *két, elvileg különböző transzformációs magatartásával* fogunk megismerkedni.

2′. Tegyünk most még néhány általánosító és kiegészítő megjegyzést a transzformációkról! A továbbiakban az R_n-térben

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{16a}$$

alakú *megengedett koordinátatranszformációkkal* fogunk dolgozni: ezekről tehát feltesszük, hogy

$$\bar{u}^\gamma = \bar{u}^\gamma(u^1, u^2, \ldots, u^n) \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, n) \tag{16b}$$

alakú, létező inverzükkel együtt legalább első osztályúak tartományukban, s e mellet csoportot* képeznek.

Bevezetve az

$$u^\alpha = \varphi^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots \bar{u}^n) \quad \text{és} \quad \bar{u}^\gamma = \psi^\gamma(u^1, u^2, \ldots, u^n) \tag{17a}$$

átmeneti jelöléseket, majd behelyettesítve ezeket a (16a, b)-be, így az

$$u^\alpha = \varphi^\alpha(\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n) \quad \text{és} \quad \bar{u}^\gamma = \psi^\gamma(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n) \tag{17b}$$

azonosságokat nyerjük, az u^β, ill. $\bar{u}^\delta$ független változók (!) szerinti parciális deriválásuk útján pedig, végül az eredeti jelölésekre is visszatérve, az alábbi *fontos összefüggésekhez jutunk:*

$$\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \psi^\gamma} \frac{\partial \psi^\gamma}{\partial u^\beta} = \right) \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial \bar{u}^\delta} = \frac{\partial \psi^\gamma}{\partial \bar{u}^\delta} = \frac{\partial \psi^\gamma}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial \bar{u}^\delta} = \right) \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\delta} = \delta_\delta^\gamma, \tag{18a, b}$$

ahol

$$\delta_\lambda^\varkappa = \begin{cases} 1, \text{ ha } \varkappa = \lambda \\ 0, \text{ ha } \varkappa \neq \lambda \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n; \\ \lambda = \beta, \delta; \quad \varkappa = \alpha, \gamma. \end{pmatrix}$$

* L. bővebben *Fazekas* [29].

3'. Végül érintsük még *a koordinátadifferenciálok transzformációját!* A (16b) és a (16a), mint többváltozós függvény differenciálja — ismeretesen —

$$d\bar{u}^\gamma = \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} du^\alpha, \quad \text{ill.} \quad du^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} d\bar{u}^\gamma \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n). \quad (19a, b)$$

E transzformációk — láthatóan — *homogén lineárisak,* de együtthatóik (parciális deriváltak) nyilván a koordináták függvényei. Megállapítható tehát a (16a, b) és a (19a, b) alapján, hogy bármely megengedett, s „nagyban" (regionálisan, magukra a változókra nézve) általában nem-lineáris transzformáció és inverze „kicsinyben" (lokálisan, a változók elenyésző növekményeire, a differenciálokra nézve) lineáris (sőt homogén lineáris).

II°. Kontravariáns vektorok. 1'. A koordinátadifferenciálok módján transzformálódó szám-n-esekre vonatkozik az alábbi

Definíció: *Jellemezzük az R_n* Riemann-*tér egy P pontját valamely K koordinátarendszerben $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, egy másik, a K-ból megengedett transzformációval nyerhető $\bar{K}$-ban pedig $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$ valós koordináta-n-esével; rendeljünk továbbá a $P(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ ponthoz egy $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$, a $P(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$-hez pedig valamely $(\bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^n)$ valós szám-n-est. Ha e számok között az*

$$\bar{a}^\beta = a^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha}, \quad \text{ill. az} \quad a^\alpha = \bar{a}^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \quad (20a, b)$$

összefüggés áll fenn, akkor az utóbbi szám-n-eseket kontravariáns vektoroknak (vagy elsőrendű kontravariáns tenzoroknak), a^α, ill. $\bar{a}^\beta$ elemeiket pedig az $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, ill. az $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$ koordinátákra vonatkozó komponenseiknek nevezzük. E vektorokat általános komponensükkel, vagyis a^α, ill. $\bar{a}^\beta$ módon jelöljük, ahol a felső indexeléssel éppen a kontravariáns transzformálódást kívánjuk külsőleg jelezni.

A (20b) egyébként a (20a)-ból a $\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta}$-val való szorzása és a (18b) alkalmazása útján,

$$\bar{a}^\beta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} = a^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} = a^\alpha \delta^\gamma_\alpha = a^\gamma \qquad (20c)$$

módon nyerhető.

2'. Az $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ komponensek [és így a (20a) szerint nekik megfelelő $(\bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^n)$ is] rendszerint nemcsak a $P \in R_n$ pontban vannak megadva, hanem valamely $T \subset R_n$ tartományban, persze a pontról pontra változó koordináták függvényeként. Ily módon a T tartomány Q pontjaihoz hozzákötött kontravariáns vektorok halmaza, ún. *kontravariáns vektormező* (vagy elsőrendű kontravariáns tenzormező) áll elő.

Az R_n Riemann-*térben* tehát általában *kötött vektorokkal* (és tenzorokkal) van dolgunk, viszont *az E_n euklidesi térben* (amely a Riemann-tér speciális esete) tudvalevőleg *szabad vektorokkal* dolgozunk. Ez az eltérés onnan származik, hogy a megengedett *koordinátatranszformációk*

az R_n-térben		az E_n-térben	
$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$		$x^\alpha = a^\alpha_\beta \bar{x}^\beta + b^\alpha$	(21a, b)
	$(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$		

alakú, tehát

nem-lineáris,	ill.	lineáris

függvényekkel vannak meghatározva, és ezek parciális deriváltjai

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} = \varphi_\gamma^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n), \quad \text{ill.} \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\gamma} = a^\alpha{}_\gamma = \text{const} \qquad (21\text{c, d})$$

módon alakulnak, vagyis

a hely függvényei, ill. a helytől függetlenek.

A $P \in R_n$ ponthoz valamely *a skalár* (egy komponens) is hozzárendelhető úgy, hogy minden koordinátatranszformációval szemben *invariáns* maradjon.

III°. Kovariáns vektorok. 1'. A (20a, b) kontravariáns transzformációnál nem kisebb fontosságú a most következő kovariáns transzformáció. Hallgatólagosan már korábban is érintettük, midőn az R_2-térben megvizsgáltuk, hogy az első alapforma $g_{\alpha\beta}$ együtthatóinak milyen transzformálódása mellett marad invariáns a ds^2, a koordinátadifferenciálok ismert transzformálódását is figyelembe véve [l. a (14a, b, c) formulákat].

2'. Általánosabb példaként tekintsünk egy tetszőleges a^α kontravariáns vektor komponenseivel képzett $I = b_\alpha a^\alpha$ *lineáris formát,* megkívánva, hogy e skalár bármely (16a) koordinátatranszformációval szemben invariáns maradjon, azaz

$$\bar{I} = \bar{b}_\beta \bar{a}^\beta = b_\alpha a^\alpha = I, \qquad (22\text{a})$$

vagy a (20b) alkalmazásával

$$\bar{b}_\beta \bar{a}^\beta = b_\alpha a^\alpha = b_\alpha \bar{a}^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n). \qquad (22\text{b})$$

Minthogy a relációnak bármilyen a^α-nál fenn kell állnia, ezért szükséges, hogy a két oldal megfelelő együtthatói megegyezzenek. Így, ill. értelemszerűen hasonló módon nyerhető az alábbi *direkt, ill. inverz transzformáció:*

$$\bar{b}_\beta = b_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \quad (\beta = 1, 2, \ldots, n), \qquad b_\gamma = \bar{b}_\beta \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\gamma} \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, n). \qquad (22\text{c, d})$$

3'. Az így transzformálódó szám-n-esekre vonatkozik az alábbi

Definíció: *Ha az R_n-tér egy P pontja (a megengedett transzformációval egymásba átvihető) K, ill. $\bar{K}$ koordináta-rendszerben $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, ill. $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$ koordináta-n-essel jellemezhető, s ehhez olyan $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ill. $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$ valós szám-n-es van hozzárendelve, amelyek között a (22c, d) összefüggés áll fenn, akkor e szám-n-eseket kovariáns vektorok-nak (vagy elsőrendű kovariáns tenzoroknak), b_α, ill., $\bar{b}^\beta$ elemeiket pedig az u^α, ill. $\bar{u}^\beta$ koordinátákra vonatkozó komponenseiknek nevezzük. Ugyancsak e b_α, ill. $\bar{b}^\beta$ komponensek szolgálnak e vektorok jelölésére, a kovariáns transzformálódásra külsőleg utaló alsó indexeléssel.*

Nyilván ismét *kötött vektorokról* van szó és értelemszerűen érvényben maradnak a II° 2'-beli egyéb megjegyzések is. Ismét hangsúlyozzuk továbbá a kontravariáns, ill. kovariáns transzformálódás külsőleges jelzésére hivatott *felső, ill. alsó indexelés gondos megkülönböztetését.* Egyébként két vektor ugyanazon, ill. különböző módon (pl. kovariáns—kovariáns, ill. kovariáns—kontravariáns módon) történő transzformálódását *kogrediens,* ill. *kontragrediens* jelzővel illetjük.

4'. Egy $T \subset R_n$ tartományban értelmezett $S(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ valós függvényt *skalárfüggvénynek* vagy röviden skalárnak nevezünk, ha értéke bármely (16a) alakú megengedett koordinátatranszformációval szemben *invariáns* marad. Ha $S(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ legalább első osztályú, akkor létezik ún. *gradiense*, $g_\alpha \equiv \frac{\partial S}{\partial u^\alpha}$, és ez *kovariáns vektor*, mert a láncszabály szerint

$$\bar{g}_\beta = \frac{\partial S}{\partial \bar{u}^\beta} = \frac{\partial S}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \equiv g_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

módon, vagyis a (22c) szerint transzformálódik.

Emlékeztetőül jegyezzük meg [a (19a) és a (23) alapján]: *a koordinátadifferenciálok kontravariáns, a gradiens komponensei kovariáns módon transzformálódnak.*

IV°. Kontra- és kovariáns vektorok az E_3-térben. 1'. Térjünk ki külön ezekre, tekintettel geometriai és műszaki alkalmazásaikra! Az E_3 euklidesi tér szabad vektorait vonatkoztassuk egy tetszőleges (nem ortonormált) $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ $[V = \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2\, \mathbf{e}_3 \neq 0]$ *bázissal* orientált egyenes vonalú, ferdeszögű koordináta-rendszerre, majd a $B^{-1} = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ $[\mathbf{e}^i = (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)/V^*$, $V^* = \mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3 \neq 0]$ *reciprok bázisnak* megfelelő egyenes vonalú, ferdeszögű koordináta-rendszerre, tudva, hogy $\mathbf{e}_i\mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Valamely $\mathbf{a} \in E_3$ vektor (egyértelmű) előállítása e két bázison így alakul:

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad \mathbf{a} = a_j\mathbf{e}^j, \tag{24a, b}$$

ahol az a^i, ill. a_j számok az $\mathbf{a}$ vektor B, ill. B^{-1} bázisra vonatkozó *ferdeszögű koordinátái*, s egyúttal az $\mathbf{a}$ vektor *kontravariáns, ill. kovariáns komponensei.** Tekintettel az

$$\mathbf{a}\mathbf{e}^j = a^i(\mathbf{e}_i\mathbf{e}^j) = a^i\delta_{ij} = a^j, \qquad \mathbf{a}\mathbf{e}_i = a_j(\mathbf{e}^j\mathbf{e}_i) = a_j\delta_{ij} = a_i \tag{24c, d}$$

skalárszorzatokra, az a^j, ill. a_i számok egyszersmind az $\mathbf{a}$ vektornak a B^{-1}, ill. B (ferdeszögű) bázisra vonatkozó *derékszögű koordinátái* (előjeles vetületei). Így pl. a^2, ill. a_2 az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}_2$ bázisvektorra vonatkozó ferdeszögű, ill. derékszögű koordinátája.

A B és B^{-1} bázissal kapcsolatban megjegyzendő, hogy

$$V^* = \mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3 = 1 : (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = 1/V \qquad (V \neq 0), \tag{25a}$$

lévén — a reciprok vektorhármasok értelmezése szerint —

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{V} = \frac{(\mathbf{e}^k \times \mathbf{e}^i) \times (\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j)}{V^{*2}V} = \frac{\mathbf{e}^i(\mathbf{e}^k\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j) - \mathbf{e}^k(\mathbf{e}^i\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j)}{V^{*2}V} = \frac{\mathbf{e}^i}{V^*V}, \quad V^*V = 1.$$

Megjegyzendő továbbá, hogy *ortonormált* $(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij})$ *és jobbrendszerű* $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = +1)$ *B bázis esetén*

$$V^* = V = 1, \qquad \mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{1} = \mathbf{e}_i, \quad B^{-1} = B, \quad a^i = a_i, \tag{26}$$

vagyis *az $\mathbf{a}$ vektor kontravariáns és kovariáns komponensei megegyeznek.*

2'. Vegyük fel most az E_3-tér $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ és $\bar{B} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ tetszőleges bázisait; vektoraik összefüggése legyen

$$\bar{\mathbf{e}}_j = \alpha_j{}^k\,\mathbf{e}_k, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{e}_i = \beta_i{}^l\bar{\mathbf{e}}_l \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{27a, b}$$

* Az elnevezések és jelölések jogosultsága lentebb nyilvánvalóvá válik.

Vizsgáljuk meg, *hogy transzformálódnak az* $\boldsymbol{a} \in E_3$ *vektor* a^i *kontravariáns és* $a_j = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_j$ *kovariáns komponensei,* a $B \rightarrow \bar{B}$ báziscserénél. A (27a, b), valamint egy-egy bázis vektorainak lineáris függetlensége alapján írható, hogy

$$\bar{\boldsymbol{e}}_j = \alpha_j{}^k \beta_k{}^l \bar{\boldsymbol{e}}_l, \quad \alpha_j{}^k \beta_k{}^l = \delta_j{}^l, \quad \text{ill.} \quad \boldsymbol{e}_i = \beta_i{}^l \alpha_l{}^k \boldsymbol{e}_k, \quad \alpha_l{}^k \beta_i{}^l = \delta_i{}^k. \qquad (27c)$$

Ezek után az $\boldsymbol{a} \in E_3$ vektor kontravariáns komponensű báziselőállításai

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i = \bar{a}^j \bar{\boldsymbol{e}}_j = \bar{a}^j \alpha_j{}^k \boldsymbol{e}_k = a^i \beta_i^l \bar{\boldsymbol{e}}_l \qquad (28a)$$

alakot öltenek, ahonnan — a lineáris függetlenségek figyelembevételével — valóban az

$$\bar{a}^j = \beta_i{}^j a^i, \quad \text{ill.} \quad a^i = \alpha_j{}^i \bar{a}^j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (28b)$$

kontravariáns transzformációs összefüggések adódnak.

Hasonló meggondolásokkal — az $\boldsymbol{a}$ vektor kovariáns komponenseinek

$$\bar{a}_j = \boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{e}}_j = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_k)\, \alpha_j{}^k = \alpha_j{}^k a_k, \quad \text{ill.} \quad a_i = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{e}}_l)\, \beta_i{}^l = \beta_i{}^l \bar{a}_l \qquad (29a)$$

formuláiból — valóban az

$$\bar{a}_j = \alpha_j{}^k a_k, \quad \text{ill.} \quad a_i = \beta_i{}^l \bar{a}_l \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (29b)$$

kovariáns transzformációs összefüggések olvashatók ki.

Végül, ha a $B^{-1} = \{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ és a $\bar{B}^{-1} = \{\bar{\boldsymbol{e}}^1\ \bar{\boldsymbol{e}}^2, \bar{\boldsymbol{e}}^3\}$ *reciprok bázisokkal* dolgozunk, akkor — a (28b) és a 29b) szerint —

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}^j a_j = \bar{\boldsymbol{e}}^k \bar{a}_k = \boldsymbol{e}^j \beta_j{}^k \bar{a}_k = \bar{\boldsymbol{e}}^k \alpha_k{}^j a_j, \qquad (30a)$$

ahonnan a (27a, b) helyébe lépő

$$\bar{\boldsymbol{e}}^k = \beta_j{}^k \boldsymbol{e}^j, \quad \text{ill.} \quad \boldsymbol{e}^j = \alpha_k{}^j \bar{\boldsymbol{e}}^k \qquad (30b, c)$$

bázisvektor-összefüggések nyerhetők.

γ) Kontra-, kovariáns és vegyes tenzorok az R_n-térben

1°. T r a n s z f o r m á c i ó k. 1'. Az előző szakaszban megismerkedtünk a kontravariáns és a kovariáns transzformáció mibenlétével, és e transzformációknak *koordinátainvariáns lineáris formára* való alkalmazásával eljutottunk a kontravariáns és a kovariáns vektor (elsőrendű tenzor) fogalmához. Most, a másod- és magasabb rendű tenzor fogalmához eljutandó, e transzformációkat *koordinátainvariáns bilineáris és multilineáris formákra* fogjuk alkalmazni.

2'. E célból, mint az előző szakaszban is tettük, először meghatározott teret és transzformációs csoportot veszünk alapul. Nevezetesen, tekintsük adottnak az *n-dimenziós* RIEMANN-*teret* (R_n), és ebben mindenütt létezzenek, legalább első osztályúak legyenek, végül csoportot képezzenek az

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n), \quad \text{ill.} \quad \bar{u}^\gamma = \bar{u}^\gamma(u^1, u^2, \ldots, u^n) \quad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, n) \quad (31a, b)$$

alakú direkt, ill. inverz transzformációk, *megengedett transzformációk csoportja* elnevezéssel.

A könnyebb érthetőség kedvéért most előbb az alkalmazások szempontjából is nagy fontosságú *másodrendű tenzorokkal* foglalkozunk, majd azután térünk rá a magasabb rendű tenzorok tanulmányozására. Mint már korábban megjegyeztük, az

alábbiakban tulajdonképpen az előző szakaszban tanultak alkalmazására és általánosítására kerül sor, lényegesebb új megfontolások nélkül.

II°. Másodrendű tenzorok. 1'. Legyen $I = a^{\alpha\beta} b_\alpha c_\beta$ tetszőleges b_α és c_β kovariáns vektorokkal képzett és a (31a) alakú megengedett transzformációkkal szemben invariáns *bilineáris forma*. A transzformált és az eredeti mennyiségek összefüggése tehát

$$\bar{I} = \bar{a}^{\gamma\delta} \bar{b}_\gamma \bar{c}_\delta = a^{\alpha\beta} b_\alpha c_\beta = I, \tag{32a}$$

vagy a kovariáns vektorok (22c) szerinti transzformálásával

$$\bar{a}^{\gamma\delta} \bar{b}_\gamma \bar{c}_\delta = a^{\alpha\beta} b_\alpha c_\beta = a^{\alpha\beta} \bar{b}_\gamma \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \bar{c}_\delta \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta}. \tag{32b}$$

A b_α és a c_β tetszőleges választása folytán a $\bar{b}_\gamma$ és a $\bar{c}_\delta$ bal és jobb oldali együtthatóinak meg kell egyezniök; így nyerjük a bilineáris forma $a^{\alpha\beta}$ együtthatóinak

$$\bar{a}^{\gamma\delta} = a^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} \qquad (\gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n) \tag{33a}$$

transzformációs törvényét, ebből pedig — a (18a) alkalmazásával —

$$\bar{a}^{\gamma\delta} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\delta} = a^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\delta} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} = a^{\alpha\beta} \delta^\sigma_\alpha \delta^\tau_\beta \tag{33b}$$

módon az

$$a^{\sigma\tau} = \bar{a}^{\gamma\delta} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\delta} \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, n) \tag{33c}$$

inverziós törvényt. Ezek után kimondható az alábbi

Definició: *Ha az R_n-tér egy P pontjához, amely (a megengedett transzformációval egymásba átvihető) K, ill. $\bar{K}$ koordináta-rendszerben $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, ill. $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$ koordinátájú, olyan $a^{\alpha\beta}$, ill. $\bar{a}^{\gamma\delta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n)$ valós számhalmaz van hozzárendelve, amelyek között a (33a, c) összefüggés áll fenn, akkor e számhalmazokat másodrendű kontravariáns tenzorok-nak, egyenként n^2 számú elemüket pedig komponenseiknek nevezzük, egyaránt az u^α, ill. $\bar{u}^\gamma$ koordinátájú P pontra vonatkozólag. E tenzorokat $a^{\alpha\beta}$, ill. $\bar{a}^{\gamma\delta}$ általános komponensükkel jelöljük, ahol a felső indexeléssel éppen a kontravariáns transzformálódást jelezzük.*

Tenzoraink komponenseit — a jobb áttekinthetőség kedvéért — az

$$[a^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} & \ldots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \ldots & a^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{n1} & a^{n2} & \ldots & a^{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad [\bar{a}^{\gamma\delta}] = \begin{bmatrix} \bar{a}^{11} & \bar{a}^{12} & \ldots & \bar{a}^{1n} \\ \bar{a}^{21} & \bar{a}^{22} & \ldots & \bar{a}^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}^{n1} & \bar{a}^{n2} & \ldots & \bar{a}^{nn} \end{bmatrix} \tag{34a, b}$$

mátrix alakba szoktuk elrendezni.

Pl⁴. A másodrendű kontravariáns tenzorok egy speciális fajtája képezhető két, ugyanazon ponthoz kötött kontravariáns vektor, g^α és h^β segítségével,

$$a^{\alpha\beta} = g^\alpha h^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{35a}$$

módon, *a g^α és h^β vektor általános vagy diadikus szorzata* néven; ui. a (20a, b)-ből kifolyólag

$$\bar{a}^{\gamma\delta} \equiv \bar{g}^\gamma \bar{h}^\delta = g^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \cdot h^\beta \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} = a^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta}, \qquad (35b)$$

a (33a)-nak megfelelően.

2'. Tekintsük most a tetszőleges b^α és c^β kontravariáns vektorokkal képzett és a (31a) alakú megengedett transzformációkkal szemben invariáns $J = a_{\alpha\beta} b^\alpha c^\beta$ *bilineáris formát*! A (20a, b) alkalmazásával — a (32a, b) és (33b) mintájára, de rövidebben — írható, hogy

$$\bar{J} = \bar{a}_{\gamma\delta} \bar{b}^\gamma \bar{c}^\delta = a_{\alpha\beta} b^\alpha c^\beta = J = a_{\alpha\beta} \bar{b}^\gamma \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \bar{c}^\delta \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta} = \bar{a}_{\gamma\delta} b^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} c^\beta \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta}, \qquad (36a)$$

ahonnan az

$$\bar{a}_{\gamma\delta} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta}, \quad \text{ill.} \quad a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\gamma\delta} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} \quad (\alpha, \beta; \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n) \qquad (36b, c)$$

direkt, ill. inverz transzformációs törvény nyerhető, a (33a), ill. (33c) formula analógonjaként. Ezek nyomán megfogalmazható az alábbi

Definíció: *Ha az R_n-térnek a (megengedett transzformációval összekapcsolt) K, ill., $\bar{K}$ koordináta-rendszerben $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, ill. $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$ koordinátájú P pontjához olyan $a_{\alpha\beta}$, ill. $\bar{a}_{\gamma\delta}$ $(\alpha, \beta; \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n)$ valós szám-n^2-es van hozzárendelve, amelyek között a (36b, c) összefüggés áll fenn, akkor e szám-n^2-eseket* ***másodrendű kovariáns tenzoroknak****, a bennük összefoglalt számokat pedig komponenseiknek nevezzük, egyaránt a P pontra vagy az u^α, ill. $\bar{u}^\gamma$ koordinátákra vonatkozólag. E tenzorokat $a_{\alpha\beta}$, ill. $\bar{a}_{\gamma\delta}$ általános komponensükkel jelöljük, a kovariáns transzformálódást jelző alsó indexeléssel.*

A tenzor komponensei — a (34a, b) mintájára — itt is elrendezhetők mátrix alakba.

Pl[5]. A (36a) alakú koordinátainvariáns bilineáris alak legfontosabb példája a már érintett

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \qquad (37)$$

metrikus alapforma. Itt a du^α és du^β koordinátadifferenciálok egy-egy kontravariáns vektor komponensei, a $g_{\alpha\beta}$ együtthatók pedig másodrendű kovariáns tenzort képeznek, mert a ds^2 invariáns a (31a) megengedett transzformációkkal szemben és maguk a $g_{\alpha\beta}$ együtthatók a (36b) szerint transzformálódnak. Ezzel a korábban bevezetett *mértéktenzor* elnevezés indokolást nyert. A mértéktenzor tanulmányozására egyébként még visszatérünk.

3'. Végül térjünk ki még a másodrendű tenzorok egy harmadik fajtájára! Erre a (31a) megengedett koordinátatranszformációkkal szemben invariáns $K = a_\alpha{}^\beta b^\alpha c_\beta$ *bilineáris forma* vezet, mégpedig a (36a)-hoz hasonló

$$\bar{K} = \bar{a}_\gamma{}^\delta \bar{b}^\gamma \bar{c}_\delta = a_\alpha{}^\beta b^\alpha c_\beta = K = a_\alpha{}^\beta \bar{b}^\gamma \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \bar{c}_\delta \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} = \bar{a}_\gamma{}^\delta b^\alpha \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} c_\beta \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta} \qquad (38a, b, c)$$

úton nyerhető s a (36b, c)-vel analóg

$$\bar{a}_\nu^{\delta} = a_\alpha^{\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\nu} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta}, \text{ ill. } a_\alpha^{\beta} = \bar{a}_\gamma^{\delta} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta} \quad (\alpha, \beta; \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n)$$

transzformációs formulákkal. Így adódik az alábbi

Definició: *Ha az R_n-térnek a (megengedett transzformációval összekapcsolt) K, ill. $\bar{K}$ koordináta-rendszerben $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, ill. $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$ koordinátájú P pontjához olyan a_α^{β}, ill. $\bar{a}_\gamma^{\delta}$ $(\alpha, \beta; \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, n)$ valós szám-n^2-es van hozzárendelve, amelyek között a (38b, c) összefüggés áll fenn, akkor a_α^{β}, ill. $\bar{a}_\gamma^{\delta}$ (általános komponensével jelölt) m á s o d r e n d ű v e g y e s t e n z o rról beszélünk, a P pontra vagy az u^α, ill. $\bar{u}^\gamma$ koordinátákra vonatkozólag.*

Ezzel a másodrendű tenzor három jellegzetes fajtájának, a kontravariáns, a kovariáns és a vegyes másodrendű tenzornak az értelmezését befejeztük. Látni fogjuk, hogy mindez könnyen *általánosítható* majd magasabb rendű tenzorokra.

4'. Befejezésül — a β)IV° folytatásaként — szóljunk néhány szót *az E_3 euklidesi térbeli másodrendű tenzorokról,* elsősorban a mértéktenzorról! Vezessük be a $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ bázis és a $B^{-1} = \{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ reciprok bázis vektorainak különféle skaláris szorzataira az

$$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = g_{ij}, \quad \boldsymbol{e}^k \boldsymbol{e}^l = g^{kl}, \quad \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}^l = \boldsymbol{e}^l \boldsymbol{e}_i = g_i^{\,l} \; (= \delta_i^{\,l}) \qquad (39\text{a-c})$$

jelöléseket. Ezekkel az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in E_3$ vektorok *skaláris szorzata* az

$$\boldsymbol{ab} = a^i\boldsymbol{e}_i \cdot b^j\boldsymbol{e}_j = a_k\boldsymbol{e}^k \cdot b_l\boldsymbol{e}^l = a^i\boldsymbol{e}_i \cdot b_l\boldsymbol{e}^l = a_l\boldsymbol{e}^l \cdot b^i\boldsymbol{e}_i =$$
$$= g_{ij}\, a^i\, b^j = g^{kl}\, a_k\, b_l = g_i^{\,l}\, a^i\, b_l = g_i^{\,l}\, a_l\, b^i = a^i\, b_i = a_i\, b^i \qquad (40\text{a})$$

alakokban állítható elő. Az $\boldsymbol{a}$ vektor normája így

$$N(\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{aa} = \boldsymbol{a}^2 = g_{ij}\, a^i\, a^j = g^{kl}\, a_k\, a_l = a^i\, a_i \qquad (40\text{b})$$

módon, az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ hajlásszögének cosinusa pedig

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{g_{ij}\, a^i\, b^j}{\sqrt{a^i a_i}\sqrt{b^j b_j}} = \frac{g^{kl}\, a_k\, b_l}{\sqrt{a^k a_k}\sqrt{b^l b_l}} = \frac{a^i\, b_i}{\sqrt{a^i a_i}\sqrt{b^i b_i}} \qquad (40\text{c})$$

módon alakul.

Ezek után az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_i x^i = \boldsymbol{e}^k x_k$ változó vektor $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_i dx^i = \boldsymbol{e}^k dx_k$ differenciáljának négyzete, a koordinátainvariáns *első alapforma* így alakul:

$$ds^2 = d\boldsymbol{r}^2 = dx^i\boldsymbol{e}_i \cdot dx^j\boldsymbol{e}_j = dx_k\boldsymbol{e}^k \cdot dx_l\boldsymbol{e}^l = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = g^{kl}\, dx_k\, dx_l > 0, \qquad (41\text{a})$$

ahol a kvadratikus alak g_{ij} és g^{kl} együtthatói, egyszersmind a *mértéktenzor* kovariáns és kontravariáns komponensei között — az $\boldsymbol{e}^k$ reciprok vektorrendszer értelmezésének megfelelően — a

$$g^{kl} = \boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^l = \frac{(\boldsymbol{e}_\mu \times \boldsymbol{e}_\nu)(\boldsymbol{e}_\sigma \times \boldsymbol{e}_\tau)}{V^2} = \frac{(\boldsymbol{e}_\mu\boldsymbol{e}_\sigma)(\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\tau) - (\boldsymbol{e}_\mu\boldsymbol{e}_\tau)(\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\sigma)}{V^2} = \frac{g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\sigma}}{V^2}$$

$(k, \mu, \nu$ és l, σ, τ: ciklikus cserével az 1, 2, 3-ból; $V = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \neq 0)$

összefüggés áll fenn.

A mértéktenzor és a (24a-d) felhasználásával az $\boldsymbol{a} \in E_3$ vektor kontravariáns és kovariáns komponensei között az

$$a^k = \boldsymbol{a}\boldsymbol{\acute{e}}^k = (\boldsymbol{e}^k\boldsymbol{e}^l)\, a_l = g^{kl}\, a_l, \quad \text{ill.} \quad a_i = \boldsymbol{a}\boldsymbol{\acute{e}}_i = (\boldsymbol{\acute{e}}_i\boldsymbol{e}_j)\, a^j = g_{ij}\, a^j$$

kapcsolat nyerhető. Az utóbbit, mint reguláris* lineáris egyenletrendszert a CRAMER-szabály szerint megoldva a *kontravariáns vektorkomponensekre*, a (41b) és a (42a) egyidejű figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$a^k = \frac{G^{kl}}{g}\, a_l = g^{kl}\, a_l = \frac{g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}\, g_{\nu\sigma}}{V^2}\, a_l, \tag{42c}$$

ahol — a megfelelő elemek egyeztetésével —

$$g = \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad G^{kl} = g \cdot g^{kl} = \text{compl. minor}\, (g_{kl}) =$$

$$= \begin{vmatrix} g_{\mu\sigma} & g_{\mu\tau} \\ g_{\nu\sigma} & g_{\nu\tau} \end{vmatrix}, \quad g = V^2 = \frac{1}{V^{*2}} \neq 0. \tag{42d-f}$$

Megjegyzendő, hogy a $\sqrt{g} = V = 1/V^*$ összefüggésben a gyök előjele a V-ével (és V^*-éval) megegyezőnek választandó.

III°. M a g a s a b b r e n d ű t e n z o r o k. 1'. A vektorok (elsőrendű tenzorok) és a másodrendű tenzorok ismeretében most egyszerű *általánosítással* térhetünk rá a tetszőleges rendszámú tenzorokra. E célból a tetszőleges $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \ldots, a^{\alpha_r}$ kontravariáns és $b_{\beta_1}, b_{\beta_2}, \ldots, b_{\beta_s}$ kovariáns vektorkomponensekkel képzett és a (31) alakú koordinátatranszformációkkal szemben *invariáns*

$$M = h_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}\, a^{\alpha_1} a^{\alpha_2} \ldots a^{\alpha_r}\, b_{\beta_1} b_{\beta_2} \ldots b_{\beta_s} = \tag{43a}$$

$$= \bar{h}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\delta_2\ldots\delta_s}\, \bar{a}^{\gamma_1} \bar{a}^{\gamma_2} \ldots \bar{a}^{\gamma_r}\, \bar{b}_{\delta_1} \bar{b}_{\delta_2} \ldots \bar{b}_{\delta_s} = \bar{M}$$

multilineáris formából indulunk ki. Ebből — a kontra- és kovariáns vektorok (20a, b), ill. (22c, d) transzformációs törvényeinek alkalmazásával — az együtthatók

$$\bar{h}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\delta_2\ldots\delta_s} = h_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} \cdot \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial \bar{u}^{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\gamma_r}} \frac{\partial \bar{u}^{\delta_1}}{\partial u^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}^{\delta_s}}{\partial u^{\beta_s}} \tag{43b}$$

direkt és

$$h_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} = \bar{h}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\delta_2\ldots\delta_s} \cdot \frac{\partial \bar{u}^{\gamma_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}^{\gamma_r}}{\partial u^{\alpha_r}} \frac{\partial u^{\beta_1}}{\partial \bar{u}^{\delta_1}} \cdots \frac{\partial u^{\beta_s}}{\partial \bar{u}^{\delta}} \tag{43c}$$

inverz transzformációs törvénye nyerhető. Ilyen előkészületek után fogalmazható meg a következő nagy fontosságú

Definició: *Ha az R_n-térnek a (megengedett transzformációval összekapcsolt) K, ill. $\bar{K}$ koordináta-rendszerben $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, ill. $(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots, \bar{u}^n)$ koordinátájú P pontjához olyan $h_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}$, ill. $\bar{h}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\delta_2\ldots\delta_s}$ $(\alpha_\varrho, \beta_\sigma; \gamma_\varrho, \delta_\sigma = 1, 2, \ldots, n)$ valós szám-n^{r+s}-es van hozzárendelve, amelyek között a (43b, c) összefüggés áll fenn, akkor e szám-n^{r+s}-eseket $r+s$-e d r e n d ű v e g y e s, mégpedig r-szeresen kovariáns és s-szeresen kontravariáns t e n z o r o k nak, a bennük összefoglalt számokat*

* A regularitást a mindjárt következő $g = V^2 = 0$ összefüggés biztosítja.

pedig komponenseiknek nevezzük, egyaránt a P pontra vagy az u^{α}*, ill.* $\bar{u}^{\gamma}$ *koordinátákra vonatkozólag. E tenzorokat* $h_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}$*, ill.* $h_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\delta_2\ldots\delta_s}$ *általános komponensekkel jelöljük, a kovariáns, ill. kontravariáns transzformálódásra utaló alsó, ill. felső indexeléssel.*

A definícióból kitűnik, hogy az általános tenzorkomponens összes indexeinek száma a tenzor *rendszámát* szolgáltatja. Ha speciálisan $r = 0$, akkor tenzorunk s-edrendű kontravariáns, ha pedig $s = 0$, akkor r-edrendű kovariáns. Mint már említettük, a skalár *nulladrendű*, a vektor *elsőrendű* tenzornak minősül.

2'. A $h_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}$ tenzorkomponensek [és így a (43b) szerint neki megfelelő $\bar{h}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\delta_2\ldots\delta_s}$-ek is] rendszerint nemcsak egy $P \in R_n$ pontban vannak megadva, hanem valamely $T \subset R_n$ tartomány minden egyes Q pontjában, mégpedig a pontról pontra változó u^{α} [ill. $\bar{u}^{\gamma}$] koordináták függvényeként. Ily módon a T tartomány Q pontjaihoz hozzákötött $r + s$-edrendű tenzorok halmaza, ún. *$r + s$-edrendű tenzormező* áll elő.

Az R_n RIEMANN-térben tehát általában *kötött* tenzorokkal dolgozunk; ezzel szemben az E_n euklidesi térben (amely a RIEMANN-térnek speciális esete) tudvalevőleg *szabad* tenzorokkal van dolgunk. Ez az eltérés — mint a (21a-d)-ben már láttuk — onnan származik, hogy a $\partial u^{\alpha}/\partial\bar{u}^{\gamma}$ *parciális deriváltak* az R_n-térben a hely függvényei, viszont az E_n térben a helytől független állandók.

A (43b) transzformációs törvény *szerkezetével* kapcsolatban jegyezzük meg szóban is, hogy az eredeti tenzor minden indexének (pl. α_1-nek) a jobb oldali $(r + s)$-szeres szumma valamennyi tagjában megfelel egy parciális derivált, az illető indexszel (α_1) és a transzformált tenzor megfelelő indexével (γ_1). A (bal oldali) transzformált tenzor indexei $(\gamma_\varrho, \delta_\sigma)$ *szabad indexek* (a jobb oldalon csak egyszer szerepelnek, a transzformált koordinátadifferenciálok indexeiként; $1/\partial\bar{u}^{\gamma_\varrho}$, $\partial\bar{u}^{\delta_\sigma}$). Ezzel szemben a (jobb oldali) eredeti tenzor indexei $(\alpha_\varrho, \beta_\sigma)$ *szummációs indexek* (a jobb oldalon másodszor is előfordulnak, az eredeti koordinátadifferenciálok indexeiként; $\partial u^{\alpha_\varrho}$, $1/\partial u^{\beta_\sigma}$). Az eredeti és a transzformált tenzor kovariáns $(\alpha_\varrho, \gamma_\varrho)$ és kontravariáns indexei $(\beta_\sigma, \delta_\sigma)$ a jobb oldali parciális deriváltakban a korábban tanultaknak megfelelően (ún. indexhelyesen) szerepelnek. Természetesen itt is lényeges az indexek (felső vagy alsó) elhelyezése és sorrendje. Későbben kiderül, hogy *a felső és az alsó indexeket* miért *írjuk vízszintesen eltolva,* nem pedig egymás alá.

3'. Szóljunk végül az általános tenzor esetleges *szimmetriaviszonyairól!* Efféle szimmetriák az alkalmazásokban szerepet játszó tenzoroknál is előfordulnak.

Valamely tenzort egy (kontravariáns vagy kovariáns) *indexpárjára nézve szimmetrikusnak* mondunk, ha érintett komponensei az illető két index felcserélésénél nem változnak. Egy (kontravariáns, vagy kovariáns) tenzort (teljesen) *szimmetrikusnak vagy tükrösnek* nevezünk, ha minden lehetséges indexpárjára nézve szimmetrikus. Megjegyzendő, hogy egy *másodrendű* tükrös tenzor — beláthatóan —

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

független komponenssel rendelkezik.

Pl⁶. *A mértéktenzor tükrös* $(g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha})$, amint ezt az R_2-tér és az E_3-tér viszonylatában már észleltük $(\boldsymbol{r}_\alpha\boldsymbol{r}_\beta = g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = \boldsymbol{r}_\beta\boldsymbol{r}_\alpha$, ill. $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = g_{ij} = g_{ji} = \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i)$.

Valamely tenzort egy (kontravariáns vagy kovariáns) *indexpárjára nézve antiszimmetrikusnak* mondunk, ha érintett komponensei az illető két index (egymástól eltérő értékeinek) felcserélésénél előjelet váltanak (egymással megegyező értékeinél

pedig nyilván zérussal egyenlők). Egy (kontravariáns vagy kovariáns) tenzort (teljesen) *antiszimmetrikusnak vagy váltónak* nevezünk, ha valamennyi lehetséges indexpárjára nézve antiszimmetrikus. Megyjegyzendő, hogy egy másodrendű váltó tenzor — a mátrixa főátlójában szereplő zérusok leszámításával, beláthatóan —

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

független komponenssel rendelkezik.

A szimmetria és antiszimmetria, mint mondottuk, mindig valamely *egynemű indexpárra* vonatkozik. Ha pl. tenzorunk az α_1 és α_r kovariáns indexpárra nézve szimmetrikus, azaz

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s} = h_{\alpha_r \alpha_2 \ldots \alpha_1}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s},$$

akkor transzformáltja is szimmetrikus marad a megfelelő γ_1 és γ_r kovariáns indexpárra nézve, lévén — a (43b) szerint —

$$\bar{h}_{\gamma_r \gamma_2 \ldots \gamma_1}{}^{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_s} = h_{\alpha_r \alpha_2 \ldots \alpha_1}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s} \cdot \frac{\partial u^{\alpha_r}}{\partial \bar{u}^{\gamma_r}} \frac{\partial u^{\alpha_2}}{\partial \bar{u}^{\gamma}} \cdots \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial \bar{u}^{\gamma_1}} \frac{\partial \bar{u}^{\delta_1}}{\partial u^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}^{\delta_s}}{\partial u^{\beta_s}} = \bar{h}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r}{}^{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_s},$$

(ui. a jobb oldalon csak két tényező sorrendje változott). Ugyanez észlelhető egy (pl. kovariáns) indexpárra nézve antiszimmetrikus tenzor és transzformáltja vonatkozásában. Kimondható tehát, hogy az egynemű indexpárra vonatkozó, következésképpen a teljes *szimmetria és antiszimmetria* is *a tenzor koordinátainvariáns sajátságai.*

b) Általános tenzoralgebra

α) Műveletek tenzorokkal

1°. Tenzorok összeadása. 1'. Két tenzort akkor mondunk egyenlő szerkezetűnek, *egyneműnek,* ha megegyeznek egymással a kontravariáns indexek számában, valamint a kovariánsokéban is. Nyilvánvalóan, csak egyenlő rendű tenzorok esetén lehet szó egyneműségről.

Az összeadás műveletét csak egynemű tenzorokra értelmezzük. *Két egynemű tenzor,* $a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s}$ és $b_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s}$, *valamint hasonnemű összege,* $s_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s}$ *a megfelelő (megegyező indexű) komponensek között az*

$$s_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s} = a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s} + b_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s} \tag{1}$$

összefüggést mutatja fel. Más szóval, összeadásnál az egynemű összeadandó tenzorok megfelelő komponensei összeadódnak.

Pl[1]. $a_{\alpha\beta} = c_\alpha d_\beta$, $b_{\alpha\beta} = e_\alpha f_\beta$; $s_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} = c_\alpha d_\beta + e_\alpha f_\beta$.

Az $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$ és a $b_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$ tenzor $d_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}$ *különbségét* a kisebbítendőnek és a kivonandó ellentettjének (komponenseiben ellenkező előjelű változatának) összegeként értelmezzük, azaz

$$d_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} + (-b_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}) \equiv a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} - b_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}. \tag{2}$$

2'. Nézzük az összeadás műveletének egy-két fontos alkalmazását! *Bármely másodrendű* $a_{\alpha\beta}$ *tenzornak és ún. transzponáltjának, az* $a_{\beta\alpha}$ *tenzornak* $s_{\alpha\beta}$ *összege tükrös, azaz*

$$s_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = s_{\beta\alpha}, \tag{3a}$$

az $a_{\alpha\beta}$ tenzornak és $u_{\beta\alpha}$ transzponáltjának $d_{\alpha\beta}$ *különbsége pedig váltó*, vagyis

$$d_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha} = -d_{\beta\alpha} \quad (d_{\alpha\alpha} = 0). \tag{3b}$$

A tükrös összeg- és a váltó különbségtenzort egyébként egyes szerzők

$$a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} \equiv 2a_{(\alpha\beta)}, \qquad a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha} \equiv 2a_{[\alpha\beta]} \tag{3c, d}$$

módon *jelölik*.

Az előzőkből következik, hogy *bármely másodrendű $a_{\alpha\beta}$ tenzor előállítható $a_{(\alpha\beta)}$ tükrös és $a_{[\alpha\beta]}$ váltó része összegeként*, azaz

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}) = a_{(\alpha\beta)} + a_{[\alpha\beta]}. \tag{4}$$

A (3a, b), (4) összefüggések másodrendű kovariáns és vegyes tenzorokra is érvényben maradnak.

Említésre méltó, hogy *az E_3-térben a $c_{jk} = 2a_j b_k$ diadikus tenzor $c_{[jk]} = a_j b_k - a_k b_j$ váltó része a*

$$\mathbf{c} = \mathbf{e}_i c^i = \frac{\mathbf{e}_i}{V} c_{[jk]} = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g}}(a_j b_k - a_k b_j) = \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k (a_j b_k - a_k b_j) = \tag{5}$$

$$= a_j \mathbf{e}^j \times b_k \mathbf{e}^k + a_k \mathbf{e}^k \times b_j \mathbf{e}^j = a_f \mathbf{e}^f \times b_g \mathbf{e}^g = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (i, j, k: \text{cikl}!, \; \sqrt{g} = V = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \neq 0)$$

vektoriális szorzatvektorral ekvivalens. Ugyanez a reláció a $\mathbf{c}$ szorzatvektor kovariáns és az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ tényezővektorok kontravariáns komponenseivel is nyerhető.

3'. Igazolható továbbá, hogy az R_n-térben *bármely tenzor előállítható* olyan ún. *multiplikatív tenzorok összegeként,* amelyeknek minden komponense vektorkomponensek szorzata. Az igazolást pl. $t^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ alakú harmadrendű tenzorra szorítkozva eszközöljük. E tenzor komponenseinek — vonatkozási koordináta-rendszerükben — megfeleltetünk egy $\overset{(\alpha)}{\boldsymbol{a}}, \overset{(\beta)}{\boldsymbol{b}}, \overset{(\gamma)}{\boldsymbol{c}}$ vektorhármast a következőképpen:

$$\overset{(\alpha)}{a^\lambda} \doteq \begin{cases} t^{\alpha\beta}{}_{\gamma}, & \text{ha } \lambda = \alpha, \\ 0, & \text{ha } \lambda \neq \alpha; \end{cases} \quad \overset{(\beta)}{b^\mu} \doteq \begin{cases} 1, & \text{ha } \mu = \beta, \\ 0, & \text{ha } \mu \neq \beta; \end{cases} \quad \overset{(\gamma)}{c_\nu} \doteq \begin{cases} 1, & \text{ha } \nu = \gamma. \\ 0, & \text{ha } \nu \neq \gamma. \end{cases} \tag{6a}$$

A $\doteq$ jel itt arra utal, hogy az egyenlőség csak egy meghatározott koordináta-rendszerben (esetünkben éppen az előbb említettben) áll fenn. Vektorhármasunk ilyen értelmezése mellett a komponenseikből felépíthető valamennyi multiplikatív tenzornak csak egy zérustól különböző komponense van, az adott koordináta-rendszerben. Ezért írható, hogy abban

$$t^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = \sum_{(p)(q)(r)}^{n} \overset{(p)}{a^\alpha} \overset{(q)}{b^\beta} \overset{(r)}{c_\gamma} \doteq \overset{(\alpha)}{a^\alpha} \overset{(\beta)}{b^\beta} \overset{(\gamma)}{c_\gamma}, \qquad \text{q. e. d.} \tag{6b}$$

Bár az összeadás művelete invariáns, összefüggésünk mégis minden egyéb koordináta-rendszerben érvényét veszti.

II°. T e n z o r o k s z o r z á s a. 1'. A szorzás művelete tetszőleges rendű és szerkezetű tenzorokra értelmezhető. *Ha egy $a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q}$ tenzor minden egyes komponensét egy másik, tetszőleges $b_{\gamma_1 \ldots \gamma_r}{}^{\delta_1 \ldots \delta_s}$ tenzor minden egyes komponensével megszorozzuk és e szorzatokat a tenzortényezők és indexeik sorrendjének megfelelően indexeljük, akkor az így nyert*

$$p_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \gamma_1 \ldots \gamma_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q \delta_1 \ldots \delta_s} = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} b_{\gamma_1 \ldots \gamma_r}{}^{\delta_1 \ldots \delta_s} \tag{7}$$

rendezett szám-n $^{p+q+r+s}$*-et a két (adott sorrendben tényezőül vett) tenzor* s z o r z a t *ának nevezzük.*

A (43b) transzformációs formula alkalmazásával írható, hogy

$$\bar{p}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \mu_1 \ldots \mu_r}{}^{\lambda_1 \ldots \lambda_q \nu_1 \ldots \nu_s} = \bar{a}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}{}^{\lambda_1 \ldots \lambda_q} \bar{b}_{\mu_1 \ldots \mu_r}{}^{\nu_1 \ldots \nu_s} = \tag{8}$$

$$= a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial \bar{u}^{\varkappa_1}} \cdots \frac{\partial u^{\alpha_p}}{\partial \bar{u}^{\varkappa_p}} \cdot \frac{\partial \bar{u}^{\lambda_1}}{\partial u^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}^{\lambda_q}}{\partial u^{\beta_q}} \cdot b_{\gamma_1 \ldots \gamma_r}{}^{\delta_1 \ldots \delta_s} \frac{\partial u^{\gamma_1}}{\partial \bar{u}^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial u^{\gamma_r}}{\partial \bar{u}^{\mu_r}} \frac{\partial \bar{u}^{\nu_1}}{\partial u^{\delta_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}^{\nu_s}}{\partial u^{\delta_s}} =$$

$$= p_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \gamma_1 \ldots \gamma_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q \delta_1 \ldots \delta_s} \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial \bar{u}^{\varkappa_1}} \cdots \frac{\partial u^{\gamma_1}}{\partial \bar{u}^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}^{\lambda_1}}{\partial u^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}^{\nu_1}}{\partial u^{\delta_1}} \cdots;$$

az említett komponensszorzatok tehát maguk is tenzorkomponensként viselkednek, más szóval két tenzor szorzata valóban maga is tenzor. Látható, hogy a tenzorok szorzásánál *a rendszámok* ($p+q$ és $r+s$) és azokon belül a kovarianciaszámok (p és r), nemkülönben a kontravariancia-számok (q és s) *összeadódnak* ($p+q+r+s$; $p+r$, $q+s$).

A fenti definíció beláthatóan *speciális esetként* felöleli a tenzornak skalárral (nulladrendű tenzorral) való szorzatát, továbbá két vagy több vektor (elsőrendű tenzor) szorzatát is (a szorzat nyilván diadikus, ill. multiplikatív tenzor).

A tenzorok szorzása nem kommutatív művelet; ui.

$$p_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \gamma_1 \ldots \gamma_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q \delta_1 \ldots \delta_s} = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q} b_{\gamma_1 \ldots \gamma_r}{}^{\delta_1 \ldots \delta_s} \neq$$

$$\neq p_{\gamma_1 \ldots \gamma_r \alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\delta_1 \ldots \delta_s \beta_1 \ldots \beta_q} = b_{\gamma_1 \ldots \gamma_r}{}^{\delta_1 \ldots \delta_s} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}^{\beta_1 \ldots \beta_q}, \tag{9}$$

mert e két tenzor ugyan megegyezik egymással komponenseik halmazában, de eltér e halmaz rendezésében; vagyis egyazon komponens a két tenzorban különböző* indexelést nyer, s emiatt a két tenzor nem egyenlő egymással, q. e. d.

Pl[2]. Az $a_\alpha{}^\beta$ másodrendű vegyes tenzor és a b^γ kontravariáns vektor szorzatai ezek:

$$p_\alpha{}^{\beta\gamma} = a_\alpha{}^\beta b^\gamma \neq p_\alpha{}^{\gamma\beta} = b^\gamma a_\alpha{}^\beta.$$

Mindkettő harmadrendű, mégpedig kétszeresen kontravariáns és egyszeresen kovariáns tenzor, a kontravariáns indexek eltérő sorrendje miatt azonban nem egyenlők egymással.

Pl[3]. Az $a_{\alpha\beta}$ és $b_\gamma{}^{\delta\varepsilon}$ tenzorok $a_{\alpha\beta}\, b_\gamma{}^{\delta\varepsilon}$ szorzata így transzformálódik:

$$\bar{a}_{\varkappa\lambda}\, \bar{b}_\mu{}^{\nu\sigma} = a_{\alpha\beta}\, b_\gamma{}^{\delta\varepsilon} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\varkappa} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\lambda} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\mu} \frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\delta} \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial u^\varepsilon};$$

a szorzat háromszorosan kovariáns és kétszeresen kontravariáns ötödrendű tenzor.

A fentebbi, szokványos műveletek után lássunk egy-két sajátos, gyakran előnyösen alkalmazható tenzorműveletet!

III°. K ü l ö n l e g e s t e n z o r m ű v e l e t e k. 1'. *Vegyes tenzor* k o n t r a h á l á s *án*** *egy kovariáns és egy kontravariáns (szabad) indexének egyenlővé tételét és ennek megfelelően szummációs indexként való kezelését értjük.* Jelölése:

$$\underset{(\alpha=\beta)}{t^{\alpha}{}_{\beta\gamma}{}^{\cdots}_{\cdots}} = t^{\alpha}{}_{\alpha\gamma}{}^{\cdots}_{\cdots} \equiv \tau_\gamma{}^{\cdots}_{\cdots}; \tag{10}$$

(a pontok az esetleges további indexekre utalnak).

* Pontosabban: a kovariáns indexek sorrendjében és a kontravariansokében is eltérő.
** Németül *Verjüngung*, oroszul свертывание.

Könnyű megmutatni, hogy a kontrahált tenzor *rendszáma kettővel,* kovariancia- és kontravariancia-száma pedig eggyel-eggyel *alacsonyabb* az eredetinél. Ui., ha a

$$\bar{t}^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}^{\cdots}_{\cdots} = t^{\alpha}{}_{\beta\gamma}{}^{\cdots}_{\cdots} \frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial \bar{u}^{\mu}} \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\nu}} \tag{11a}$$

transzformációs formulában a $\lambda = \mu$ egyenlítést eszközöljük, akkor — az a) β) (18a) összefüggés alkalmazásával — a

$$t^{\lambda}{}_{\lambda\nu}{}^{\cdots}_{\cdots} = t^{\alpha}{}_{\beta\gamma}{}^{\cdots}_{\cdots} \frac{\partial \bar{u}^{\lambda}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial \bar{u}^{\lambda}} \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\nu}} = t^{\alpha}{}_{\beta\gamma}{}^{\cdots}_{\cdots} \delta_{\alpha}{}^{\beta} \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\nu}} = t^{\alpha}{}_{\alpha\gamma} \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\nu}} \equiv \tau_{\gamma}{}^{\cdots}_{\cdots} \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\nu}}, \text{ q. e. d.} \tag{11b}$$

Megjegyzendő, hogy a vegyes tenzor egyidejűleg *két, három s. i. t. különnemű indexpárja szerint is kontrahálható,* a rendszám 4, 6 s. i. t. egységgel való csökkenése mellett.

Pl[4]. A $d_{\alpha}{}^{\beta}$ vegyes tenzor kontrahálása egy skalárra vezet, mégpedig

$$d_{\alpha}{}^{\alpha} = d_1^1 + d_2^2 + \ldots + u_n^n = \delta,$$

lévén

$$\bar{d}_{\gamma}{}^{\gamma} = d_{\alpha}{}^{\beta} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\gamma}} \frac{\partial \bar{u}^{\gamma}}{\partial u^{\beta}} = d_{\alpha}{}^{\beta} \delta_{\beta}{}^{\alpha} = d_{\alpha}{}^{\alpha} = \delta.$$

Pl[5]. Hasonlóan ellenőrizhető, hogy

$$\underset{(\beta=\gamma)}{t_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta\varepsilon}} = t_{\alpha\beta}{}^{\beta\delta\varepsilon} \equiv \tau_{\alpha}{}^{\delta\varepsilon}.$$

2'. *Két tenzor* *á t t o l á s á n** *a két tenzor összeszorzását és a szorzattenzor kontrahálását értjük, a két tényező egy-egy különnemű indexe szerint.* Jelölése:

$$\underset{(\alpha=\vartheta)}{s_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta\cdots}_{\cdots} t_{\varepsilon}{}^{\zeta\vartheta\cdots}_{\cdots}} = \underset{(\alpha=\vartheta)}{p_{\alpha\beta\ldots\varepsilon\ldots}{}^{\gamma\delta\ldots\zeta\vartheta\cdots}_{\cdots}} = p_{\alpha\beta\ldots\varepsilon\ldots}{}^{\gamma\delta\ldots\zeta\alpha\cdots}_{\cdots} \equiv \pi_{\beta\ldots\varepsilon\ldots}{}^{\gamma\delta\ldots\zeta\cdots}_{\cdots}. \tag{12}$$

Figyelembe véve tetszőleges tenzor előállíthatóságát multiplikatív tenzorok összegeként, a szóban forgó művelet *lehetővé teszi bármely tenzor típusának, szerkezetének minden lehetséges módosítását,* feltéve, hogy tenzoraink metrikus térben (vagyis mértéktenzormezővel rendelkező térben) vannak értelmezve. Igazolásul — másodrendű tenzorra szorítkozva — induljunk ki a (6a, b) szerinti

$$t^{\alpha\beta} = \sum_{(p)(q)}^{n} \overset{(p)}{a}{}^{\alpha} \overset{(q)}{b}{}^{\beta}$$

előállításából. Ezt $g_{\alpha\gamma}$ $(= \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{r}_{\gamma})$-val megszorozva, és az a) γ) II° (42a, b) összefüggéseket (pontosabban ezek n-dimenziós megfelelőit) felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$g_{\alpha\gamma} t^{\alpha\beta} = \sum_{(p)(q)}^{n} g_{\alpha\gamma} \overset{(p)}{a}{}^{\alpha} \overset{(q)}{b}{}^{\beta} = \sum_{(p)(q)}^{n} \overset{(p)}{a}_{\gamma} \overset{(q)}{b}{}^{\beta} = t_{\gamma}{}^{\beta}.$$

Hasonlóan nyerhető, hogy

$$g_{\beta\delta}\, g_{\alpha\gamma}\, t^{\alpha\beta} = g_{\beta\delta}\, t_{\gamma}{}^{\beta} = t_{\gamma\delta}.$$

Amint látható, a kovariáns mértéktenzorral való egyszeri, ill. kétszeri áttolás útján a kontravariáns $t^{\alpha\beta}$ tenzor egy, ill. két *indexe „lehúzható"*, azaz vegyes $t_{\gamma}{}^{\beta}$, ill. kovariáns $t_{\gamma\delta}$ tenzorrá alakítható.

* Németül: *Überschiebung.*

Értelemszerűen hasonló megfontolásokkal adódnak az alábbi fordított formulák:

$$g^{\alpha\gamma} t_{\alpha\beta} = t^{\gamma}{}_{\beta}, \qquad g^{\beta\delta} g^{\alpha\gamma} t_{\alpha\beta} = g^{\beta\delta} t^{\gamma}{}_{\beta} = t^{\gamma\delta},$$

vagyis a kontravariáns mértéktenzorral való egyszeri, ill. kétszeri áttolás útján a kovariáns $t_{\alpha\beta}$ tenzor egy, ill. két *indexe „feltolható"*.

Az indexek eme lehúzására és feltolására való tekintettel egy tenzor *különnemű indexeit* nem célszerű közvetlenül egymás alá írni, hanem *egymáshoz képest vízszintesen eltolt helyzetbe.* Egyébként a kovariáns és a kontravariáns indexcsoport sorrendje közömbös, csupán ezen indexcsoportokon belül kell mindvégig megtartani a kezdetben megválasztott sorrendet, amint ezt már korábban is említettük.

Pl[6]. Indexlehúzások harmadrendű tenzornál (metrikus térben):

$$g_{\alpha\delta} t^{\alpha\beta\gamma} = t_{\delta}{}^{\beta\gamma}, \qquad g_{\beta\varepsilon} t_{\delta}{}^{\beta\gamma} = t_{\delta\varepsilon}{}^{\gamma}, \qquad g_{\gamma\zeta} t_{\delta\varepsilon}{}^{\gamma} = t_{\delta\varepsilon\zeta}.$$

Pl[7]. Mutassuk meg, hogy egy $a^{\alpha\beta}$ váltó és egy $b_{\gamma\delta}$ tükrös tenzor kétszeres áttolása zérustenzort eredményez, azaz

$$a^{\alpha\beta} = -a^{\beta\alpha} \quad (a^{\alpha\alpha} = 0), \qquad b_{\gamma\delta} = b_{\gamma\delta} \text{ esetén } a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0.$$

Igazolásul írható, hogy

$$a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = a^{\alpha\alpha} b_{\alpha\alpha} + \underset{(\alpha\neq\beta)}{a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}} = 0 + \underset{(\alpha\neq\beta,\ \alpha>\beta)}{(a^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta}) b_{\alpha\beta}} = 0 + 0 = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

IV°. T e n z o r a l g e b r a i e l ő á l l í t á s o k. Az előzők felhasználásával — összefoglalásul és kiegészítésül — lássuk néhány nevezetes skalár-, vektor- és tenzorkifejezés tenzoralgebrai előállítását, ill. értelmezését!

1'. A korábbiakban többször említett

$$m^{\alpha\beta} = a^{\alpha} a^{\beta}, \qquad m_{\alpha\beta} = a_{\alpha} b_{\beta}, \qquad m^{\alpha}{}_{\beta} = a^{\alpha} b_{\beta};$$
$$m^{\alpha\beta\gamma} = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}, \qquad m^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = a^{\alpha} b^{\beta} c_{\gamma}, \ldots \tag{16a, b}$$

alakú, ún. *multiplikatív tenzorokat* nyilván vektorok (elsőrendű tenzorok) szorzattenzorának tekinthetjük.

2'. Tetszőleges vektor (elsőrendű tenzor) *kontravariáns és kovariáns komponenseinek* ismert

$$a^{\alpha} = g^{\alpha\beta} a_{\beta}, \qquad a_{\gamma} = g_{\gamma\delta} a^{\delta} \tag{17a, b}$$

összefüggését láthatóan a mértéktenzor és a vektor áttolása eredményezi. Ugyanez mondható a (13b-14b-15) alatti *indexlehúzó, ill. -feltoló formulákról,* a mértéktenzor és tetszőleges másod-, harmadrendű tenzor vonatkozásában; az utóbbi tenzor n-edrendű is lehet.

3'. Az a^{α} kontravariáns és b_{β} kovariáns vektor ún. *skaláris szorzatát* a

$$\underset{(\alpha=\beta)}{c^{\alpha}{}_{\beta}} = \underset{(\alpha=\beta)}{a^{\alpha} b_{\beta}} = a^{\alpha} b_{\alpha} = a^1 b_1 + a^2 b_2 + \ldots + a^n b_n \equiv \gamma \tag{18a}$$

áttolással tudjuk előállítani.

Hasonló módon nyerhető az $[a_{\alpha\beta}]$ és $[b^{\gamma\delta}]$ *kvadratikus mátrixok szorzata,* nevezetesen

$$[\underset{(\beta=\gamma)}{c_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}}] = [\underset{(\beta=\gamma)}{a_{\alpha\beta} b^{\gamma\delta}}] = [a_{\alpha\beta} b^{\beta\delta}] = [a_{\alpha 1} b^{1\delta} + a_{\alpha 2} b^{2\delta} + \ldots + a_{\alpha n} b^{n\delta}] \equiv$$
$$\equiv [a_{\alpha\beta}]\, [b^{\beta\delta}] \equiv [\gamma_{\alpha}{}^{\delta}]; \tag{19a}$$

ugyanúgy

$$[a^\alpha{}_\beta]\,[b^\beta{}_\delta] = [\gamma^\alpha{}_\delta], \qquad [a_{\alpha\beta}]\,[b^\beta{}_\delta] = [\gamma_{\alpha\delta}], \qquad [a^\alpha{}_\beta]\,[b^{\beta\delta}] = [\gamma^{\alpha\delta}].$$

4'. Mint az (5)-nél láttuk, tetszőleges $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E_3$ bázisra vonatkozólag a_j, ill. b_k komponensű $\boldsymbol{a}$, ill. $\boldsymbol{b}$ vektor $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ *vektoriális szorzat* a $c_{jk} = 2a_jb_k$ diadikus tenzor $[c_{jk}] = a_jb_k - a_kb_j$ váltó részével ekvivalens. Ennek általánosításaként, az E_n térben a (vektorként már nem létező) vektoriális szorzatnak a

$$c_{[\alpha\beta]} = a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{20}$$

váltó tenzort lehet megfeleltetni.

5'. Végül itt adjuk meg *a tenzorfogalomnak egy második értelmezését!* A b)γ) pontban megismert első értelmezés szerint (de kissé szabadabb fogalmazásban) a tenzor olyan, általában a helyzetkoordinátáktól függő valós számhalmazzal meghatározott (fizikai vagy geometriai) mennyiség, amely megengedett koordinátatranszformációnál a (43b) törvény szerint transzformálódik. A második értelmezést szolgáltatja az alábbi

Tétel: *Ha tetszőleges független vektorok a^α, b_β, ... komponensei, valamint $t^\lambda{}_{\mu}{}^{\cdots}_{\cdots}$ mennyiségek segítségével skalár állítható elő*

$$\varphi = t^\beta{}_\alpha{}^{\cdots}_{\cdots}\, a^\alpha b_\beta \ldots \tag{21a}$$

módon, akkor a $t^\lambda{}_\mu{}^{\cdots}_{\cdots}$ mennyiségek tenzorkomponensek.

Igazolásul írjuk fel a φ invariáns skalár eredeti és transzformált alakját, a vektorkomponensek inverz transzformációs formulájának felhasználásával:

$$\varphi = \bar t^\delta{}_\gamma{}^{\cdots}_{\cdots}\, \bar a^\gamma \bar b_\delta \ldots = t^\beta{}_\alpha{}^{\cdots}_{\cdots}\, a^\alpha b_\beta \ldots = t^\beta{}_\alpha{}^{\cdots}_{\cdots}\, \bar a^\gamma \bar b_\delta \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\gamma}\frac{\partial \bar u^\delta}{\partial u^\beta} \ldots, \tag{21b}$$

ahonnan

$$\left(\bar t^\delta{}_\gamma{}^{\cdots}_{\cdots} - t^\beta{}_\alpha{}^{\cdots}_{\cdots}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\gamma}\frac{\partial \bar u^\delta}{\partial u^\beta}\right)\bar a^\gamma \bar b_\delta = 0. \tag{21c}$$

Mivel pedig az egyenlőségnek a vektorkomponensek és a megengedett transzformáció bármilyen megválasztásánál (így az $\bar a^\gamma \bar b_\delta \neq 0$ esetekben is) fenn kell állnia, ezért a zárójeles kifejezés szükségképpen zérus értékű; következésképpen

$$\bar t^\delta{}_\gamma{}^{\cdots}_{\cdots} = t^\beta{}_\alpha{}^{\cdots}_{\cdots}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\gamma}\frac{\partial \bar u^\delta}{\partial u^\beta}, \tag{21d}$$

amely összefüggés éppen $t^\beta{}_\alpha{}^{\cdots}_{\cdots}$ tenzorjellegét igazolja.

β) A tenzoralgebra geometriai alkalmazásai

1°. Affin transzformáció. 1'. Térjünk ki külön is e transzformációra, egyrészt az alkalmazásokban elfoglalt jelentős szerepére való tekintettel, másrészt a könyvünk 4., ill. 5. §-ában tárgyalt közönséges, ill. általános tenzorok kapcsolatának megvilágítása céljából.

Tekintsük az a_{ij} kovariáns másodrendű tenzor és az x^j kontravariáns vektor *áttolásának*

$$\bar x_i = a_{ij}\, x^j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{22a}$$

eredményét, egyelőre az E_3-térre szorítkozva. Az $\bar{x}_i$, ill. x^j mennyiségeket egy $0 \in E_3$ origójú *egyenes vonalú* (derék-, vagy ferdeszögű) K koordináta-rendszerben valamely $Q \in E_3$, ill. $P \in E_3$ ponthoz vont $\overrightarrow{OQ} = \bar{\boldsymbol{x}}$, ill. $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{x}$ helyzetvektor kovariáns, ill. kontravariáns komponenseinek tekintve, az a_{ij} mennyiségeket pedig valamely $\boldsymbol{A}$ jelű* másodrendű tenzor hasonló vonatkozású kovariáns komponenseinek, a (22a) formula az

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{22b}$$

alakba írható át. Előnyös a K koordináta-rendszert ***derékszögűnek*** **választani**, mert abban a kontravariáns és a kovariáns vektorkomponensek összeesnek (azaz $\bar{x}_i = \bar{x}^i$ és $x_j = x^j$), s ily módon a (22a) formula — részletesen kiírva —

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \bar{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \bar{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{22c}$$

alakot ölt.

2'. Ez a homogén lineáris függvényrendszer *kettős értelmezésre* ad módot. Egyrészt *koordinátatranszformációnak* tekinthető, amely az $\boldsymbol{x}$ vektor K-beli x_j derékszögű koordinátáihoz ugyanazon $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ vektor $\bar{K}$-beli $\bar{x}_i$ derékszögű koordinátáit** rendeli. [Ferdeszögű K és $\bar{K}$ koordinátarendszer esetén az eredeti (22a) formula az $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ vektor x^j komponenseiről az $\bar{x}_i$-kre való áttérést eszközli.]

Másrészt *tértranszformációnak*, másnéven *mozgásnak* foghatjuk fel a (22b, c) formulákat, amelyek a K derékszögű koordináta-rendszerbeli $\boldsymbol{x} = (x_j)$ vektorok (halmazát) terét az ugyancsak K-beli $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_i)$ vektorok terébe képezik le. (Ferdeszögű K esetén az $\boldsymbol{x} = (x^j) \to \bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_i)$ leképzésről van szó.

A lineáris homogén (22a-c) formulákkal jellemzett koordináta- és tértranszformációt — tudvalevőleg — *affin* jelzővel illetjük. A 4. §-ban már behatóan foglalkoztunk vele és alkalmazásaival.

2'. Fontossága miatt térjünk röviden a (22b, c) affin transzformáció egy speciális esetére***, mégpedig az

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{e}_j x_j) = \boldsymbol{c}_j x_j, \qquad \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{c}_l = \delta_{jl}, \qquad |\boldsymbol{C}| = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3 = 1, \tag{25a, b}$$

vagy skalárokkal

$$\bar{x}_i = c_{ij}\,x_j, \qquad \underset{(j \neq l)}{c_{ij}\,c_{il}} = 0, \qquad \underset{(j = \text{const})}{c_{ij}\,c_{ij}} = 1, \qquad \det(c_{ij}) = 1$$

formulákkal meghatározott ún. *ortogonális transzformációra*****. Ez az $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j = \delta_{jl}\,\boldsymbol{e}_l$ tárgyvektort az $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}_j$ képvektorba, tehát a $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3;\ \boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}\}$ ortonormált bázist a $\bar{B} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3;\ \boldsymbol{c}_i\,\boldsymbol{c}_j = \delta_{ij}\}$ ortonormált bázisba forgatja át (az O origó, mint fix pont körül). Ennek megfelelően a $\boldsymbol{C} = [c_{ij}] = [\boldsymbol{e}_i\,\boldsymbol{c}_j] = [\cos(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{c}_j)]$ tenzort forgató operátor, műszóval *verzor* néven szokták emlegetni.

* A az E_3-térbeli másodrendű tenzorok körében általánosan használt jelölés; a 4. §-ban is ezt használtuk.

** A K és a $\bar{K}$ akár jobb, akár balrendszerű és akár tengelyenként eltérő egységű lehet.

*** A szummációs megállapodást itt átmenetileg két, egy tagban szereplő, egynemű, megegyező indexre alkalmazzuk.

**** Ez szintén felfogható koordináta- és tértranszformációnak.

A $C = [c_{ij}]$ verzor $C_v = [c_{[ij]}] = \frac{1}{2}[c_{ij} - c_{ji}]$ váltó részével ekvivalens

$$c = c_k e_k = \frac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji})\, e_k = c_{[ij]}\, e_k \qquad (i,\ j,\ k\text{: cikl !}) \qquad (25c)$$

vektort *forgásvektornak* nevezik, mert meghatározza a B-t a $\bar{B}$-be átvivő forgás tengelyét, valamint szögét (nagyság és értelem szerint).

Pl. Az x_3 tengely körüli, α szögű elfordulás jellemzése:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ \bar{x}_2 &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \\ \bar{x}_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}, \qquad C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C_t + C_v =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c = 0e_1 + 0e_2 + \sin\alpha \cdot e_3 = \sin\alpha \cdot e_3$$

$$c_3 = \frac{1}{2}(c_{12} - c_{21}) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] = \sin\alpha.$$

Megjegyzendő, hogy a skaláris szorzat s vele együtt *a vektorok hossza és hajlásszöge invariáns az ortogonális transzformációval szemben.* Ui.

$$\bar{x}\bar{y} = c_j x_j\, c_l y_l = (c_j\, c_l)\, x_j\, y_l = \delta_{jl}\, x_j\, y_l = x_j\, y_j = xy, \qquad (25)$$

$$N(\bar{x}) \equiv |\bar{x}|^2 = \bar{x}^2 = x^2 = |x|^2 \equiv N(x), \qquad \cos\bar{\varphi} = \bar{x}^0\bar{y}^0 = x^0 y^0 = \cos\varphi, \quad \text{q. e. d.}$$

Az előbbiek előnyösen alkalmazhatók *merev test fix pont körüli forgásának* leírására.

3'. Itt emlékeztetünk röviden az (ortonormált bázisú E_3-térben értelmezett) $a_{ij} = a_{ji}$ tükrös tenzorral kapcsolatos

$$\det(a_{ij} - \lambda\, \delta_{ij}) = -(\lambda^3 - a_{\rm I}\, \lambda^2 + a_{\rm II}\, \lambda - a_{\rm III}) = 0; \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \qquad (26a)$$

sajátérték-feladatra és az a_{ij} tenzornak itt fellépő

$$a_{\rm I} = \sum_i a_{ii} = \sum_i \lambda_i, \qquad a_{\rm II} = \sum_i \text{compl. minor}\,(a_{ii}) = \sum_{i \neq j} \lambda_i\, \lambda_j,$$

$$a_{\rm III} = \det(a_{ij}) = \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 \qquad (26b)$$

invariánsaira, bővebb kifejtés tekintetében a 4. § γ) helyre utalva.

II°. Térelméleti áttekintés. 1'. Most — főleg az a) β) IV°, a) γ) II° 4', b) α) I° 2' és b) α) IV° 4' részekre támaszkodva — foglaljuk össze röviden *az E_3 és az E_n euklidesi tér metrikus sajátságait!* Valamely $P \in E_3$ pontnak egy tetszőleges $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ ún. *affin bázissal* orientált egyenes vonalú ferdeszögű Ox^1, x^2, x^3 koordináta-rendszerre vonatkozó x^i (affin) koordinátái egyszersmind az $\overrightarrow{OP} = r$ helyzetvektor kontravariáns komponenseit (geometriailag: ferdeszögű v. paralel vetületeit) is szolgáltatják, azaz $r = x^i e_i$. A koordinátavonalak $r = x^i\, e_i$

($i = \text{const}$), érintőik $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{e}_i = \text{const}$ módon adhatók meg. A tér állandó *metrikáját* — az $\boldsymbol{e}_i$ vektorok skaláris szorzataként — a

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i = g_{ji} \neq f(\boldsymbol{r}) \tag{27}$$

mértéktenzor rögzíti le. Ezzel valamely $\boldsymbol{r} = x^i \boldsymbol{e}_i$ és $\boldsymbol{q} = y^j \boldsymbol{e}_j$ vektor *skaláris szorzata,* hossza és hajlásszöge

$$\boldsymbol{rq} = g_{ij}\, x^i y^j; \qquad |\boldsymbol{r}|^2 = \boldsymbol{r}^2 = g_{ij}\, x^i x^j, \qquad |\boldsymbol{q}|^2 = \boldsymbol{q}^2 = g_{ij}\, y^i y^j,$$

$$\cos\varphi = \boldsymbol{rq}/|\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{q}| = \boldsymbol{r}^0 \boldsymbol{q}^0. \tag{28a, b}$$

A $P(\boldsymbol{r})$ és $Q(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r})$ pont *távolsága* pedig

$$d^2 = \overline{PQ}^2 = |\Delta\boldsymbol{r}|^2 = \Delta\boldsymbol{r}^2 = g_{ij}\, \Delta x^i \Delta x^j \quad (> 0) \tag{28c}$$

módon nyerhető. Bevezetjük továbbá — az $\boldsymbol{e}_i$ vektorok vektoriális és vegyes szorzása útján — az

$$\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k / V \qquad (V = \sqrt{g} = \det(g_{ij}) = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \neq 0; \quad i, j, k = \text{cikl!}) \tag{29a}$$

vektorokból álló $B^{-1} = \{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ *reciprok bázist* s vele kapcsolatban a

$$g_i{}^j = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}^j = \delta_i{}^j, \qquad g^{ij} = \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j \tag{29b}$$

mértéktenzorokat. Az $\boldsymbol{r}$ vektor a B^{-1} bázison $\boldsymbol{r} = x_j \boldsymbol{e}^j$ alakban állítható elő, ahol az

$$x_j = x_i\, \delta_j{}^i = x_i\, \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_j = x^k \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_j = g_{kj} x^k \tag{30a}$$

számok az $\boldsymbol{r}$ vektor kovariáns komponensei (geometriailag: derékszögű vetületei). Az x^i és x_j komponensek összefüggése

$$x^i = g^{ij} x_j, \qquad g^{ij} = \frac{G^{ij}}{g} = \frac{\text{compl. minor}\,(g_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}. \tag{30b, c}$$

Hangsúlyozandó, hogy az $\vec{OP} = \boldsymbol{r} \in E_3$ vektorok invariánsak a (tetszőleges $\vec{OB} = \boldsymbol{b}$ mértékű) *párhuzamos eltolással szemben, azaz*

$$\boldsymbol{r} = \vec{OP} = x^i \boldsymbol{e}_i = x_j \boldsymbol{e}^j = \vec{BP'} = (x'^i - b^i)\, \boldsymbol{e}_i = (x'_j - b_j)\, \boldsymbol{e}^j. \tag{31}$$

Az $\boldsymbol{r} = x^i \boldsymbol{e}_i$ és $\boldsymbol{q} = y^j \boldsymbol{e}_j$ vektor *vektoriális szorzat* (-vektora), ill. a vele ekvivalens diadikus váltó tenzor

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{q} = x^i y^j (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) = \sqrt{g}\,(x^i y^j - x^j y^i)\, \boldsymbol{e}^k, \quad \text{ill.} \quad p^{ij} = \sqrt{g}\,(x^i y^j - x^j y^i) \tag{32a, b}$$

alakban jelentkezik. Végül ismét a skaláris szorzat, de most már minden lehetséges alakban

$$\boldsymbol{rq} = g_{ij}\, x^i y^j = g^{ij} x_i y_j = x_j y^j = x^j y_j \tag{32}$$

módon írható fel, összhangban az indexlehúzási és -feltolási művelettel.

Kiemelendő, hogy — az L_3 lineáris (affin) terével* szemben — az E_3 euklidesi tér B_3 bázisai már nem egyenértékűek, hanem a $B_3 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3;\ \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}\}$ alakú, ún. *ortonormált bázisok,* ill. a velük orientált egyenes vonalú derékszögű koor-

* L. pl. *Fazekas* [29].

dináta-rendszerek különösen előnyösek. Egy ilyen B_3-ban a fentebbi formulák (fontosabbjai) az alábbi alakokra *egyszerűsödnek:**

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{rq} = \delta_{ij} x^i y^j = x^i y^i, \quad |\boldsymbol{r}|^2 = (x^i)^2 \quad \boldsymbol{q}^2 = (y^i)^2, \quad \cos\varphi = \boldsymbol{rq}/|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{q}|,$$

$$d^2 = \Delta s^2 = |\Delta \boldsymbol{r}|^2 = (\Delta x^i)^2; \quad V = \sqrt{g} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = 1, \quad \boldsymbol{e}^i = (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)/V \equiv \boldsymbol{e}_i,$$

$$B_3^{-1} \equiv B_3, \quad x^i \equiv x_i, \quad g_i^j = g^{ij} = \delta_{ij}; \quad \boldsymbol{r} = x^i\boldsymbol{e}_i = (x'^i - b^i)\boldsymbol{e}_i;$$

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{q} = (x^i y^j - x^j y^i)\, \boldsymbol{e}_k, \quad p^{ij} = x^i y^j - x^j y^i. \tag{33}$$

Az ilyen E_3-tér geometriája azonos a *közönséges geometriával,* pl. a $\Delta s^2 = (\Delta x^i)^2$ (ún. euklidesi) norma a közönséges távolság-(négyzet-)fogalommal.

Az E_3-térről fentebb elmondottak értelemszerűen, formális analógiával *általánosíthatók* az E_n euklidesi térre! Ez esetben nem az irányított egyenesdarabok (ill. a megfelelő rendezett koordinátahármasok), hanem a rendezett valós szám-n-esek $\{(x^1, x^2, \ldots, x^n), \ldots\}$ halmaza képezi az (n-dimenziós) teret, egy $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \equiv (x^i)$ szám-n-es a tér egy P pontját, a (0) szám-n-es a tér O pontját, az OP pontpár a P pont $\boldsymbol{r}$ helyzetvektorát, alkalmas OE_i pontpárok pedig egy B_n *affin bázis* $\boldsymbol{e}_i$ vektorait (hacsak $\alpha^i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}$ csupán $\alpha^i = 0$ esetén igaz). A P pontnak a B_n bázissal orientált $Ox^1x^2 \ldots x^n$ koordináta-rendszerre vonatkozó x^i (affin) koordinátái az $\boldsymbol{r}$ kontravariáns komponenseivel azonosak, azaz $\boldsymbol{r} = x^i\boldsymbol{e}_i$. A koordinátavonalak és érintőik, a mértéktenzor, a skaláris szorzat, a hossz és hajlásszög, a távolság fentebbi formulái változatlanul érvényben maradnak (most $i, j, = 1, 2, \ldots, n$ indexváltozással), kiemelve a mértéktenzor elsődleges szerepét. Ezzel szemben a vektoriális szorzat (32a) szerinti értelmezése nem tartható fenn, hanem helyette a (32b) *diadikus váltó tenzor* veendő ($i, j = 1, 2, \ldots, n$-nel), amely azonban — az

$$\frac{n^2 - n}{2} \neq n, \quad \text{azaz} \quad n^2 - 3n = n(n-3) \neq 0 \quad (n \neq 3) \tag{34}$$

körülmény folytán — már nem ekvivalens egy (n-dimenziós) vektorral. Ily módon a B_n^{-1} reciprok (vagy adjugált) bázis képzése sem történhet a (29a) szerint, hanem — a g_{ij} tenzorból a (30c) szerint képezhető g^{ij} tenzor felhasználásával —

$$\boldsymbol{e}^i = g^{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{35}$$

módon, persze $i, j, = 1, 2, \ldots, n$-nel. Az $\boldsymbol{e}^i$-kel kapcsolatos egyéb korábbi formulák ismét érvényben maradnak, az említett indexváltozással.

Az előbbiek szellemében általánosítjuk a (33) formulákat az *ortonormált bázisú* E_n euklidesi térre, külön kiemelve a mértéktenzorral, a vektoriális szorzattal és a reciprok (adjungált) bázissal kapcsolatos megjegyzéseket.

Ugyancsak értelemszerűen általánosíthatók az E_n térre az affin és az ortogonális *transzformációról* az 1′, 2′-ben előadottak.

3′. Ezután — főleg az a) α) III°, a) β) II° és a) γ) II° részekre támaszkodva — foglaljuk össze röviden *az R_2 és az R_n* Riemann-*tér metrikus sajátságait!* Az R_2 teret valamely (legalább első osztályú) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2) \in E_3$ vektorfüggvénnyel meghatározott felület P pontjai, ill. a megfelelő $(u^1, u^2) \equiv (u^\gamma)$ számpárok képezik. Itt az $\boldsymbol{r}(u^1, c^2)$ és $\boldsymbol{r}(c^1, u^2)$ felületi görbék szolgáltatják a koordinátavonalakat, a $u^2 = c^2$, ill. $u^1 = c^1$ ún. görbe vonalú koordinátájukat, az

$$\boldsymbol{r}_\alpha \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} = \boldsymbol{r}_\alpha(u^\gamma) \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2) \tag{36a}$$

* Átmenetileg az $x^i y^i$, $x^i x^i = (x^i)^2$ stb. kifejezések i-jét szummációs indexként használjuk.

vektorok érintőjüket, e változó vektorpárok pedig ($r_\alpha \nparallel \lambda r_\beta$ esetén)

$$B_2 = \{r_1(u^\gamma),\ r_2(u)\} = B_2(u^\gamma) \tag{36b}$$

lokális (helyi) bázisokat. Ezek egyenes vonalú és általában ferdeszögű (affin) lokális $P\ \xi^1\xi^2$ koordináta-rendszereket orientálnak. Rájuk vonatkoztatjuk a $P \in R_2$ ponthoz rendelt vektorokat és tenzorokat, mindenekelőtt a

$$g_{\alpha\beta} = r_\alpha(u^\gamma)\, r_\beta(u^\gamma) \equiv \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial r}{\partial u^\beta} = g_{\alpha\beta}(u^\gamma), \quad \text{ill.} \quad \varrho = \xi^\alpha r_\alpha(u^\gamma) = \varrho(\xi^\alpha,\ u^\gamma) \tag{37a, b}$$

lokális mértéktenzort, ill. érintőleges (ún. felületi) vektorhalmazt; láthatóan most nem az u^γ koordináták képezik a ϱ (felületi) vektorok kontravariáns komponenseit. Az R_2 tér (a felület) *ívelemvektora* és négyzete a P helyen

$$dr = r_\alpha(u^\gamma)\, du^\alpha, \qquad ds^2 = dr^2 = r_\alpha(u^\gamma)\, du^\alpha \cdot r_\beta(u^\gamma)\, du^\beta = g_{\alpha\beta}(u^\gamma)\, du^\alpha\, du^\beta. \tag{38a, b}$$

Éppen ds^2 ilyen alakulása az R_2-tér fő jellegzetessége. A *lokális reciprok (adjungált) bázis* és a kovariáns vektorkomponensek bevezetése most is a (35)-nél mondottak szerint, vagyis

$$g^{\alpha\beta}(u^\gamma) = \frac{G^{\alpha\beta}}{g} = \frac{\text{compl. minor } (g_{\alpha\beta})}{\det (g_{\alpha\beta})} = r^\alpha r^\beta,$$

$$r^\alpha(u^\gamma) = g^{\alpha\beta} r_\beta, \qquad g_\gamma{}^\alpha = r^\alpha r_\gamma = g^{\alpha\beta}\, g_{\gamma\beta} = \frac{G^{\alpha\beta} g_{\gamma\beta}}{g} = \frac{g\delta_\gamma{}^\alpha}{g} = \delta_\gamma{}^\alpha,$$

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta = \varrho r_\alpha, \qquad \varrho = \xi_\alpha r^\alpha(u^\gamma) = \varrho(\xi_\alpha,\ u^\gamma) \tag{39}$$

módon történik. A bázisok helyhezkötöttségéből következik, hogy az eddigiek szerint *csakis egy és ugyanazon $P \in R_2$ ponthoz kötött vektorokat, ill. tenzorokat lehet műveletekkel összekapcsolni, különböző szempontokból* (pl. vektorok hossza, hajlásszöge) *összehasonlítani.* Az R_2 elenyésző vagy véges távolságú pontjaihoz tartozó mennyiségek között csak a c) alfejezetben tárgyalandó ún. abszolút differenciálás és ún. párhuzamos eltolás fog bizonyos kapcsolatot létesíteni.

Ha speciálisan a $B_2(u^\gamma)$ *lokális bázisok ortonormáltak,* akkor nyilván

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = g_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta, \qquad ds^2 = \sum_\alpha (du^\alpha)^2, \qquad r^\alpha \equiv r_\alpha, \qquad \xi_\alpha \equiv \xi^\alpha \quad \text{stb.} \tag{40a—d}$$

A geometriai és műszaki alkalmazásokban előfordul, hogy *az R_2-teret* (a felületet) nem különállóan, hanem *a környező E_3-térbe beillesztve* (műszóval: beágyazva) célszerű tekinteni. [Ez lesz a helyzet a d) α) pontban, ahol a héjtestet a héjközépfelület környezeteként fogjuk kezelni.] E célból a lokális bázisokat *kiegészítjük* az R_2-ből (a felületből) a környezetbe mutató

$$r_3(u^\gamma) \equiv \nu(u^\gamma) = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|} = \frac{r_1 \times r_2}{\sqrt{(r_1 \times r_2)^2}} = \frac{r_1 \times r_2}{\sqrt{r_1^2 r_2^2 - (r_1 r_2)^2}} =$$

$$= \frac{r_1 \times r_2}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = \frac{r_1 \times r_2}{\sqrt{g}} \tag{41a}$$

egységnormálisokkal, a lokális mértéktenzorokat pedig a

$$g_{\alpha 3} = r_\alpha\, r_3 = 0, \qquad g_{33} = r_3^2 = 1 \qquad (\alpha = 1,\ 2) \tag{41b}$$

állandókkal.

4'. Áttérve *az* R_n RIEMANN-*térre,* a leíró $r = r(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ függvénybeli $(u^1, u^2, \ldots, u^n) \equiv (u^\gamma)$ görbe vonalú koordináta-n-esek képezik a tér pontjait, a $(c^1, \ldots c^{\alpha-1}, u^\alpha, c^{\alpha+1}, \ldots, c^n)$ szám-n-esek a koordinátavonalakat, a megfelelő $r_\alpha(u^\gamma) \equiv \partial r/\partial u^\alpha$ parciális deriváltvektorok érintőiket, ezek n-esei pedig (lineáris függetlenség esetén) a $B_n(u^\gamma) = \{r_1(u^\gamma), \ldots, r_n(u^\gamma)\}$ *lokális bázisokat.* A $g_{\alpha\beta}(u^\gamma)$ mértéktenzorral, a $\varrho(\xi^\alpha, u^\gamma) = \xi^\alpha r_\alpha(u^\gamma)$ vektorhalmazzal, a $ds^2 = g_{\alpha\beta}(u^\gamma)\, du^\alpha\, du^\beta$ ívelemnégyzettel, az $r^\alpha(u^\gamma) = g^{\alpha\beta}(u^\gamma) \cdot r_\beta(u^\gamma)$ reciprok bázisvektorokkal, a $g_{\alpha\beta}(u^\gamma) = \delta_{\alpha\beta}$ ortonormáltsággal stb. kapcsolatos fentebbi formulák betűről betűre *érvényben maradnak,* de most az indexek $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n$ változása mellett. Itt is hangsúlyozzuk a vektor- és tenzormennyiségek *helyhezkötöttségét.* Itt is szó lehet továbbá *az* R_n*-térnek mint altérnek egy magasabb dimenziójú* E_m*-térbe való beillesztéséről* (ún. beágyazásáról)*, de ez — az

$$r = x^i e_i \in E_m, \quad r_\alpha r_\beta \in B_n(u^\gamma), \quad g_{\alpha\beta} = r_\alpha r_\beta = r_\beta r_\alpha = g_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

körülménynek, vagyis a tükrös mértéktenzor $(n+1)n/2$ független elemének megfelelően — csak az $m = n\,(n+1)/2$ [speciális esetekben az $m < n\,(n+1)/2$] dimenziójú E_m térben történhet. E megszorításnak — hallgatólagosan — fentebb is eleget tettünk, lévén ott $3 = 2(2+1)/2$.

III°. Felületelméleti áttekintés. 1'. A tenzoralgebra geometriai alkalmazásai keretében tekintsük át végül röviden a felületek differenciálgeometriájában szereplő fontosabb *tenzormennyiségeket és sajátságaikat,* különös tekintettel a későbbi geometriai és műszaki alkalmazások igényeire, bővebb tárgyalás tekintetében a 2. §-ra és az irodalomra** utalva.

Az $r = r\,[u^1(t), u^2(t)]$ felületi görbe (t_1, t_2) szakaszának *ívhossza:*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{r}^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r_\alpha \dot{u}^\alpha \cdot r_\beta \dot{u}^\beta}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(\dot{u}^1)^2 + 2F\dot{u}^1\dot{u}^2 + G(\dot{u}^2)^2}\, dt; \tag{43a}$$

az $r = r(u^1, u^2)$ felület $T\,(u^1, u^2)$ darabjának *felszíne:*

$$F = \iint_{(T)} \sqrt{(r_1 \times r_2)^2}\, du^1\, du^2 = \iint_{(T)} \sqrt{g}\, du^1\, du^2 = \iint_{(T)} \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}\, du^1\, du^2 =$$

$$= \iint_{(T)} \sqrt{EG - F^2}\, du^1\, du^2. \tag{43b}$$

Az $r = r\,[u^1(t), u^2(t)]$ függvény $\ddot{r}$ *deriváltjával* kapcsolatos formulák:

$$\ddot{r} = (r_\alpha \dot{u}^\alpha)^{\cdot} = r_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta + r_\alpha \ddot{u}^\alpha, \qquad v = \frac{r_1 \times r_2}{\sqrt{(r_1 \times r_2)^2}} = \frac{r_1 \times r_2}{\sqrt{g}}, \tag{44a}$$

$$\ddot{r}\, v = (r_{\alpha\beta} v)\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta = b_{\alpha\beta}\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta, \qquad b_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta}\, v = r_{\beta\alpha}\, v = b_{\beta\alpha};$$

a felületelmélet *második alapformája:*

$$d^2 r \cdot v = \ddot{r}\, v\, dt^2 = b_{\alpha\beta}\, d\dot{u}^\alpha\, d\dot{u}^\beta = b_{11}(d\dot{u}^1)^2 + 2b_{12} d\dot{u}^1 d\dot{u}^2 + b_{22}(d\dot{u}^2)^2 =$$

$$= L(d\dot{u}^1)^2 + 2M d\dot{u}^1 d\dot{u}^2 + N(d\dot{u}^2)^2$$

* L. bővebben pl. *Kocsin* [8].
** L. pl. *Kreyszig* [28].

vagy $(0)_\beta = (\boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{v})_\beta = \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta = 0$ miatt (44b)

$$b_{\alpha\beta} = \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta \quad \text{és} \quad d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = -d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{v} = b_{\alpha\beta}\, d\dot{u}^\alpha\, d\dot{u}^\beta.$$

A felületi görbe *görbületi alapképlete:*

$$\frac{\cos\vartheta}{R_\vartheta} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{v}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}}\right)^{\bullet} : \dot{s} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}\dot{s} - \dot{\boldsymbol{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3} = \frac{\boldsymbol{v}\ddot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}^2} = \frac{b_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}{g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta} =$$

$$= \frac{L(\dot{u}^1)^2 + 2M\dot{u}^1\dot{u}^2 + N(\dot{u}^2)^2}{E(\dot{u}^1)^2 + 2F\dot{u}^1\dot{u}^2 + G(\dot{u}^2)^2};$$

közös érintőjű *ferde- és normálmetszetek* görbülete:

$$\frac{\cos\vartheta}{R_\vartheta} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{R} = \frac{b_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta}{g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta} = \frac{Lh^2 + 2Mh + N}{Eh^2 + 2Fh + G} \quad \left(h = \frac{\dot{u}}{\dot{v}}, \quad \dot{v} \neq 0\right); \tag{45b}$$

(merőleges) *főirányok és főgörbületek:*

$$T(h) = \begin{vmatrix} 1 & -h & h^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = \alpha h^2 + \beta h + \gamma = 0,$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{II}} = c\,(\boldsymbol{r}_1 h_1 + \boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_1 h_2 + \boldsymbol{r}_2) = c\left(g_{11}\frac{\gamma}{\alpha} - g_{12}\frac{\beta}{\alpha} + g_{22}\right) = 0; \tag{45c}$$

$$\frac{1}{R^2} - g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\frac{1}{R} + \frac{b}{g} = 0, \quad K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{b}{g} = \frac{b_{11}b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g} G^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2},$$

a koordináta- és görbületi vonalak összeesése ($g_{12} = b_{12} = 0$) esetén pedig

$$\frac{1}{R_1} = \frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{b_{22}}{g_{22}} = \frac{N}{G}, \quad \frac{1}{R} = \frac{b_{11}(\dot{u}^1)^2 + b_{22}(\dot{u}^2)^2}{g_{11}(\dot{u}^1)^2 + g_{22}(\dot{u}^2)^2} =$$

$$= \frac{b_{11}}{g_{11}}\frac{g_{11}(\dot{u}^1)^2}{\dot{s}^2} + \frac{b_{22}}{g_{22}}\frac{g_{22}(\dot{u}^2)^2}{\dot{s}^2} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha \quad \text{(Euler)},$$

$$\frac{(\sqrt{|R|}\cos\alpha)^2}{R_1} + \frac{(\sqrt{|R|}\sin\alpha)^2}{R_2} = \pm 1 \quad \text{(Dupin)}.$$

2'. Lássunk most néhány további (a 2. § anyagán túlhaladó) tenzormennyiséget a felületelméletből, mégpedig az $\boldsymbol{r}_\alpha$, $\boldsymbol{v}_\beta$ és $\boldsymbol{r}_{\gamma\delta}$ deriváltvektorokkal kapcsolatban.

Weingarten deriváltformulái:

$$\boldsymbol{v}_\alpha = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial u^\alpha} = c_\alpha{}^\beta \boldsymbol{r}_\beta = -b_\alpha{}^\beta \boldsymbol{r}_\beta,$$

lévén $\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{r}_\gamma g^{\gamma\varepsilon} = c_\alpha{}^\beta\boldsymbol{r}_\beta\boldsymbol{r}_\gamma g^{\gamma\varepsilon} = c_\alpha{}^\beta g_{\beta\gamma}g^{\gamma\varepsilon} = c_\alpha{}^\beta g_\beta{}^\varepsilon = c_\alpha{}^\beta\delta_\beta{}^\varepsilon = c_\alpha{}^\varepsilon = -b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\varepsilon} = -b_\alpha{}^\varepsilon$; (46a)

ugyanezek a $g_{12} = b_{12} = 0$ esetben, $b_a^a = b_{aa} g^{aa} = \frac{b_{aa} g_{\beta\beta}}{g_{aa} g_{\beta\beta}} = \frac{b_{aa}}{g_{aa}} = \frac{1}{R_a}$ miatt, Rodrigues eme *formuláiba* mennek át:

$$\underset{(\alpha=\text{const})}{\boldsymbol{v}_a} = -\frac{1}{R_a}\boldsymbol{r}_a, \quad \text{vagy} \quad \boldsymbol{r}_a + R_a \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{0}. \tag{46b}$$

Christoffel *szimbólumainak értelmezése:* (47a)

$\boldsymbol{r}_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma}\boldsymbol{r}_{\gamma} + b_{\mu\nu}\boldsymbol{v}$, ahol $\boldsymbol{r}_{\mu\nu}\boldsymbol{r}^{\gamma} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma} \cdot 1 + b_{\mu\nu} \cdot 0 = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma}$ (másodfajú) és

$$\boldsymbol{r}_{\mu\nu}\boldsymbol{v} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma}\; 0 + b_{\mu\nu} \cdot 1 = b_{\mu\nu}, \text{ továbbá} \tag{47b}$$

$$\boldsymbol{r}_{\mu\nu}\boldsymbol{r}_{\gamma} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma} \cdot g_{\gamma\gamma} + b_{\mu\nu} \cdot 0 = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma} g_{\gamma\gamma} = \Gamma_{\mu\nu\gamma} \text{ (elsőfajú);}$$

szimmetriasajátságaik ($\boldsymbol{r}_{\mu\nu} = \boldsymbol{r}_{\nu\mu}$ miatt): $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma} = \Gamma_{\nu\mu}{}^{\gamma}$, $\Gamma_{\mu\nu\gamma} = \Gamma_{\nu\mu\gamma}$; *kapcsolatuk a mértéktenzorral:*

$$\frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial u^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial u^{\nu}}(\boldsymbol{r}_{\mu}\boldsymbol{r}_{\delta}) = \boldsymbol{r}_{\mu\nu}\boldsymbol{r}_{\delta} + \boldsymbol{r}_{\delta\nu}\boldsymbol{r}_{\mu} = \Gamma_{\mu\nu\delta} + \Gamma_{\delta\nu\mu}, \tag{47c}$$

hasonlóan $\frac{\partial g_{\delta\nu}}{\partial u^{\mu}} = \Gamma_{\delta\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\delta}$, $\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial u^{\delta}} = \Gamma_{\nu\delta\mu} + \Gamma_{\mu\delta\nu}$, s e három kombinálásával:

$$\Gamma_{\mu\nu\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\delta}}{\partial u^{\mu}} + \frac{\partial g_{\delta\mu}}{\partial u^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\delta}}\right); \tag{47d}$$

további kapcsolat a (30c) felhasználásával: (47e)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial u^{\nu}} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^{\nu}} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\delta}}\frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial u^{\nu}} = \frac{1}{2}g^{\mu\delta}\frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial u^{\nu}} = \frac{1}{2}(g^{\mu\delta}\Gamma_{\mu\nu\delta} + g^{\mu\delta}\Gamma_{\delta\nu\mu}) = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\mu}.$$

A Christoffel-*szimbólumok nem tenzorkomponensek,* mert nem (az indexelésük alapján sejthető harmadrendű) tenzormennyiségek módjára transzformálódnak, hanem — igazolhatóan — a Christoffel-féle

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \left(\bar{\Gamma}_{\delta\varepsilon}{}^{\sigma}\frac{\partial\bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial\bar{u}^{\varepsilon}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial^2\bar{u}^{\sigma}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}}\right)\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial\bar{u}^{\sigma}}, \quad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \left(\bar{\Gamma}_{\delta\varepsilon\tau}\frac{\partial\bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\alpha}}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial u^{\beta}} + g_{\sigma\tau}\frac{\partial^2\bar{u}^{\sigma}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}}\right)\frac{\partial\bar{u}^{\tau}}{\partial u^{\gamma}} \tag{48a, b}$$

transzformációs törvények szerint.

3'. Végül néhány szót még egy újabb fontos tenzorféleségről, most már az $\boldsymbol{r}_{\alpha\beta\gamma}$ *harmadrendű deriváltvektorok* bevonásával! A fentiek alapján

$$\boldsymbol{r}_{\mu\nu\delta} = (\boldsymbol{r}_{\mu\nu})_{\delta} = \frac{\partial}{\partial u^{\delta}}(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma}\boldsymbol{r}_{\gamma} + b_{\mu\nu}\boldsymbol{v}) = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}}\boldsymbol{r}_{\gamma} + \Gamma_{\mu\nu}{}^{\gamma}(\Gamma_{\varkappa\delta}{}^{\sigma}\boldsymbol{r}_{\sigma} + b_{\varkappa\delta}\boldsymbol{v}) - b_{\mu\nu}b_{\delta}{}^{\tau}\boldsymbol{r}_{\tau} +$$

$$+\frac{\partial b_{\mu\nu}}{\partial u^{\delta}}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma}}{\partial u^{\delta}} + \Gamma_{\mu\nu}{}^{\varkappa}\Gamma_{\varkappa\delta}{}^{\sigma} - b_{\mu\nu}b_{\delta}{}^{\sigma}\right)\boldsymbol{r}_{\sigma} + \left(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\varrho}b_{\varrho\sigma} + \frac{\partial b_{\mu\nu}}{\partial u^{\delta}}\right)\boldsymbol{v},$$

és hasonlóan

$$\boldsymbol{r}_{\mu\delta\nu} = \left(\frac{\partial\Gamma_{\mu\delta}{}^{\sigma}}{\partial u^{\nu}} + \Gamma_{\mu\delta}{}^{\varkappa}\Gamma_{\varkappa\nu}{}^{\sigma} - b_{\mu\delta}b_{\nu}{}^{\sigma}\right)\boldsymbol{r}_{\sigma} + \left(\Gamma_{\mu\delta}{}^{\varrho}b_{\varrho\nu} + \frac{\partial b_{\mu\delta}}{\partial u^{\nu}}\right)\boldsymbol{v}; \tag{49a}$$

az $\boldsymbol{r}_{\mu\nu\delta} = \boldsymbol{r}_{\mu\delta\nu}$ egyenlőség és a $\boldsymbol{r}_{\sigma}$, $\boldsymbol{v}$ lineáris függetlensége miatt a $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{r}_{\mu\nu\delta} - \boldsymbol{r}_{\mu\delta\nu} = A\boldsymbol{r}_{\sigma} + B\boldsymbol{v}$ egyenlet A és B együtthatója szükségképpen zérus, azaz

$$(B =)\quad \Gamma_{\mu\nu}{}^{\varrho}b_{\varrho\nu} - \Gamma_{\mu\delta}{}^{\varrho}b_{\varrho\nu} + \frac{\partial b_{\mu\nu}}{\partial u^{\delta}} - \frac{\partial b_{\mu\delta}}{\partial u^{\nu}} = 0 \quad \text{(Mainardi—Codazzi)}, \tag{49b}$$

továbbá

$$(A=)\quad R^{\sigma}{}_{\mu\delta\nu} - b_{\mu\nu} b_{\delta}{}^{\sigma} + b_{\mu\delta} b_{\nu}{}^{\sigma} = 0, \tag{49c}$$

ahol

$$R^{\sigma}{}_{\mu\delta\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma}}{\partial u^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\delta}{}^{\sigma}}{\partial u^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}{}^{\varkappa} \Gamma_{\varkappa\delta}{}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\delta}{}^{\varkappa} \Gamma_{\varkappa\nu}{}^{\sigma} \tag{50a}$$

a negyedrendű, vegyes RIEMANN—CHRISTOFFEL-*féle görbületi tenzor* komponensei (másodfajú RIEMANN-szimbólumok). A megfelelő kovariáns tenzor komponensei (elsőfajú szimbólumok) és igazolható szimmetriáik:

$$R_{\tau\mu\delta\nu} = g_{\sigma\tau} R^{\sigma}{}_{\mu\delta\nu} = g_{\sigma\tau} (b_{\mu\nu} b_{\delta}{}^{\sigma} - b_{\mu\delta} b_{\nu}{}^{\sigma}) = b_{\mu\nu} b_{\delta\tau} - b_{\mu\delta} b_{\nu\tau}; \tag{50b—d}$$

$$R_{\tau\mu\delta\nu} = R_{\delta\nu\tau\mu}, \quad R_{\tau\mu\delta\nu} = -R_{\tau\mu\nu\delta}, \quad R_{\tau\mu\delta\nu} = -R_{\mu\tau\delta\nu}; \quad R_{1212} = b_{22}b_{11} - (b_{12})^2 = b.$$

Ez utóbbiból következik a GAUSS-*féle theorema egregium:*

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{b}{g} = \frac{R_{1212}}{g}. \tag{51}$$

Befejezésül emeljük ki, hogy a mértéktenzorral együtt a (komponenseiből parciális deriválással és racionális műveletekkel származtatható) $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ *és* $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *szimbólumok is képezhetők az* R_n*-térben.*

c) Általános tenzoranalízis

α) **Tenzorok abszolút differenciálása**

1°. P r o b l é m a f e l v e t é s. 1'. E c) alfejezetben a modern tenzoranalízis *két alapvető fogalmáról,* nevezetesen a vektorok és a tenzorok ún. abszolút differenciálásáról és a felületi vektorok ún. párhuzamos eltolásáról lesz szó, mégpedig — mint látni fogjuk — két rokon probléma vizsgálata során. Az említett fogalmak és problémák jelentőségét az elmúlt évtizedekben főleg az EINSTEIN-féle *relativitáselmélet* s vele kapcsolatban a tér-, idő- és anyagproblémák elmélyült vizsgálata domborította ki a maga teljességében.

Az abszolút differenciálás fogalmához vezető problémafelvetés azon t é n y-ből indul ki, hogy egy első- vagy magasabb rendű és görbe vonalú koordináták függvényében *változó tenzornak* e koordináták szerint, a szokásos módon vett *első parciális deriváltjai általában nem tenzorok.*

Pl[1]. Egy, legalább első osztályú

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_{\nu} a^{\nu} = \boldsymbol{r}_{\nu}(u^1, u^2)\, a^{\nu}(u_1, u_2) \in R_2 \tag{1a}$$

felületi vektormező a^{ν} komponenseinek $\delta a^{\nu}/\delta u^{\sigma}$ első parciális deriváltjai már (sem $\sigma = 1$-nél, sem $\sigma = 2$-nél) nem tenzorkomponensek többé. Ugyanis — a kovariáns vektorkomponensek $\bar{a}^{\mu} = a^{\nu} \cdot \partial \bar{u}^{\mu}/\partial u^{\nu}$ transzformációs törvényének parciális deriválása útján nyert

$$\frac{\partial \bar{a}^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\varrho}} = \frac{\partial a^{\nu}}{\partial u^{\sigma}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^{\varrho}} \frac{\partial \bar{u}^{\mu}}{\partial u^{\nu}} + a^{\varkappa} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\mu}}{\partial u^{\varkappa} u^{\sigma}} \frac{\partial u^{\sigma}}{\partial \bar{u}^{\varrho}} \qquad (\mu, \nu; \varrho, \sigma; \varkappa = 1, 2) \tag{1b}$$

formula értelmében — a $\partial u^{\nu}/\partial u^{\sigma}$ parciális deriváltak általában nem (másodrendű

vegyes) tenzorok módjára transzformálódnak, mert rendszerint nem teljesül az ehhez szükséges

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^\mu}{\partial u^\varkappa u^\sigma} = 0 \tag{2a}$$

feltétel, szemben pl. egy E_2-síkbeli vektormezőnek és affin transzformáltjának

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\nu u^\nu = \bar{\boldsymbol{e}}_\mu \bar{u}^\mu \in E_2, \quad \bar{u}^\mu = a^\mu{}_\nu\, u^\nu \qquad (\boldsymbol{e}_\nu, \bar{\boldsymbol{e}}_\mu, a^\mu{}_\nu = \text{const}) \tag{2b}$$

speciális esetével.

Hasonló probléma lép fel a magasabb dimenziós R_n-*tér vektorainál* is, minthogy az (1a, b) formulák — az indexek $\mu, \nu;\ \varrho, \sigma;\ \varkappa = 1,2,\ldots, n$ változása mellett — változatlanul érvényben maradnak, és a (2a) feltétel rendszerint nem teljesül, szemben pl. az E_n-térben a (2b)-nek — a $\mu, \nu = 1,2,\ldots, n$-nél — megfelelő speciális esettel.

Ugyancsak problematikus *az* R_n-*tér* elsőnél magasabb rendű *tenzorai* első parciális deriváltjainak tenzorjellege is.

Pl[2]. Az $a_\nu{}^\xi = a_\nu{}^\xi (u^1, u^2, \ldots, u_n)$ másodrendű vegyes tenzor első parciális deriváltjai — az

$$\bar{a}_\mu{}^\tau = a_\nu{}^\xi \frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\mu} \frac{\partial \bar{u}^\tau}{\partial u^\xi} \tag{3a}$$

transzformációs törvény parciális deriválása útján nyert (3b)

$$\frac{\partial \bar{a}_\mu{}^\tau}{\partial \bar{u}^\varrho} = \frac{\partial a_\nu{}^\xi}{\partial u^\sigma} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho} \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\mu} \frac{\partial \bar{u}^\tau}{\partial u^\xi} + a_\alpha{}^\beta \left\{ \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \bar{u}^\mu \bar{u}^\varrho} \frac{\partial \bar{u}^\tau}{\partial u^\beta} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\mu} \frac{\partial^2 u^\tau}{\partial u^\beta \partial u^\sigma} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho} \right\}$$

formula értelmében — általában nem (harmadrendű vegyes) tenzorok módjára transzformálódnak, mert a { }-beli kifejezés rendszerint zérustól különböző értékű.

2'. Minthogy nem kívánatos az R_n-tér vektorai és tenzorai parciális deriváltjainak ilyen szokatlan, nem tenzorszerű jellege és bonyolult transzformálódása, ezért önként adódik a probléma: *olyan differenciálást értelmezni tetszőleges rendű tenzorokra, amely megőrzi tenzorjellegüket.**

A feladat más szóval az, hogy a differenciálást a koordinátáktól teljesen függetlenül, ún. abszolút módon kell értelmezni. Ésszerű követelmény továbbá, hogy az új, ún. abszolút differenciálás az egyenes vonalú koordináta-rendszerrel ellátott E_n-*térben* a közönséges differenciálással egyezzék meg.

Ezek után rátérhetünk az első-, majd pedig a másod- és magasabb rendű tenzorok abszolút differenciálásának értelmezésére.

II°. Vektor abszolút differenciálása. 1'. Legyen adva az

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_\varkappa(u^\sigma)\, a^\varkappa(u^\sigma) \in R_n \qquad (\varkappa, \sigma = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

vektormező az R_n-térben. A függvény *differenciálja* — az $a^\varkappa$ komponensek és az $\boldsymbol{r}_\varkappa$ lokális bázisvektorok változására való tekintettel —

$$d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_\varkappa\, da^\varkappa + a^\varkappa\, d\boldsymbol{r}_\varkappa = \boldsymbol{r}_\varkappa\, da^\varkappa + a^\varkappa\, \boldsymbol{r}_{\varkappa\sigma}\, du^\sigma. \tag{5a}$$

Megszorozva ezt (skalárisan) a reciprok (adjungált) bázis $\boldsymbol{r}^\nu$ vektorával, továbbá felhasználva az előzőkből már ismert

$$\Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu = \boldsymbol{r}^\nu\, \boldsymbol{r}_{\varkappa\sigma} = g^{\alpha\nu}\, \boldsymbol{r}_\alpha\, \boldsymbol{r}_{\varkappa\sigma} = g^{\alpha\nu} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^\varkappa \partial u^\sigma} \tag{6a}$$

* De nem rendszámukat; l. a II°-t, III°-t!

alakú *másodfajú* CHRISTOFFEL-*szimbólumokat,* valamint az $r^\nu r_\varkappa = \delta^\nu_\varkappa$ összefüggést és a $d\mathbf{a}\, r^\nu = (da)^\nu$ jelölést, ily módon a

$$d\mathbf{a}\, r^\nu = (da)^\nu = r^\nu r_\varkappa\, da^\varkappa + a^\varkappa r^\nu r_{\varkappa\sigma}\, du^\sigma = da^\nu + a^\varkappa \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu\, du^\sigma \qquad (5b)$$

új differenciálformulát s belőle — a du^σ-val való osztással és a szokásos ∂ parciális differenciáljel egyidejű bevezetésével — a

$$\left(\frac{\partial a^\nu}{\partial u^\sigma}\right) = \frac{\partial a^\nu}{\partial u^\sigma} + a^\varkappa \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu \qquad (7a)$$

új parciális deriváltformulát nyerjük.

Kérdés most, hogy ez az $a^\varkappa \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu$ járulékos taggal bővült újfajta parciális derivált *vajon tenzorszerűen transzformálódik-e.* Eldöntésére a $\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\nu}$-vel szorzunk, majd figyelembe vesszük a $\Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu$-szimbólumoknak a b) β) III° 2'-ből ismert

$$\Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\nu} = \bar{\Gamma}_{\delta\varepsilon}{}^\mu \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\varkappa}\frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial u^\sigma} + \frac{\partial^2 \bar{u}^\mu}{\partial u^\varkappa \partial u^\sigma} \qquad (6b)$$

transzformációs törvényeit, valamint az (1b) formulát és az a) β) I—II°-beli formulákat, eképpen a

$$\left(\frac{\partial a^\nu}{\partial u^\sigma} + a^\varkappa \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu\right)\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\nu} = \frac{\partial a^\nu}{\partial u^\sigma}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\nu} + a^\varkappa \frac{\partial^2 \bar{u}^\mu}{\partial u^\varkappa \partial u^\sigma}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho} + a^\varkappa \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\varkappa}\cdot \bar{\Gamma}_{\delta\varepsilon}{}^\mu \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho}\frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial u^\sigma} =$$

$$= \frac{\partial \bar{a}^\mu}{\partial \bar{u}^\varrho} + \bar{a}^\delta \bar{\Gamma}_{\delta\varrho}{}^\mu \qquad (7b)$$

összefüggést nyerve. Ez világosan mutatja, hogy az (7a) új parciális derivált *másodrendű vegyes tenzor módjára transzformálódik,* és benne a parciális deriválási változó indexe szerepel kovariáns jelleggel. Ennek megfelelően a (7a) kifejezést az

$$a^\nu{}_{,\sigma} = \frac{\partial a^\nu}{\partial u^\sigma} + a^\varkappa \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu \qquad \left(= \nabla_\sigma a^\nu = \frac{\delta a^\nu}{\delta u^\sigma}\right) \qquad (7c)$$

tenzorjelölésekkel illetjük (az alsó index előtti *vessző* differenciálási jelnek tekintendő !) *és az a^ν kontravariáns vektor u^σ* változó szerinti *kovariáns (abszolút) deriváltjának* nevezzük. Egyes szerzők a „$g_{\mu\nu}$-re vonatkozó kovariáns derivált" nehézkes elnevezést használják, ezzel a $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma$ és a $g_{\mu\nu}$ mennyiségeknek a b) β) III° 2'-ben említett kapcsolatára kívánván utalni. Megjegyezzük, hogy a (7c)-beli $\Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu$-ket később, a c) β) III°-ban más, alkalmasabb mennyiségekkel fogjuk helyettesíteni. Végül állapítsuk meg, hogy a kovariáns deriváltat a parciális deriválttól megkülönböztető $a_\varkappa \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu$ *additív tag* az $\mathbf{e}_\varkappa$ = const bázisvektorokkal rendelkező E_n-*térben* ($\Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu = 0$ miatt) *eltűnik.*

Ezzel az R_n-tér (kontravariáns) vektorainak (elsőrendű tenzorainak) abszolút differenciálására kitűzött feladat teljes megoldást nyert. Ugyanez *elvi mintát* szolgáltat az R_n-tér magasabb rendű tenzorainak abszolút differenciálására is, úgyannyira, hogy a továbbiakban már csak az eddigi megoldások ismétlése és némi számítási munka vár ránk.

3'. Egészen hasonló lépésekben nyerhető az

$$\mathbf{a} = r^\varkappa(u^\sigma)\, a_\varkappa(u^\sigma) \in R_n \qquad (\varkappa, \sigma = 1, 2, \ldots, n) \qquad (8a)$$

változó *kovariáns vektor kovariáns (abszolút)* differenciálja, ill. *deriváltja,* mégpedig — a

$$d(\mathbf{r}^\mu \mathbf{r}_\nu) = \mathbf{r}_\nu\, d\mathbf{r}^\mu + \mathbf{r}^\mu\, d\mathbf{r}_\nu = d(\delta^\mu{}_\nu) = 0,$$
$$\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\varkappa} = \mathbf{r}^\mu\, \mathbf{r}_{\nu\sigma} = \mathbf{r}^\mu\, \mathbf{r}_{\sigma\nu} = \Gamma_{\sigma\nu}{}^{\varkappa} \qquad (8b)$$

összefüggések felhasználásával — a

$$(da)_\nu = da_\nu - a_\varkappa \Gamma_{\nu\sigma}{}^{\varkappa}\, du^\sigma, \text{ ill. } a_{\nu,\sigma} = \frac{\partial a_\nu}{\partial u^\sigma} - a_\varkappa \Gamma_{\nu\sigma}{}^{\varkappa} \qquad (8c,\ d)$$

alakban; az $a_\varkappa \Gamma_{\nu\sigma}{}^{\varkappa}$ lineáris járulékos tag most ellenkező előjellel adódik hozzá a parciális deriválthoz.

III°. Tenzor abszolút differenciálása. 1'. Legyen adva az R_n-térben az

$$a_\nu{}^\xi = a_\nu{}^\xi(u^\sigma) \qquad (\nu, \xi, \sigma = 1, 2, \ldots, n) \qquad (9)$$

másodrendű vegyes tenzormező. A tenzorok IV° 5'-beli második definíciója értelmében e tenzormezővel, valamint tetszőleges $b^\nu(u^\sigma)$ kontravariáns és $c_\xi(u^\sigma)$ kovariáns vektormezővel a

$$\varphi = a_\nu{}^\xi\, b^\nu\, c_\xi = \varphi\,(u^\sigma) \qquad (10)$$

skalármező állítható elő. Képezve

$$d\,\varphi = da_\nu{}^\xi\, b^\nu\, c_\xi + a_\nu{}^\xi\, db^\nu\, c_\xi + a_\nu{}^\xi\, b^\nu\, dc_\xi \qquad (11a)$$

differenciálját, és kifejezve benne a db^ν-t és a dc_ξ-t a $\mathbf{b} = (b^\nu)$, ill. a $\mathbf{c} = (c_\xi)$ vektor (5b), ill. (8c) szerinti abszolút differenciáljával, a

$$d\varphi = da_\nu{}^\xi\, b^\nu\, c_\xi + a_\nu{}^\xi\, c_\xi\, [(db) - b^\beta\, \Gamma_{\beta\sigma}{}^\nu\, du^\sigma] + a_\nu{}^\xi\, b^\nu\, [(dc)_\xi + c_\gamma\, \Gamma_{\xi\sigma}{}^\gamma\, du^\sigma] \qquad (11b)$$

differenciálalakot, ebből pedig rendezéssel és a Γ-s tagokban a szummációs indexek célszerű felcserélésével ($\beta \leftrightarrow \nu$, $\gamma \leftrightarrow \xi$), végül a

$$d\varphi = a_\nu{}^\xi\, c_\xi\, (db)^\nu + a_\nu{}^\xi\, b^\nu\, (dc)_\xi + [da_\nu{}^\xi - a_\beta{}^\xi\, \Gamma_{\nu\sigma}{}^\beta\, du^\sigma + a_\nu{}^\gamma\, \Gamma_{\gamma\sigma}{}^\xi\, du^\sigma]\, b^\nu c_\xi \qquad (11c)$$

differenciálalakot kapjuk. Ebben a bal oldal és a jobb oldal első két tagja nyilván skalár jellegű, kell tehát hogy a jobb oldali $[\ldots]\, b^\nu\, c_\xi$ szorzat is ilyen legyen. A tenzorok második definíciója értelmében tehát maga a

$$(da)_\nu{}^\xi = da_\nu{}^\xi - a_\beta{}^\xi\, \Gamma_{\nu\sigma}{}^\beta\, du^\sigma + a_\nu{}^\gamma\, \Gamma_{\gamma\sigma}{}^\xi\, du^\sigma \qquad (12a)$$

új differenciálalak másodrendű, a belőle du^σ-val történő osztással nyerhető

$$a_\nu{}^\xi{}_{,\sigma} = \frac{\partial a_\nu{}^\xi}{\partial u^\sigma} - a_\beta{}^\xi\, \Gamma_{\nu\sigma}{}^\beta + a_\nu{}^\gamma\, \Gamma_{\gamma\sigma}{}^\xi \qquad (12b)$$

új deriváltalak pedig harmadrendű vegyes tenzor.

2'. Az $a_\nu{}^\xi{}_{,\sigma}$ e jellegéről egyébként *transzformációs magatartásának* ellenőrzése útján is megbizonyosodhatunk. Nevezetesen — a (6b), (3b) és jól ismert korábbi transzformációs formulák alkalmazásával, egyszerű részletszámítások után — azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \bar{a}_\mu{}^\tau}{\partial \bar{u}^\varrho} - \bar{a}_\delta{}^\tau\, \bar{\Gamma}_{\mu\varrho}{}^\delta + \bar{a}_\mu{}^\varepsilon\, \bar{\Gamma}_{\varepsilon\varrho}{}^\tau = \left[\frac{\partial a_\nu{}^\xi}{\partial u^\sigma} - a_\beta{}^\xi\, \Gamma_{\nu\sigma}{}^\beta + a_\nu{}^\gamma\, \Gamma_{\gamma\sigma}{}^\xi\right] \cdot \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho}\, \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\mu}\, \frac{\partial \bar{u}^\tau}{\partial u^\xi}, \qquad (12c)$$

s ez valóban az $a_\nu{}^\xi{}_{,\sigma}$ harmadrendű vegyes tenzor jellegét igazolja; benne a parciális deriválási változó σ indexe szintén kovariánsként szerepel. Ennek megfelelően a (12b) kifejezést *az* $a_\nu{}^\xi$ *másodrendű vegyes tenzor* u^σ szerinti *kovariáns (abszolút) deriváltjának* nevezzük. Látható, hogy benne a tenzorkomponens közönséges parciális deriváltja két lineáris járulékos taggal bővül. Ezek egyébként az $\mathbf{e}_\nu = \text{const}$ ($\nu = 1,2,\ldots, n$) bázisú E_n-térben (a zérus értékű Γ-k miatt) eltűnnek.

Egészen hasonló úton nyerhető *az* $a_{\mu\nu}$ *kovariáns és az* $a^{\mu\nu}$ *kontravariáns másodrendű tenzor* u^σ szerinti *kovariáns (abszolút) deriváltja,* a következő alakban.

$$a_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma} - a_{\gamma\nu}\Gamma_{\mu\sigma}{}^\gamma - a_{\mu\gamma}\Gamma_{\nu\sigma}{}^\gamma, \tag{13a}$$

$$a^{\mu\nu}{}_{,\sigma} = \frac{\partial a^{\mu\nu}}{\partial u^\sigma} + a^{\gamma\nu}\Gamma_{\gamma\sigma}{}^\mu + a^{\mu\gamma}\Gamma_{\gamma\sigma}{}^\nu. \tag{13b}$$

A (12b) és a (13a, b) formulák összevetése egyébként érdekes *kapcsolatot* tár fel az adott (deriválandó) tenzor kovariáns és kontravariáns indexei, valamint a jobb oldali járulékos (Γ-s) tagok előjele között.

3'. Az előzők általánosításaképpen, az R_n-térben adott

$$a_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} = f(u^\sigma) \qquad (\alpha_\gamma, \beta_\delta = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

r-szeresen kovariáns és s-szeresen kontravariáns tenzor u^σ szerinti *kovariáns (abszolút) deriváltjára* a (12b)-vel analóg

$$a_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}{}_{,\sigma} = \frac{\partial a_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}}{\delta u^\sigma} - \tag{15}$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha_1\ldots\alpha_{\gamma-1}\varkappa\alpha_{\gamma+1}\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}\cdot\Gamma_{\alpha_\gamma\sigma}{}^\varkappa + \sum_{\delta=1}^{s} a_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_{\delta-1}\lambda\beta_{\delta+1}\ldots\beta_s}\cdot\Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\beta_\delta}$$

formula adódik. Ez $(r+1)$-szeresen kovariáns és s-szeresen kontravariáns tenzort mutat.

Az eddigi abszolút differenciálási vizsgálataink alapján megállapíthatjuk, hogy *a tenzor kovariáns deriválása eggyel növeli kovariáns indexei számát,* a kontravariánsokét változatlanul hagyva.

Egy $\Phi(u^\sigma)$ *skalár (nulladrendű tenzor) kovariáns (abszolút) deriváltját*

$$\Phi_{,\sigma} = \frac{\partial\Phi}{\partial u^\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

módon értelmezzük, az így meghatározott $\Phi_{,\sigma}$ kovariáns vektort pedig a Φ skalár *gradiensének* mondjuk.

IV°. A z a b s z o l ú t d i f f e r e n c i á l á s s a j á t s á g a i. 1'. A (15) formulából közvetlenül adódik, hogy tenzorok összegének és szorzatának kovariáns differenciálása a közönséges differenciálási szabályok szerint eszközölhető.

Nevezetesen (megegyező szerkezetű) *tenzorok összege tagonként differenciálandó kovariánsan,* azaz

$$(a_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} + b_{\gamma_1\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\ldots\delta_s})_{,\sigma} = a_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}{}_{,\sigma} + b_{\gamma_1\ldots\gamma_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}{}_{,\sigma}; \tag{17}$$

a (tetszőleges szerkezetű, de adott sorrendben tényezőül vett) *tenzorok szorzata az* $(uv)' = u'v + uv'$ *elemi szabály szerint differenciálandó kovariánsan,* azaz

$$(a_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q}\, b_{\gamma_1\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\ldots\delta_s})_{,\sigma} = \tag{18}$$

$$= a_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q}{}_{,\sigma}\, b_{\gamma_1\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\ldots\delta_s} + a_{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}^{\beta_1\ldots\beta_q}\, b_{\gamma_1\ldots\gamma_r}{}^{\delta_1\ldots\delta_s}{}_{,\sigma},$$

itt is ügyelve a tenzortényezők sorrendjére.

Pl[3]. $(a_{\mu\nu} b^{\varrho\sigma})_{,\varkappa} = \dfrac{\partial}{\partial u^\varkappa}(a_{\mu\nu}b^{\varrho\sigma}) - b^{\varrho\sigma}(a_{\gamma\nu}\Gamma_{\mu\varkappa}{}^{\gamma} + a_{\mu\gamma}\Gamma_{\nu\varkappa}{}^{\gamma}) + a_{\mu\nu}(b^{\gamma\sigma}\Gamma_{\gamma\varkappa}{}^{\delta} + b^{\varrho\gamma}\Gamma_{\gamma\varkappa}{}^{\sigma}) =$
$= a_{\mu\nu,\varkappa}\, b^{\varrho\sigma} + a_{\mu\nu}\, b^{\varrho\sigma}{}_{,\varkappa}.$

Pl[4]. Az előbbi példából a $\nu = \varrho$ egyenlítéssel az $a_{\mu\nu}\, b^{\nu\sigma}$ áttolás kovariáns deriváltja nyerhető,

$$(a_{\mu\nu}\, b^{\nu\sigma})_{,\varkappa} = a_{\mu\nu,\varkappa}\, b^{\nu\sigma} + a_{\mu\nu}\, b^{\nu\sigma}{}_{,\varkappa}$$

alakban.

2′ A $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ mértéktenzorok és a $\delta_\mu{}^\nu$ egységtenzor különlegesen egyszerű magatartást tanúsítanak a kovariáns deriválással szemben. Ezt rögzíti le a Ricci-től származó alábbi

Tétel: *A $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ és $\delta_\mu{}^\nu$ tenzorok kovariáns deriváltja a (csupa zéruskomponensű) zérustenzor.*

Ui. a (13a) és az indexlehúzási szabály, valamint a Christoffel-szimbólumok b) β) III° 2′-beli tulajdonságai figyelembevételével írható, hogy

$$g_{\mu\nu,\varkappa} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\varkappa} - g_{\gamma\nu}\Gamma_{\mu\varkappa}{}^{\gamma} - g_{\mu\gamma}\Gamma_{\nu\varkappa}{}^{\gamma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\varkappa} - (\Gamma_{\mu\varkappa\nu} + \Gamma_{\nu\varkappa\mu}) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\varkappa} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\varkappa} = 0. \tag{19a}$$

Hasonlóan igazolható — a (13b) felhasználásával —, hogy

$$g^{\mu\nu}{}_{,\varkappa} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial u^\varkappa} + g^{\gamma\nu}\Gamma_{\gamma\varkappa}{}^{\mu} + g^{\mu\gamma}\Gamma_{\gamma\varkappa}{}^{\nu} = 0. \tag{19b}$$

Végül a (12b) formula alkalmazásával nyerhető, hogy

$$\delta_\mu{}^\nu{}_{,\varkappa} = \frac{\partial \delta_\mu{}^\nu}{\partial u^\varkappa} + \delta_\mu{}^\gamma\Gamma_{\gamma\varkappa}{}^{\nu} - \delta_\gamma{}^\nu\Gamma_{\mu\varkappa}{}^{\gamma} = \Gamma_{\mu\varkappa}{}^{\gamma} - \Gamma_{\mu\varkappa}{}^{\nu} = 0, \quad \text{q. e. d.} \tag{19c}$$

3′. A legalább másodosztályú *$\Phi(u^\sigma)$ skalár (nulladrendű tenzor) második kovariáns deriváltja,* mint a kovariáns $\Phi_{,\sigma}$ gradiensvektor első kovariáns deriváltja — (7a) szerint — így alakul:

$$\Phi_{,\sigma\lambda} = (\Phi_{,\sigma})_{,\lambda} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u^\sigma}\right)_{,\lambda} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^\sigma \partial u^\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial u^\delta}\Gamma_{\sigma\lambda}{}^{\delta}. \tag{20}$$

E másodrendű kovariáns tenzor láthatóan tükrös (szimmetrikus σ és λ szerint), más szóval az u^σ és az u^λ szerinti *kovariáns deriválás sorrendje a skalárnál közömbös.*

Hangsúlyozandó ezzel szemben, hogy *az első- és magasabb rendű tenzorok második kovariáns deriváltja általában függ a differenciálások sorrendjétől,* vagyis a deriválttenzor rendszerint nem szimmetrikus, a deriválási változók indexei

szerint. Nevezetesen meg lehet mutatni*, hogy az a_ν *kovariáns vektor első kovariáns deriválásánál*

$$a_{\nu,\sigma} - a_{\sigma,\nu} = \frac{\partial a_\nu}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial a_\sigma}{\partial u^\nu} \tag{21}$$

(amely csak $a_\nu = \Phi_{,\nu}$ esetén zérus), *második kovariáns deriválásánál* pedig

$$a_{\nu,\sigma\alpha} - a_{\nu,\alpha\sigma} = a_\delta R^\delta{}_{\nu\sigma\alpha}; \tag{22a}$$

továbbá, hogy *másod- és magasabb rendű tenzorok második kovariáns deriválásánál*

$$a_{\mu\nu,\sigma\alpha} - a_{\mu\nu,\alpha\sigma} = a_{\delta\nu} R^\delta{}_{\mu\sigma\alpha} + a_{\mu\delta} R^\delta{}_{\nu\sigma\alpha}, \tag{22b}$$

$$a_{\mu_1\ldots\mu_r,\sigma\alpha} - a_{\mu_1\ldots\mu_r,\alpha\sigma} = \sum_{\varrho=1}^{r} a_{\mu_1\ldots\mu_{\varrho-1}\delta\mu_{\varrho+1}\ldots\mu} R^\delta{}_{\mu_\varrho\sigma\alpha}, \tag{22c}$$

$$a_{\mu_1\ldots\mu_r}{}^{\nu_1\ldots\nu_s}{}_{,\sigma\alpha} - a_{\mu_1\ldots\mu_r}{}^{\nu_1\ldots\nu_s}{}_{,\alpha\sigma} = \tag{22d}$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{r} a_{\mu_1\ldots\mu_{\varrho-1}\delta\mu_{\varrho+1}\ldots\mu_r}{}^{\nu_1\ldots\nu_s} R^\delta{}_{\mu_\varrho\sigma\alpha} - \sum_{\tau=1}^{s} a_{\mu_1\ldots\mu_r}{}^{\nu_1\ldots\nu_{\tau-1}\delta\nu_{\tau+1}\ldots\nu_s} R^{\nu_\tau}{}_{\delta\sigma\alpha}$$

(RICCI-azonosság); mindezekben az $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ mennyiségek a b) β) III° 3'-ben említett negyedrendű RIEMANN—CHRISTOFFEL-*féle görbületi tenzor* komponensei.

β) Tenzorok párhuzamos eltolása (R_n-térben)

I°. A párhuzamos eltolás értelmezése.

1'. Az R_n-térbeli abszolút differenciálás ismeretében térjünk át most a másik modern tenzoranalitikus fogalom, az R_n-térbeli ún. párhuzamos eltolás értelmezésére, majd vizsgálatára. Az értelmezés előkészítése céljából tekintsünk vissza egy pillanatra az R_n-térbeli vektor és tenzor abszolút differenciáljának szerkezetére, az (5b), ill. a (12a) formula tükrében. Az abszolút differenciál mindkét esetben *két, különböző jellegű rész* összegeként jelentkezik.

Az első rész (a da^ν, ill. $da_\xi{}^\nu$ tag) a vektornak, ill. tenzornak belső sajátságaiból folyó s a $P(u^\sigma)$ pontbeli lokális bázisra vonatkozó, ún. *helyi növekménye* a du^σ változás során. A második rész (a Γ-s tagok összege) a vektornak, ill. tenzornak külső körülményekből, nevezetesen a $P'(u^\sigma + du^\sigma)$ pontbeli lokális bázisra való áttérésből származó, ún. *eltolási növekménye*. Az állandó (tehát pl. P-ben és P'-ben is megegyező) bázisú E_n-térben ez utóbbi növekmény nyilván nem jelentkezik.

2'. Vessük fel ezek után azt a problémát, amely a párhuzamos eltolás problémájához vezet! Arról van itt szó, hogy *az R_n-tér különböző pontjaihoz kötött vektorokat, ill. tenzorokat kell egymással összehasonlítani*. Pl. az R_2-térben, vagyis a felületen különböző pontjaihoz kötött, ún. felületi (érintősíkbeli) vektorok (elsősorban irány szerinti) összevetéséről beszélhetünk. Efféle összehasonlítástól mind ez ideig elzárkóztunk, tekintve, hogy ez — különböző pontokban általában eltérő lokális bázisokra vonatkozó mennyiségek viszonylatában — nem is lehetséges minden további nélkül. A kívánt összemérés elengedhetetlen előfeltétele ugyanis olyan *előírás értelmezése, amely szerint a helyhez kötött vektorok, ill. tenzorok* egyik pontjából a másikba való ún. *párhuzamos eltolása* (vagyis összemérési helyzetbe való hozatala) *eszközölhető*.

Ezen előíráshoz célszerűen az állandó bázisú E_3-*térben keresünk mintát*, az E_n- és R_n-térre való általánosítás céljából! Az E_3 euklidesi térben valamely $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$ vek-

* L. pl. *Kreyszig* [28].

tor és önmagával párhuzamosan (s egyébként tetszőlegesen) eltolt változata, az $a' = \overrightarrow{P'Q'}$ vektor megegyezik egymással a vektormennyiséget meghatározó nagyság, irány, értelem tekintetében (s így az állandó $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ bázisra vonatkoztatott kezdő- és végponti koordináták különbségében, vagyis a vektorkomponensekben is). *A vektor tehát a párhuzamos eltolás tetszőleges görbéje, annak minden* $d\mathbf{r}$ *íveleme mentén* az eredetivel egyenlő, más szóval *állandó marad,* azaz

$$a = \overrightarrow{PQ} = (p^i - q^i)\, e_i = a^i\, e_i = a^{i'} e_i = (p^{i'} - q^{i'})\, e_i = \overrightarrow{P'Q'} = a' \in E_3,$$

következésképpen *a vektorkomponensek abszolút (és közönséges) differenciálja zérus lesz,* azaz

$$(da)^i = a^{i'} - a^i = da^i + 0 \cdot dx^k = 0 \qquad (\Gamma_{\lambda k}{}^i = 0);$$

s vele együtt (23a, b)

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x^k}\right)^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + 0 = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3).$$

Éppen ez az E_3-térbeli tény szolgált mintául a párhuzamos eltolás fogalmának az E_n- és R_n-térre való Levi—Civita-féle általánosításához. Ez utóbbit nyújtja az alábbi

Definíció: *Az R_n- (speciálisan az E_n-) tér valamely vektorának, ill. tenzorának a tér egy (tetszőleges, de azután rögzített) G görbéje menti párhuzamos (paralel) eltolásáról akkor beszélünk, ha a G mentén mindenütt eltűnik a vizsgált vektor, ill. tenzor abszolút differenciálja, s így valamennyi kovariáns parciális deriváltja is,* más szóval, *ha a G mentén a vizsgált vektor, ill. tenzor az abszolút differenciálás szempontjából állandóként viselkedik.*

Fűzzünk egy-két megjegyzést e definícióhoz! Ez egyetlen lényeges pontban tér el az elemi paralel eltolási fogalomtól, nevezetesen abban, hogy *általában függ a G eltolási görbe választásától,* mégpedig egyértelműen. Célszerű ezért először valamely $u^\sigma = \text{const}$, ha $\sigma \neq s$ *koordinátavonalra* vonatkozólag megformulázni a párhuzamos eltolás fentebbi feltételét. *Kontravariáns vektor* esetén ez nyilván

$$(da)^\nu = da^\nu + a^\varkappa \Gamma_{\varkappa s}{}^\nu\, du^s = 0, \quad \text{vagy} \quad a^\nu{}_{,s} = \frac{\partial a^\nu}{\partial u^s} + a^\varkappa \Gamma_{\varkappa,s}{}^\nu = 0$$

$$(s = \text{const}) \qquad (24a, b)$$

alakot, *kovariáns vektor* esetén pedig

$$(da)_\nu = da_\nu - a_\varkappa \Gamma_{\nu s}{}^\varkappa\, du^s = 0, \quad \text{vagy} \quad a_{\nu,s} = \frac{\partial a_\nu}{\partial u^s} - a_\varkappa \Gamma_{\nu s}{}^\varkappa = 0$$

$$(s = \text{const}) \qquad (25a, b)$$

alakot ölt.

Ugyanezek most már tetszőleges G: $u^\sigma = u^\sigma(t)$ *görbére* vonatkozólag nyilván

$$(da)^\nu = da^\nu + a^\varkappa \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu\, \dot{u}^\sigma\, dt, \quad \text{vagy} \quad \left(\frac{da}{dt}\right)^\nu = \frac{da^\nu}{dt} + a^\varkappa \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu\, \dot{u}^\sigma = 0, \qquad (26a, b)$$

illetve

$$(da)_\nu = da_\nu - a_\varkappa \Gamma_{\nu\sigma}{}^\varkappa\, \dot{u}^\sigma\, dt, \quad \text{vagy} \quad \left(\frac{da}{dt}\right)_\nu = \frac{da^\nu}{dt} - a_\varkappa \Gamma_{\nu\sigma}{}^\varkappa\, \dot{u}^\sigma = 0 \qquad (27a, b)$$

módon alakulnak, az α) II°-ben tanult abszolút differenciálási formulák értelemszerű alkalmazásával ($du^\sigma = \dot{u}^\sigma\, dt$).

Másodrendű vegyes tenzor G: $u^\sigma = u^\sigma(t)$ görbe menti paralel eltolási formulája — az α) III° (12b) alkalmazásával —

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_\nu^{\ \xi} = \frac{da_\nu{}^\xi}{dt} - a_\beta{}^\xi\, \Gamma_{\nu\sigma}{}^\beta + a_\nu{}^\gamma\, \Gamma_{\gamma\nu}{}^\xi = 0, \tag{28}$$

tetszőleges rendű és szerkezetű tenzoré pedig — az α) III° (15) alapján —

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}^{\quad \beta_1 \ldots \beta_s} = \frac{da_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}}{dt} + \tag{29}$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{r} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{\gamma-1}\, \varkappa\, \alpha_{\gamma+1} \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} \cdot \Gamma_{\alpha_\delta \sigma}{}^{\varkappa}\, \dot{u}^\sigma + \sum_{\delta=1}^{s} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_{\delta-1}\, \lambda\, \beta_{\delta+1} \ldots \beta_s} \cdot \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\beta_\delta}\, \dot{u}^\sigma. \tag{29}$$

Állapítsuk meg végül, hogy a fentebbi paralel eltolási formulák mind (parciális, ill. közönséges) *differenciálegyenlet* alakjában jelennek meg.

II°. A párhuzamos eltolás sajátságai. 1'. Figyelemre méltó, hogy az abszolút differenciálnak (deriváltnak) — a párhuzamos eltolás által megkívánt — G görbe menti eltűnése egyszersmind az 1'-ben említett *helyi és eltolási differenciáljának (deriváltjának) G menti ellentett egyenlőségét* is jelenti. E körülmény pl. kontravariáns, ill. kovariáns vektor vonatkozásában — a (26—27) alapján —

$$a^{\nu *} - a^\nu = da^\nu = - a^\varkappa\, \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu\, \dot{u}^\sigma\, dt, \quad \text{vagy} \quad (\dot{a})^\nu = \frac{da^\nu}{dt} = -a^\varkappa\, \Gamma_{\varkappa\sigma}{}^\nu\, \dot{u}^\sigma, \tag{30a, b}$$

illetve

$$a_{\nu *} - a_\nu = da_\nu = a_\varkappa\, \Gamma_{\nu\sigma}{}^\varkappa\, \dot{u}^\sigma\, dt, \quad \text{vagy} \quad (\dot{a})_\nu = \frac{da_\nu}{dt} = a_\varkappa\, \Gamma_{\nu\sigma}{}^\nu\, \dot{u}^\sigma \tag{31a, b}$$

alakban jelentkezik.

2'. A Levi—Civipa-féle párhuzamos eltolás egy másik nevezetes tulajdonságát juttatja kifejezésre az alábbi

Tétel: *Az R_n-tér egy G: $u^\sigma = u^\sigma(t)$ görbéje mentén vett $a^\mu(t)$ és $b^\nu(t)$ vektorpár*

$$p(t) = g_{\mu\nu}(t)\, a^\mu(t)\, b^\nu(t) = a_\nu(t)\, b^\nu(t) \tag{32a}$$

skaláris szorzata a G menti párhuzamos eltolás során állandó értékű marad.

Igazolásul elegendő a $\dot{p}(t) = 0$ tényt megmutatni; ez — a (30a), b) β) (47c) összefüggések felhasználásával — így alakul:

$$\dot{p} = (g_{\mu\nu}\, a^\mu\, b^\nu)^{\cdot} = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial u^\beta}\, \dot{u}^\beta\, a^\alpha\, b^\nu + g_{\mu\nu}\, (\dot{a}^\mu\, b^\nu + a^\mu\, \dot{b}^\nu) =$$

$$= \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial u^\beta}\, \dot{u}^\beta\, a^\alpha\, b^\nu - g_{\mu\nu}\, \dot{u}^\beta\, (a^\alpha\, \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu \cdot b^\nu + a^\mu \cdot b^\alpha\, \Gamma_{\alpha\beta}{}^\nu) = \tag{32b}$$

$$= \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial u^\beta}\, \dot{u}^\beta\, a^\alpha\, b^\nu - \dot{u}^\beta\, (a^\alpha\, b^\nu\, \Gamma_{\alpha\beta\nu} + a^\mu\, b^\alpha\, \Gamma_{\alpha\beta\mu}) = -a^\alpha\, b^\nu\, \dot{u}^\beta \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial u^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta\nu} - \Gamma_{\nu\beta\alpha}\right) = 0,$$

q. e. d.

A most igazolt egyszerű alkalmazásaként adódik a következő

Tétel: *Az R_n-tér egy G: $u^\sigma = u^\sigma(t)$ görbéje mentén vett $a^\mu(t)$ és $b^\nu(t)$ vektorok G menti párhuzamos eltolásuk során megtartják normájukat és hajlásszögüket,* azaz

$$N_a(t) = a_\mu(t)\, a^\mu(t) = \text{const}, \qquad N_b(t) = b_\nu(t)\, b^\nu(t) = \text{const};$$

$$\cos \varphi(t) = \frac{a_\nu(t)\, b^\nu(t)}{\sqrt{N_a(t)\, N_b(t)}} = \text{const}. \qquad (33a,\ b,\ c)$$

3'. A párhuzamos eltolás további (pl. R_2-térbeli) sajátságai tekintetében az irodalomra* utalunk.

III°. Az új fogalmak általánosítása. 1'. Befejezésül emlékezzünk meg röviden az abszolút differenciálás és vele kapcsolatban a LEVI—CIVITA féle párhuzamos eltolás fogalmának újabb keletű általánosításáról. Erre — a modern fizika igényeinek teljesítéseképpen — azért került sor, hogy *e két fogalmat függetlenítsék az R_n-tér metrikájától.*

Az előzőkben megismert abszolút differenciálási és párhuzamos eltolási formulákban az R_n tér metrikájától való függés a $g_{\mu\nu}$ mértéktenzorral ismert függvénykapcsolatban álló $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ CHRISTOFFEL-szimbólumok szereplése formájában jut kifejezésre. A szóban forgó formulák levezetésénél e $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$-k sajátságai közül kizárólag az α) II (6b) transzformálódási törvényt használtuk fel (s különösen nem nyert alkalmazást a $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = f\,(g_{\mu\nu})$ függés. Ezért közelfekvő a gondolat, *formuláinkban e* $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \gamma(u^\sigma)$ *függvényeket* más, szintén az α) II° (6b) formula szerint, vagyis

$$G_{\varkappa\sigma}{}^{\nu} \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\nu} = G_{\delta\varepsilon}{}^{\mu} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\varkappa} \frac{\partial \bar{u}^\varepsilon}{\partial u^\sigma} + \frac{\partial^2 \bar{u}^\mu}{\partial u^\varkappa\, \partial u^\sigma} \qquad (34)$$

módon transzformálódó $G_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = g\,(u^\sigma)$ *függvényekkel helyettesíteni* s ezáltal azokat a metrikafüggéstől megszabadítani.

2'. Ilyen $G_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ mennyiségek alkalmazásával az abszolút differenciálás és a párhuzamos eltolás formuláit új, formailag azonos, de *metrikafüggetlen alakba lehet átírni.* Célszerű azonban megkülönböztetni a $G_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$-kal kapcsolatos új abszolút (kovariáns) differenciálás jelét a $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$-kal kapcsolatos régiétől; megállapodásszerűen a *pontosvesszőt* (;) alkalmazzuk e célra a korábbi vessző (,) helyett, a kovariáns jellegnek megfelelő alsó elhelyezésben.

Ezekután pl. *kovariáns vektornál* a $G_{\alpha\beta}{}^{\nu}$-kal kapcsolatos *abszolút (kovariáns) derivált,* definíciószerűen

$$a^\nu{}_{;\sigma} = \frac{\partial a^\nu}{\partial u^\sigma} + a^\varkappa\, G_{\varkappa\sigma}{}^{\nu}, \qquad (35a)$$

módon alakul, mégpedig az

$$\bar{a}^\mu{}_{;\varrho} = a^\nu{}_{;\sigma} \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\nu} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\varrho} \qquad (35b)$$

transzformálódással s ennek megfelelően másodrendű vegyes tenzor jelleggel — összhangban az α) II°-vel. Ugyanannál a G : $u^\sigma = u^\sigma(t)$ görbementi s a $G_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$-kal kapcsolatos *párhuzamos eltolás* értelmezése az

$$(\dot{a})^\nu = \dot{a}^\nu + a^\varkappa\, G_{\varkappa\sigma}{}^{\nu}\, \dot{u}^\sigma = 0 \qquad (36)$$

* L. pl. *Kreyszig* [28].

differenciálegyenlettel történik, ugyancsak a G-től való egyértelmű függéssel, a β) II°-nek megfelelően.

Értelemszerűen hasonló megállapítások érvényesek a *magasabb rendű tenzoroknak* a $G_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$-kal kapcsolatos kovariáns (abszolút) differenciálására, ill. párhuzamos eltolására. A korábbi formulákban a $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$-k mindenütt a $G_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$-kal helyettesítendők.

3′. A tenzorok összegére és szorzatára vonatkozó α) IV°-beli *abszolút differenciálási szabályok* értelemszerűen szintén érvényben maradnak. Nem így az α) IV° 2′-ben közölt RICCI-féle tétel ($g_{\mu\nu,\sigma} = 0$ stb.), minthogy a $G_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$-k nincsenek kapcsolatban a $g_{\mu\nu}$ mértéktenzorral.

A *második kovariáns deriválásnál* az α) IV° (22a—d)-ben említett RIEMANN—CHRISTOFFEL-féle $R^{\delta}{}_{\nu\sigma\alpha}$ görbületi tenzor szerepét most — igazolhatóan — az

$$S^{\delta}{}_{\nu\sigma\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^{\sigma}} G_{\nu\alpha}{}^{\delta} - \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} G_{\nu\sigma}{}^{\delta} + G_{\beta\sigma}{}^{\delta} \cdot G_{\nu\alpha}{}^{\beta} - G_{\beta\alpha}{}^{\delta} \cdot G_{\nu\sigma}{}^{\beta} \tag{37}$$

negyedrendű tenzor veszi át.

További részletkérdéseket az irodalomban* találhat az érdeklődő.

IV°. Mezőelméleti vonatkozások. 1′. Különálló tárgyalásra nem lévén terünk, itt tekintsük át röviden a skalár-, vektor- és tenzormezők legfontosabb formuláinak előállítását az új szimbolikával, (hagyományos alakjuk tekintetében a 3. és 4. §-ra utalva).

Az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r}(u^j)$ $(j = 1, 2, 3)$ függvénnyel meghatározott R_3 tér *metrikája* ortogonalitás esetén:

$$g_{jj}(u^j) = \boldsymbol{r}_j^2(u^j) = r_j^2, \quad g_{ik} = 0 \quad (i \neq j), \quad g = \det(g_{ik}) = r_1^2 r_2^2 r_3^2,$$

$$g^{ii} = \frac{g_{jj}\, g_{kk}}{g} = \frac{1}{r_i^2} \quad \left(r_i = |\boldsymbol{r}_i| = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} \right| : \text{LAMÉ-együtthatók} \right). \tag{38}$$

A $\varphi = \Phi[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v})] = \varphi(u^j)$ skalármező *gradiense*, a (16) szerinti $\partial\varphi/\partial u^i$ kovariáns komponensek felhasználásával:

$$\boldsymbol{grad}\, \varphi = \boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} \boldsymbol{r}^i = \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} g^{ii} \boldsymbol{r}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} \frac{\boldsymbol{r}_i}{r_i^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} \frac{\boldsymbol{t}_i}{r_i} \quad \left(\boldsymbol{t}_i = \frac{\boldsymbol{r}_i}{r_i} \right). \tag{39}$$

A $\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v})] = \boldsymbol{\varrho}(u^j) = \xi^i(u^j)\, \boldsymbol{r}_i(u^j) = \eta^i(u^j)\, \boldsymbol{t}_i(u^j)$ vektormező *divergenciája*, a (7c) abszolút (kovariáns) derivált és a (47e) formula alkalmazásával:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varrho} = \nabla_i \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial u^i} + \xi^j \Gamma_{ij}{}^{i} = \frac{\partial \xi^i}{\partial u^i} + \xi^j \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial(\xi^i \sqrt{g})}{\partial u^i} =$$

$$= \frac{1}{r_1 r_2 r_3} \sum \frac{\partial(\eta^i r_j r_k)}{\partial u^i} = \frac{1}{r_1 r_2 r_3} \left[\frac{\partial(\eta^1 r_2 r_3)}{\partial u^1} + \frac{\partial(\eta^2 r_3 r_1)}{\partial u^2} + \frac{\partial(\eta^3 r_1 r_2)}{\partial u^3} \right]. \tag{40}$$

A $\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{grad}\, \varphi(u^j)$ vektormező divergenciája, vagyis a $\varphi = \varphi(u^j)$ skalármező LAPLACE-*kifejezése:*

$$\Delta\varphi = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varrho} = \operatorname{div} \boldsymbol{grad}\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ii} \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{r_j r_k}{r_i} \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} \right) =$$

$$= \frac{1}{r_1 r_2 r_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{r_2 r_3}{r_1} \frac{\partial\varphi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{r_3 r_1}{r_2} \frac{\partial\varphi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{r_1 r_2}{r_3} \frac{\partial\varphi}{\partial u_3} \right) \right]. \tag{41}$$

* L. pl. *Kreyszig* [28].

A $\varrho = \varrho(u^j)$ vektormező *rotációjának* *i*-edik derékszögű vetülete, azaz *i*-edik kovariáns komponensének $1/r_i$-szerese (i, j, k: cikl !):

$$(\nabla \times \varrho)_i = (\mathbf{rot}\,\varrho)_i = \frac{R_i}{r_i} = \hat{R}_i = g_{ii}\hat{R}^i = \frac{g_{ii}}{\sqrt{g}}(\nabla_j \xi_k - \nabla_k \xi_j) =$$

$$= \frac{g_{ii}}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial u^j} - \xi_m \Gamma^m_{jk}\right) - \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u^k} - \xi_m \Gamma^m_{jk}\right)\right] = \frac{g_{ii}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial u^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial u^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{r_j r_k}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial u^j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial u^k}\right) = \frac{1}{r_j r_k}\left[\frac{\partial (r_k \eta_k)}{\partial u^j} - \frac{\partial (r_j \eta_j)}{\partial u^k}\right], \quad \mathbf{rot}\,\varrho = R_i \mathbf{r}^i = \hat{R}_i \mathbf{t}^i. \tag{42}$$

d) Műszaki alkalmazások

α) Héjak alakváltozási vizsgálata tenzorokkal

I°. B e v e z e t é s. 1'. Korunkban folyton növekszik a héjszerkezetek jelentősége, sőt az egyszerűbb héjformák (kördonga, gömb) mellett újabban *bonyolultabbak* is (paraboloid, hiperboloid, stb.) mind sűrűbben kerülnek alkalmazásra. A héjak statikai vizsgálata (hacsak nem kíván az ún. membránhéjakra szorítkozni) az elmozduláskomponensekre vonatkozó 3 alapegyenletből indul ki. Nyilván célszerűtlen volna ezeket az egyes héjformákra külön-külön, újra levezetni, hanem *teljes általánosságban*, egyszer s mindenkorra ésszerű felállítani azokat (a megfelelő peremfeltételekkel együtt) és utólag konkrétizálni a kívánt *speciális esetekre.*

2'. Az alábbiakban éppen ezt az ésszerű programot kívánjuk vázolni és egy-két vonatkozásban kiegészíteni, módszer tekintetében a *tenzorszámítás* újabb, korszerűbb szimbolikájának alkalmazásával. Tárgyalásunkban Sokolnikoff [19], Girkmann [21], Parkus [23], Krettner [25], Zerna [24] stb. modern írásaira támaszkodunk. Matematikailag szorosan kapcsolódik e pont a (2 dimenziós) Riemann-térről szóló, előző alfejezethez, de egyszersmind könyvünk korábbi, hagyományos tárgyalásmódú fejezeteivel is igyekszik az összeköttetést fenntartani.

II°. A d e f o r m á l a t l a n h é j. 1'. Jellemezzük a héj *középfelületét* az u^1, u^2 paraméterpár függvényében változó

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2), \quad \text{ill.} \quad x_i = x_i(u^1, u^2) \ (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

helyzetvektorral, ill. derékszögű koordinátáival. Ekkor a középfelület $u^1 = \text{const}$, ill. $u^2 = \text{const}$ paramétervonalainak *érintővektorai*

$$\mathbf{r}_1 \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = \mathbf{r}_1(u^1, u^2), \quad \text{ill.} \quad \mathbf{r}_2 \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = \mathbf{r}_2(u^1, u^2) \tag{2}$$

módon, a $P(u^1, u^2)$ pontbeli *egységnormálisa* pedig

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} = \mathbf{v}(u^1, u^2) = \mathbf{r}_3(u^1, u^2) \equiv \mathbf{r}_3 \tag{3a}$$

módon nyerhető. Simának tekintve a középfelületet, tudvalevőleg $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0}$, és folytonosan változik, hasonlóan $\mathbf{r}_3$ is. Az $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ vektorhármas és

$$\mathbf{e}_1 \equiv \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|}, \quad \mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{r}_3 \tag{3b}$$

normált vektorhármasa is térbeli (3 dimenziós) *lokális bázist* képez (mégpedig általában csak $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$ és $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ viszonylatban ortogonális bázist), amelyre minden $P(u^1, u^2)$-höz tartozó vektor vonatkoztatható.

A héjközépfelület *első alapformája* – a $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\alpha du^\alpha$ ívelemvektor felhasználásával –

$$\Gamma_1 = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\beta)\, du^\alpha du^\beta = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta = dx_i^2 = ds^2 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{4a}$$

alakot ölt; $g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\beta$ együtthatói a középfelület mértéktenzorának ún. konvariáns elemei. Ezekkel

$$|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)^2} = \sqrt{\boldsymbol{r}_1^2 \boldsymbol{r}_2^2 - (\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2)^2} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{g}, \tag{4b}$$

$$\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \boldsymbol{r}_3 = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \boldsymbol{r}_3 = |\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2| \cdot |\boldsymbol{r}_3| = \sqrt{g} \cdot 1 = \sqrt{g}, \tag{4c}$$

ahol $g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$ a $g_{\alpha\beta}$ tenzor második invariánsa, egyszersmind a Γ_1 kvadratikus alak diszkriminánsának $-{}^1/_4$-szerese.

A héjközépfelület *második alapformája* – a

$$d(\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}) = d\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v} \cdot d^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \quad d\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial u^\alpha} du^\alpha = \boldsymbol{v}_\alpha du^\alpha,$$

$$d^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta + \boldsymbol{r}_\alpha d^2 u^\alpha$$

differenciálok alkalmazásával –

$$\Gamma_2 = \boldsymbol{v} \cdot d^2\boldsymbol{r} = \left(\frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g}} \cdot \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}\right) du^\alpha du^\beta + 0 = (\boldsymbol{v}\, \boldsymbol{r}_{\alpha\beta})\, du^\alpha du^\beta =$$

$$= -\, d\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{v}_\alpha du^\alpha \cdot \boldsymbol{r}_\beta du^\beta = (-\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{r}_\beta)\, du^\alpha du^\beta = b_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta \tag{5b}$$

alakban jelentkezik; $b_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{r}_\beta = \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{r}_{\alpha\beta}$ együtthatói a középfelület ún. főtenzorának elemei. A $b_{\alpha\beta}$ tenzor második invariánsa, egyszersmind a Γ_2 kvadratikus alak diszkriminánsának $-{}^1/_4$-szerese $b = b_{11} b_{22} - b_{12}^2$.

A héjközépfelület *harmadik alapformája* végül

$$\Gamma_3 = d\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}_\alpha du^\alpha \cdot \boldsymbol{v}_\beta du^\beta = (\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta)\, du^\alpha du^\beta = c_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta \tag{6}$$

módon alakul; $c_{\alpha\beta} = \boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta$ együtthatói szintén a középfelület egy tenzorának elemei.

Megmutatható* egyébként, hogy a $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ és $c_{\alpha\beta}$ tenzor *lineárisan függő* viszonyban van egymással, mégpedig

$$c_{\alpha\beta} = b_\alpha{}^\mu\, b_{\beta\mu} = b_\text{I}\, b_{\alpha\beta} - \frac{b}{g} g_{\alpha\beta}, \quad \text{ahol} \quad b_\alpha{}^\mu = b_{\alpha\nu}\, g^{\nu\mu}, \quad b_\text{I} = b_\alpha{}^\alpha; \tag{7a}$$

az invariánsok kapcsolata igazolhatóan**

$$c_\text{I} = b_\text{I}^2 - 2\frac{b}{g}, \quad \text{ahol} \quad \boldsymbol{v}_\alpha = c_\alpha{}^\beta\, \boldsymbol{r}_\beta \quad \text{és} \quad c_\alpha{}^\alpha = c_\text{I}. \tag{7b}$$

A fentebbi $g_{\alpha\beta}$ és $b_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ tenzor – az $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{v}$ figyelembevételével – kiegészíthető a következő módon:

$$g_{ij} = \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_j, \quad \text{azaz} \quad g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\beta, \quad g_{3j} = \boldsymbol{r}_3 \boldsymbol{r}_j = g_{i3} = \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_3 = 0, \quad g_{33} = \boldsymbol{r}_3^2 = 1; \tag{8a}$$

$$b_{\alpha j} = -\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{r}_j, \quad \text{azaz} \quad b_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{r}_\beta, \quad b_{\alpha 3} = -\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{r}_3 = b_3 = 0, \tag{8b}$$

ahol $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{r}_3^2 = 1$, $d_\alpha(\boldsymbol{v}^2) = 2\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_\alpha = 2\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{r}_3 = 0$ volt.

* és ** L. pl. *Kreyszig* [28].

2'. Ezek után bevezetjük a $B : \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ lokális bázis

$$B^{-1} : \boldsymbol{r}^1 = \frac{1}{V}(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3), \quad \boldsymbol{r}^2 = \frac{1}{V}(\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1), \quad \boldsymbol{r}^3 = \frac{1}{V}(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \quad (V = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3 = \sqrt{g} \neq 0) \tag{9}$$

lokális reciprok bázisát; e két bázis vektorai — tudvalevőleg — az $\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}^j = \delta_{ij}$ egyenletnek tesznek eleget. A B^{-1} bázis vektoraival

$$g^{ij} = \begin{Bmatrix} g^{\alpha\beta} = \boldsymbol{r}^\alpha \boldsymbol{r}^\beta, & \text{ha } i = \alpha,\ j = \beta; \\ g^{\alpha 3} = g^{3\beta} = 0, & \text{ha } i = \alpha,\ j = \beta; \\ g^{33} = 1 & \end{Bmatrix} \tag{10}$$

módon értelmezzük a héjközépfelület (bővített) mértéktenzorának ún. kontravariáns elemeit. Az $\boldsymbol{r}_i$ vektorok B^{-1} reciprok bázison és az $\boldsymbol{r}^j$ vektorok B bázison valók

$$\boldsymbol{r}_i = x_{ij}\boldsymbol{r}^j \quad (x_{ij} = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j = g_{ij}), \quad \boldsymbol{r}^j = x^{ji}\boldsymbol{r} \quad (x^{ji} = \boldsymbol{r}^j\boldsymbol{r}^i = g^{ji}) \tag{11}$$

előállítását felhasználva, a középfelület *kovariáns és kontravariáns mértékszámainak összefüggése* (az indexek i, m, n, ill. j, p, r ciklikus sorrendje mellett) így alakul:

$$g^{ij} = \boldsymbol{r}^i\boldsymbol{r}^j = \frac{(\boldsymbol{r}_m \times \boldsymbol{r}_n)(\boldsymbol{r}_p \times \boldsymbol{r}_r)}{V^2} = \frac{(\boldsymbol{r}_m\boldsymbol{r}_p)(\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{r}_r) - (\boldsymbol{r}_m\boldsymbol{r}_r)(\boldsymbol{r}_n\boldsymbol{r}_p)}{g} =$$

$$= \frac{g_{mp}g_{nr} - g_{mr}g_{np}}{g} = \frac{G^{ij}}{g}, \tag{12a}$$

ahol G^{ij} a det (g_{ij}) harmadrendű determináns ij indexű eleméhez tartozó előjeles aldetermináns (komplementer minor); részletesen pedig — a (8a) figyelembe vételével — így írható:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{\alpha 3} = g^{3\beta} = g_{3\alpha} = g_{\beta 3} = 0,$$

$$g^{33} = g_{33} = 1. \tag{12b}$$

Bevezetve még a $b_\alpha{}^j = -\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{r}^j$ jelölést, a második alapforma együtthatóival kapcsolatban a

$$b_{\alpha j} = -\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{r}_j = -\boldsymbol{v}_\alpha \cdot g_{ji}\boldsymbol{r}^i = g_{ji}(-\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{r}^i) = g_{ji}\, b_\alpha{}^i \tag{13a}$$

$$b_\alpha{}^i = -\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{r}^i = -\boldsymbol{v}_\alpha \cdot g^{ij}\boldsymbol{r}_j = g^{ij}(-\boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{r}_j) = g^{ij}\, b_{\alpha j} \quad (b_\alpha{}^3 = b_3{}^\beta = 0) \tag{13b}$$

formulákat, a harmadik alapforma együtthatóival kapcsolatban pedig a

$$c_{\alpha\beta} = \boldsymbol{v}_\alpha\boldsymbol{v}_\beta = (-b_{\alpha i}\boldsymbol{r}^i)(-b_\beta{}^j\boldsymbol{r}_j) = b_{\alpha i}\, b_\beta{}^i \tag{14}$$

formulákat írhatjuk fel.

Ha speciálisan a héjközépfelület $u^1 = \text{const}$ és $u^2 = \text{const}$ paramétergörbéi *ortogonális trajektóriák*, azaz $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 = g_{12} = g_{21} = 0$, akkor nyilván

$$g = g_{11}g_{22}, \quad g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}}, \quad g^{33} = 1, \quad g^{21} = g^{12} = 0, \tag{15a}$$

továbbá

$$\boldsymbol{r}_\alpha = g_{\alpha\alpha}\boldsymbol{r}^\alpha, \quad \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}^3 \quad \text{és} \quad \boldsymbol{r}^\alpha = g^{\alpha\alpha}\boldsymbol{r}_\alpha, \quad \boldsymbol{r}^3 = \boldsymbol{r}_3. \tag{15b}$$

3'. A héjközépfelület u^1, u^2 paraméterű pontjához tartozó felületi normális $u^3 \equiv z$ paraméterű pontja, egyszersmind *a héjtest* $u^1, u^2, u^3 \equiv z$ *paraméterű pontja a*

$$\varrho = \boldsymbol{r}(u^1, u^2) + u^3 \boldsymbol{\nu}(u^1, u^2) = \varrho(u^1, u^2, u^3), \quad \text{ill.}$$

$$\xi_i = x_i\,(u^1, u^2) + u^3 \nu_i\,(u^1, u^2) = \xi_i(u^1, u^2, u^3) \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (16)$$

helyzetvektorral, ill. derékszögű koordinátáival adható meg, ahol $-h \leqq u^3 \equiv z \leqq h$, tehát $\nu = 2h$ a héjtest vastagsága, lévén $|\boldsymbol{\nu}| = |\boldsymbol{r}_3| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$. A héjtest egy $u^3 \equiv z = \text{const}$ paraméterfelületét ily módon a

$$\varrho = \boldsymbol{r}(u^1, u^2) + c\,\boldsymbol{\nu}(u^1, u^2) = \varrho(u^1, u^2, c), \quad \text{ill.}$$

$$\xi_{ti} = x_i\,(u^1, u^2) + c\nu_i(u^1, u^2) = \xi_i(u^1, u^2, c), \qquad (17)$$

e felület paramétergörbe-érintőit, ill. egységnormálisát pedig a

$$\varrho_a = \frac{\partial \varrho}{\partial u^a} = \boldsymbol{r}_a + c\,\boldsymbol{\nu}_a \quad (\alpha = 1, 2), \quad \text{ill.} \quad \varrho_3 = \frac{\partial \varrho}{\partial u^3} = \boldsymbol{\nu} \qquad (18a, b)$$

formulákkal írhatjuk le.

Lássuk most a héjtest metrikáját! *A héjtest ívelemvektora és négyzete*

$$d\varrho = d\boldsymbol{r} + zd\boldsymbol{\nu} + dz\boldsymbol{\nu} = d\varrho_t + dz\boldsymbol{\nu}, \qquad d\varrho^2 = d\sigma^2 = d\xi_i^2 = d\varrho_i^2 + dz^2 =$$

$$= d\boldsymbol{r}^2 + 2zd\boldsymbol{r}d\boldsymbol{\nu} + z^2 d\boldsymbol{\nu}^2 + dz^2 = \Gamma_1 - 2z\,\Gamma_2 + z^2\,\Gamma_3 + dz^2 =$$

$$= (g_{\alpha\beta} - 2zb_{\alpha\beta} + z^2 c_{\alpha\beta})du^\alpha\, du^\beta + dz^2 = m_{ij}\, du^i\, du^j; \qquad (19a)$$

e kvadratikus alak

$$m_{ij} = \begin{cases} m_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - 2zb_{\alpha\beta} + z^2 c_{\alpha\beta}, \\ m_{\alpha 3} = m_{3\beta} = 0, \quad m_{33} = 1; \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \qquad (19b)$$

együtthatói egyúttal *a héjtest mértéktenzorának* elemeit képezik.

Meg lehet mutatni*, hogy az m_{ij} mértéktenzor $m = \det(m_{ij}) = \det(m_{\alpha\beta}) = m_{11}m_{22} - m_{12}^2$ *invariánsának* $\sqrt{m}$ *négyzetgyökére,* valamint e mértéktenzor m^{ij} *kontravariáns elemeire* a

$$\sqrt{m} = \sqrt{g}\left(1 - b_1 z + \frac{b}{g} z^2 + \ldots\right), \quad \text{ill. az} \qquad (20a)$$

$$m^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + 2zb^{\alpha\beta} + 3z^2 c^{\alpha\beta} + \ldots, \quad m^{\alpha 3} = m^{3\beta} = 0, \quad m^{33} = 1 \qquad (20b)$$

formulát kapjuk, ahol — a kicsiny héjvastagságra $(2|z| \leqq 2h \ll 1)$ való tekintettel — a z-ben harmad- és magasabb fokú tagok elhanyagolhatók. A (19b) formulából látható, hogy a héjtest m_{ij} metrikája *kifejezhető* a héjközépfelület $m_{\alpha\beta}$ metrikus és további $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ jellemzőivel (és a z paraméterrel).

4'. Végül említésre méltó, hogy *a héjtest másodfajú* CHRISTOFFEL-*szimbólumai* — az előbbi elhanyagolással — így alakulnak**:

$$H_{ik}{}^{i} = m^{j\alpha} \frac{\partial \varrho}{\partial u^\alpha} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u^i \partial u^k} = m^{j\alpha}\, \varrho_\alpha \varrho_{ik} = m^{j\alpha}\, \varrho_\alpha \varrho_{ki} = \qquad (21a, b, c)$$

* L. *Deuker* [22].
** L. *Parkus* [23] és pl. *Kilcsevszkij* [9].

$$
= \begin{cases} H_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = \frac{1}{2} m^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial m_{\mu\beta}}{\partial u^{\gamma}} + \frac{\partial m_{\mu\gamma}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial m_{\beta\gamma}}{\partial u^{\mu}} \right) & (a_{\text{I}} = b_{\beta}^{\alpha} c_{\alpha}^{\beta}) \\ H_{\beta\gamma}{}^{3} = b_{\beta\gamma} - z c_{\beta\gamma}, \quad H_{\alpha 3}{}^{\alpha} = -(b_{\text{I}} + z c_{\text{I}} + z^2 a_{\text{I}} + \ldots), & \\ H_{\beta 3}{}^{\alpha} = H_{3\beta}^{\alpha} = -(b_{\beta}{}^{\alpha} + z c_{\beta}{}^{\alpha} + z^2 b_{\mu}{}^{\alpha} c_{\beta}{}^{\mu} + \ldots), & \\ H_{3\alpha}{}^{\alpha} = H_{\alpha 3}{}^{3} = H_{33}{}^{3} = H_{33}{}^{\alpha} = 0 & \end{cases}
$$

ahol $a_{\text{I}} = b_{\beta}{}^{\alpha} c_{\alpha}{}^{\beta} = b_{\beta}{}^{\alpha} b_{\gamma}{}^{\beta} b_{\alpha}{}^{\gamma}$ a $b_{\alpha}{}^{\mu} c_{\mu}{}^{\beta}$ másodrendű szimmetrikus tenzor első invariánsa. Megmutatható*, hogy *a héjközépfelület*

$$
\Gamma_{ik}{}^{l} = g^{l\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^{l} u^{k}} = g^{l\alpha} \boldsymbol{r}_{\alpha} \boldsymbol{r}_{ki} = \frac{1}{2} g^{l\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial u^{k}} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial u^{j}} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^{\alpha}} \right)
$$

másodfajú CHRISTOFFEL-*szimbólumai,* továbbá a héjközépfelületen vett (δ jelű) abszolút (kovariáns) differenciálás, végül a

$$
\frac{\delta b_{\alpha\beta}}{\delta u^{\gamma}} = \frac{\delta b_{\alpha\gamma}}{\delta u^{\beta}} \tag{23}
$$

MAINARDI—CODAZZI-*formula* segítségével a fentebbi $H_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ szimbólumok

$$
H_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}{}^{\alpha} - z \frac{\delta b_{\gamma}{}^{\alpha}}{\delta u^{\beta}} - z^2 b^{\alpha\mu} \frac{\delta b_{\mu\gamma}}{\delta u^{\beta}} + \ldots \tag{21a'}
$$

alakot öltenek.

III°. A deformált héj. 1'. A *vékony héjak* elméletében az alábbi *négy közelítő feltételt* szokás alapul venni:**

A) A héj $v = 2h$ *vastagsága kicsiny* többi méreteihez képest.

B) A héj *lehajlása csekély* vastagságához képest.

C) A deformálatlan héjközépfelület egy normálisán elhelyezkedő pontok a deformáció után is *egy normálisán maradnak.*

D) A héjközépfelületre merőlegesen működő *normálfeszültségek elhanyagolhatók.*

Amint látni fogjuk, e (gyakorlatilag jobb-rosszabb közelítéssel teljesülő) feltételekre hivatkozva különféle *elhanyagolásokat* fogunk eszközölni vizsgálataink során.

A héjközépfelület alakváltozását jellemezzük u^1, u^2 paraméterű pontjainak $\boldsymbol{v}(u^1, u^2)$ *elmozdulásvektorával.* A *deformált középfelület* vektoregyenlete, érintővektorai és egységnormálisa tehát így alakul:

$$
\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2) + \boldsymbol{v}(u^1, u^2), \quad \dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial u^{\alpha}} = \boldsymbol{r}_{\alpha} + \boldsymbol{v}_{\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2),
$$

$$
\dot{\boldsymbol{r}}_{3} = \nu = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2|}, \tag{22a, b, c}
$$

metrikája pedig így: (23a, b, c)

$$
\hat{g}_{\alpha\beta} = \hat{\boldsymbol{r}}_{\alpha} \hat{\boldsymbol{r}}_{\beta} = g_{\alpha\beta} + \boldsymbol{r}_{\alpha} \boldsymbol{v}_{\beta} + \boldsymbol{r}_{\beta} \boldsymbol{v}_{\alpha} + \boldsymbol{v}_{\alpha} \boldsymbol{v}_{\beta}, \quad \hat{g}_{\alpha 3} = \hat{g}_{3\beta} = 0, \quad \hat{g}_{33} = 1,
$$

* L. *Parkus* [23].
** L. pl. *Girkmann* [21].

ahol — a *B)* értelmében — a $\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta$ tag az előzőkhöz képest elhanyagolható. Így a $\hat{g}_{\alpha\beta}$ mértéktenzor *determinánsa* a

$$\hat{g} = \hat{g}_{11}\hat{g}_{22} - \hat{g}_{12}^2 = g + 2\,[g_{\alpha\alpha}\,(\boldsymbol{r}_\beta \boldsymbol{v}_\beta) - g_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{v}_\beta)\,] \quad (\alpha \neq \beta) \tag{24a}$$

alakot ölt, s ebből —, az $\boldsymbol{r}_\alpha = g_{i\alpha}\boldsymbol{r}^i = g_{\gamma\alpha}\boldsymbol{r}^\gamma$ előállítás felhasználásával — a

$$\hat{g} = g\,[1 + 2\,(\boldsymbol{r}^\alpha \boldsymbol{v}_\alpha)\,], \quad \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} = \frac{1}{\sqrt{g}}[1 + 2\,(\boldsymbol{r}^\alpha\,\boldsymbol{v}_\alpha)\,]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{g}}\,(1 - \boldsymbol{r}^\alpha \boldsymbol{v}_\alpha) \tag{24 b, c}$$

alakokra jutunk. Minthogy $\boldsymbol{r}_1 = (\boldsymbol{r}^2 \times \boldsymbol{v})\sqrt{g}$ és $\boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^1)\sqrt{g}$, írható tehát, hogy

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{\sqrt{\hat{g}}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,[\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\,] =$$

$$= \sqrt{\frac{g}{\hat{g}}}\left[\boldsymbol{r}_3 + (\boldsymbol{r}^2 \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}^1) + \frac{1}{\sqrt{g}}\,(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)\right]. \tag{25a}$$

Ebből — a kifejtési tétellel és a magasabb rendűen kicsiny tagok elhanyagolásával — az *új normális*

$$\hat{\boldsymbol{v}} \approx (1 - \boldsymbol{r}^\alpha \boldsymbol{v}_\alpha)\,[\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{r}^\alpha \boldsymbol{v}_\alpha)\,\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_\alpha)\,\boldsymbol{r}^\alpha\,] \approx \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_\alpha)\,\boldsymbol{r}^\alpha = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \tag{25b}$$

kifejezésére jutunk, ahol

$$\boldsymbol{w} = -\,(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_\alpha)\,\boldsymbol{r}^\alpha = -\,(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_\alpha)\,g^{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_\beta = w^\beta \boldsymbol{r}_\beta. \tag{25c}$$

Ha speciálisan a héjközépfelületi bázis ortogonális, azaz $g_{12} = g_{21} = 0$, akkor — (15a) figyelembevételével —

$$\hat{g} = g_{11}g_{22} + g_{11}(\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{v}_2) + g_{22}(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{v}_1); \quad w^1 = -\,(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1)/g_{11},$$

$$w^2 = -\,(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2)/g_{22} \tag{26a, b, c}$$

3'. Az előbbiek felhasználásával a *deformált héjtest* egy $u^3 = z = \text{const}$ paraméterfelület, valamint érintői és normálisa

$$\hat{\boldsymbol{\varrho}} = \hat{\boldsymbol{r}}(u^1, u^2) + c\hat{\boldsymbol{v}}(u^1, u^2), \quad \hat{\boldsymbol{\varrho}}_\alpha \equiv \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varrho}}}{\partial u^\alpha} = \hat{\boldsymbol{r}}_\alpha + c\boldsymbol{v}_\alpha,$$

$$\hat{\boldsymbol{\varrho}}_3 = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varrho}}}{\partial u^3} = \hat{\boldsymbol{v}}. \tag{27a, b, c}$$

formulákkal írható le. Ezek alkalmazásával és a (19b) mintájára, a deformált héjtest *metrikája* így alakul:

$$\hat{m}_{ij} = \left\{\begin{array}{l} \hat{m}_{\alpha\beta} = \hat{\boldsymbol{\varrho}}_\alpha \hat{\boldsymbol{\varrho}}_\beta = \hat{g}_{\alpha\beta} - 2z\hat{b}_{\alpha\beta} + z^2\hat{c}_{\alpha\beta}, \\ \hat{m}_{\alpha 3} = \hat{m}_{3\beta} = 0, \quad \hat{m}_{33} = 1 \quad (\alpha, \beta = 1,\ 2). \end{array}\right\}. \tag{28}$$

A deformált és deformálatlan héjközépfelület *alapmennyiségei* között — az 1'-ben említett közelítő feltételek és a 2' figyelembevételével — ellenőrizhetően az alábbi *összefüggések* állapíthatók meg:

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \hat{r}_\alpha \hat{r}_\beta \approx g_{\alpha\beta} + r_\alpha v_\beta + r_\beta v_\alpha, \qquad (29a, b, c)$$

$$\hat{b}_{\alpha\beta} = -\hat{v}_\alpha \hat{r}_\beta \approx b_{\alpha\beta} - w_\alpha r_\beta - v_\alpha v_\beta = b_{\alpha\beta} - w_\alpha r_\beta + b_\alpha^{\gamma} \cdot (r_\gamma v_\beta),$$

$$\hat{c}_{\alpha\beta} = \hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta = c_{\alpha\beta} - b_\alpha^{\gamma}(r_\gamma w_\alpha) - b_\beta^{\gamma}(r_\gamma w_\beta).$$

Végül a deformált héjtest egy tetszőleges $\hat{\varrho} = \hat{r}(u^1, u^2) + z\hat{v}(u^1, u^2)$ pontjában az *első alapforma* így alakul:

$$d\hat{\varrho}^2 = d\hat{\varrho}^2 + dz^2 = \hat{\varrho}_\alpha \hat{\varrho}_\beta \, du^\alpha \, du^\beta + dz^2 = \hat{m}_{\alpha\beta} \, du^\alpha \, du^\beta + \hat{m}_{33} \, dz^2,$$

ahol a (19a) és a (28) veendő tekintetbe.

IV°. Alakváltozási tenzor. 1'. Áttérve az alakváltozások vizsgálatára, tanulmányozzuk először *a héj pontjainak elmozdulását* a deformáció során. A héjközépfelület $r = r(u^1, u^2)$ pontja $v = v(u^1, u^2) = v^k r_k$ elmozdulással az $\hat{r} = r + v$ pontba, a héjtest $\varrho = r(u^1, u^2) + u^3 v(u^1, u^2)$ pontja pedig ugyanakkor a $\hat{\varrho} = \hat{r} + u^3 \hat{v} = r + v + u^3(v + w) = \varrho + v + u^3 w$ pontba kerül. A ϱ pont elmozdulásvektora — tehát így alakul:

$$v' = \hat{\varrho} - \varrho = v + u^3 w = v - u^3 (v v_\alpha) r^\alpha = [v^k - u^3 (v v_\alpha) g^{\alpha k}] r_k =$$

$$= \left[v^k - u^3 v \left(\frac{\partial v^l}{\partial u^\alpha} r_l + v^l r_{l\alpha} \right) g^{\alpha k} \right] r_k =$$

$$= \left[v^k - u^3 \left(\frac{\partial v^3}{\partial u^\alpha} + v^l b_{l\alpha} \right) g^{\alpha k} \right] r_k = v'^k r_k, \qquad (31)$$

ahol felhasználtuk a $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(v^l r_l)$ differenciálás eredményét és az (5b) formulát. A (31)-ből megállapítható, hogy a héjtest $\varrho = r + u^3 v$ pontjának v'^k elmozduláskomponensei *az ugyanazon normálison* fekvő r héjközépfelületi pont v^l elmozduláskomponenseivel fejezhetők ki.

Ha az előbbi vizsgálatot az $e_k = r_k / |r_k|$ egységvektorokból álló (lokális, normált) bázisban végezzük el, $v = \hat{v}^k e_k = v^k |r_k| \, e_k$, $v' = \hat{v}'^k e_k = v'^k |r_k| \, e_k$ jelölések igénybevételével, akkor a (31) helyett a

$$v' = \hat{v}'^k e_k = \left[\hat{v}^k - u^3 \left(\frac{\partial \hat{v}^3}{\partial u^\alpha} + \frac{\hat{v}^l}{|r_l|} b_{l\alpha} \right) |r_k| \, g^{\alpha k} \right] e_k \qquad (32)$$

formulát kapjuk, ahol $g^{\alpha 3} = 0$ miatt $\hat{v}'^3 = \hat{v}^3 \neq f(u^3)$, azaz $\partial \hat{v}^3 / \partial u^3 = 0$.

Ortogonális bázis ($g_{12} = g_{21} = g^{12} = g^{21} = 0$) esetén a (32) formula — ellenőrizhetően — a

$$v' = \hat{v}'^k e_k = \left[\hat{v}^\alpha - u^3 \left(\frac{\partial \hat{v}^3}{\partial u^\alpha} + \frac{\hat{v}^\alpha}{|r_\alpha|} b_{\alpha\alpha} \right) \frac{1}{|r_\alpha|} \right] e_\alpha + v^3 e_3 \qquad (33)$$

alakra egyszerűsödik.

2'. Ezek után hozzáláthatunk *a héjközépfelület alakváltozási tenzorának megszerkesztéséhez*. Az $\hat{r} = r + v = \hat{r}(u^1, u^2)$ egyenletű deformált héjközépfelület *ívelemvektora**

* Használjuk fel a következőkben a skaláris és a diadikus szorzat közötti $(ab) c = (a^i b_i) c^j = a^i (b_i c^j) = a^i d_i^j = a(b \circ c) = aD$ összefüggést!

$$d\hat{r} = dr + dv = r_j\, du^j + du^i v = dr + (dr \cdot r^i)\, v = dr + dr(r^i \circ v_i) = dr + drV \tag{34a}$$

alakokban állítható elő, ahol $V = r^i \circ v_i$ a héjközépfelület ún. alakváltozási tenzora. Maga az ívelem — a $dr = (dr)^n \cdot |dr| = e\,ds$, $d\hat{r} = \hat{e}\, d\hat{s}$ jelöléssel, valamint a kis deformációkra való tekintettel —

$$d\hat{s} = ds\,|e + eV| = ds\sqrt{(e + eV)^2} = ds\,[1 + 2e(eV) + (eV)^2]^{\frac{1}{2}} \approx$$
$$\approx ds\,[1 + e(eV)] = ds + \delta s \tag{34b}$$

módon alakul. Az e irányban vett fajlagos hosszváltozás, ún. nyúlás tehát az

$$\varepsilon_e = \frac{\delta s}{ds} = \frac{d\hat{s} - ds}{ds} = e(eV) = e\,[e(r^i \circ v_i)\,] = (er^i)\,(ev_i) \tag{34c}$$

képlettel jellemezhető.

A $V^* = v_i \circ r^i$ transzponált tenzor felhasználásával *a héjközépfelület tiszta deformációjának (tükrös) tenzora*

$$D = \frac{1}{2}(V + V^*) = \frac{1}{2}(r^i \circ v_i + v_i \circ r^i) \tag{35a}$$

módon alakul. Vele kapcsolatban

$$r_\sigma D = \frac{1}{2}\,[(r_\sigma r^i)\, v_i + (r_\sigma v_i)\, r^i\,] = \frac{1}{2}\,[v_\sigma + (r_\sigma v_i)\, r^i\,], \tag{35b}$$

továbbá

$$r_\varrho(r_\sigma D) = \frac{1}{2}\,[(r_\varrho v_\sigma) + (r_\sigma v_i)\,(r_\varrho r^i)\,] = \frac{1}{2}\,[(r_\varrho v_\sigma) + (r_\sigma v_\varrho)\,] =$$
$$= D_{\varrho\sigma} = |r_\varrho|\,|r_\sigma|\,\varepsilon_{\varrho\sigma}, \tag{35c}$$

ahol $\varrho = \sigma$-nál $D_{\varrho\varrho} = r_\varrho v_\varrho = |r_\varrho|^2\,\varepsilon_{\varrho\varrho}$.

Az $e_\sigma = r_\sigma/|r_\sigma|$ irányú *nyúlás* formulája

$$\varepsilon_{\sigma\sigma} = e_\sigma(e_\sigma D) = \frac{1}{|r_\sigma|^2}\, r_\sigma(r_\sigma D) = \frac{D_{\sigma\sigma}}{|r_\sigma|^2} = \frac{r_\sigma v_\sigma}{|r_\sigma|^2}, \tag{36a}$$

az r_ϱ és r_σ vektorpár *szögváltozásáé* pedig

$$-\gamma_{\varrho\sigma} = 2\varepsilon_{\varrho\sigma} - \cos\varphi_{\varrho\sigma}\cdot(\varepsilon_{\varrho\varrho} + \varepsilon_{\sigma\sigma}) = \frac{1}{|r_\varrho|\,|r_\sigma|}\left[2D_{\varrho\sigma} - g_{\varrho\sigma}\left(\frac{D_{\varrho\varrho}}{|r_\varrho|^2} + \frac{D_{\sigma\sigma}}{|r_\sigma|^2}\right)\right], \tag{36b}$$

ortogonalitás ($g_{\varrho\sigma} = 0$, ha $\varrho \neq \sigma$) esetén $-\gamma_{\varrho\sigma} = 2\varepsilon_{\varrho\sigma} = 2D_{\varrho\sigma}/|r_\varrho|\,|r_\sigma|$.

Állítsuk elő ezután a $D_{\varrho\sigma}$ mennyiségeket a $v = v^k r_k$ alak, a $\Gamma_{\varrho k\sigma} = r_\varrho r_{k\sigma}$ Christoffel-szimbólumok és az

$$r_\varrho r_{3\sigma} = r_\varrho v_\sigma = -\,b_{\sigma\varrho} = -\,v r_{\sigma\varrho} = -\,v r_{\varrho\sigma} = -\,b_{\varrho\sigma} = v_\varrho r_\sigma \tag{37a}$$

összefüggés felhasználásával. Így írható, hogy

$$v_\sigma = \frac{\partial v^k}{\partial u^\sigma}\, r_k + v^k r_{k\sigma}, \quad r_\varrho v_\sigma = \frac{\partial v^k}{\partial u^\sigma}\, g_{\varrho k} + v^k \Gamma_{\varrho k\sigma} - v^3 b_{\sigma\varrho}, \tag{37b}$$

továbbá

$$D_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_\varrho \boldsymbol{v}_\sigma + \boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{v}_\varrho) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^\sigma} g_{\varrho k} + \frac{\partial v^k}{\partial u^\varrho} g_{\sigma k}\right) + \frac{v^k}{2}(\Gamma_{\varrho k\sigma} + \Gamma_{\sigma k\varrho}) - v^3 b_{\varrho\sigma}, \quad (38a)$$

$$D_{\sigma\sigma} = \boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma = \frac{\partial v^k}{\partial u^\sigma} g_{\sigma k} + v^k \Gamma_{\sigma k\sigma} - v^3 b_{\sigma\sigma}. \quad (38b)$$

Ugyanezen formulák — a $v^k = \hat{v}^k/|\boldsymbol{r}_k|$ helyettesítéssel — az $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{r}_k/|\boldsymbol{r}_k|$ normált bázisra vonatkozó, lényegesen bonyolultabb alakban is felírhatók. Ortogonalitás esetén a $g_{\alpha k} = 0$ $(\alpha \neq k)$ együtthatójú tagok eltűnnek.

3'. Végül *a héjtest alakváltozási tenzorát* kell megszerkesztenünk. Mint láttuk, a héjtest $\varrho = \boldsymbol{r}(u^1, u^2) + u^3 \boldsymbol{v}(u^1, u^2)$ pontja — az említett kis elmozdulásnál — a $\hat{\varrho} = \hat{\boldsymbol{r}} + u^3 \hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v} + u^3(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ pontba kerül. Az itteni *ívelemvektor*

$$d\hat{\varrho} = d\hat{\boldsymbol{r}} + u^3\, d\hat{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\, du^3 = d\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{v} + u^3(d\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})\, du^3 =$$

$$= d\varrho + d\boldsymbol{v} + u^3\, d\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}\, du^3 = d\varrho + \boldsymbol{v}_i\, du^i + u^3 \boldsymbol{w}\, du^i + \boldsymbol{w}\, du^3 =$$

$$= d\varrho + d\varrho(\boldsymbol{r}^i \circ \boldsymbol{v}_i) + d\varrho u^3(\boldsymbol{r}^i \circ \boldsymbol{w}_i) + d\varrho(\boldsymbol{r}^3 \circ \boldsymbol{w}) = d\varrho\, [\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} + u^3 \boldsymbol{W} + \boldsymbol{U}] \quad (39a)$$

alakokban állítható elő, ahol (39b)

$$du^i = \boldsymbol{r}_j\, du^j \cdot \boldsymbol{r}^i = d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^i, \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}^i \circ \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{r}^i \circ \boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{W} = \boldsymbol{r}^i \circ \boldsymbol{w}_i, \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{r}^3 \circ \boldsymbol{w}.$$

Maga az ívelem — a $d\varrho = \boldsymbol{e}\, d\sigma$, $d\hat{\varrho} = \hat{\boldsymbol{e}}\, d\hat{\sigma}$ jelöléssel és a kis deformációkra való tekintettel —

$$d\hat{\sigma} = d\sigma \sqrt{(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{eV} + u^3 \boldsymbol{eW} + \boldsymbol{eU})^2} \approx d\sigma\, [1 + \boldsymbol{e}(\boldsymbol{eV}) + u^3 \boldsymbol{e}(\boldsymbol{eW}) + \boldsymbol{e}(\boldsymbol{eU})] =$$

$$= d\sigma\, [1 + \boldsymbol{e}(\boldsymbol{e\Phi})] \quad (39c)$$

módon alakul, ahol $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{V} + u^3 \boldsymbol{W} + \boldsymbol{U}$. Az $\boldsymbol{e}$ irányban vett nyúlás tehát az

$$\varepsilon'_e = \frac{\delta\sigma}{d\sigma} = \frac{d\hat{\sigma} - d\sigma}{d\sigma} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{e\Phi}) = \boldsymbol{e}\, [\boldsymbol{e}(\boldsymbol{V} + u^3 \boldsymbol{W} + \boldsymbol{U})] \quad (39d)$$

formulával jellemezhető; a benne szereplő $\boldsymbol{\Phi}$ a héjtest ún. alakváltozási tenzora.

A $\boldsymbol{\Phi}^* = \boldsymbol{V}^* + u^3 \boldsymbol{W}^* + \boldsymbol{U}^*$ transzponált tenzor fehasználásával *a héjtest tiszta deformációjának tenzora*

$$\boldsymbol{D}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^*) = \frac{1}{2}\, [(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^*) + u^3(\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^*) + (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^*)]$$

alakot, komponensei pedig

$$\varepsilon'_{\sigma\sigma} = \boldsymbol{e}_\sigma(\boldsymbol{e}_\sigma \boldsymbol{D}') = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_\sigma|^2} \boldsymbol{r}_\sigma(\boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{D}') = \frac{D'_{\sigma\sigma}}{|\boldsymbol{r}_\sigma|^2},$$

$$-\gamma'_{\varrho\sigma} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}_\sigma|\,|\boldsymbol{r}_\varrho|}\left[2D'_{\varrho\sigma} - m_{\varrho\sigma}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}_\sigma|^2} D'_{\sigma\sigma} + \frac{1}{|\boldsymbol{r}_\varrho|^2} D'_{\varrho\varrho}\right)\right]$$

alakot ölt. *Ortogonalitás* esetén $m_{\varrho\sigma} = 0$ $(\varrho \neq \sigma)$ és akkor $-\gamma_{\varrho\sigma} = 2D'_{\varrho\sigma}/|\boldsymbol{r}_\sigma|\,|\boldsymbol{r}_\varrho|$. Formuláinkban

$$2D'_{\varrho\sigma} = (\boldsymbol{r}_\varrho \boldsymbol{v}_\sigma + \boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{v}_\varrho) + u^3(\boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{w}_\varrho + \boldsymbol{r}_\varrho \boldsymbol{w}_\sigma) + (\boldsymbol{r}_\varrho \boldsymbol{r}^3)(\boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{r}^3)(\boldsymbol{r}_\varrho \boldsymbol{w}),$$

$$D'_{\sigma\sigma} = \boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{v}_\sigma + u^3 \boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{w}_\sigma + (\boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{r}^3)(\boldsymbol{r}_\sigma \boldsymbol{w}).$$

A további idevágó kérdések tekintetében a szakirodalomra* utalunk.

* L. pl. *Parkus* [23], *Krettner* [25].

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

MATEMATIKAI

1. DR. EGERVÁRY JENŐ Matematika II. c. műegyetemi előadásairól készült különféle jegyzetek.

2. HAJÓS GYÖRGY: Differenciálgeometria; jegyzet.—Közokt. Jegyzetellátó Vállalat, 1952.

3. DR. SÁRKÖZI PÁL: Bevezetés a differenciálgeometriába. — Pannonhalma, 1936.

4. DR. SZENTMÁRTONY TIBOR: Vektor- és tenzorszámítás. — Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1946.

5. BORBÉLY SAMU Matematika II. c. műegyetemi előadásairól készült különféle jegyzetek.

6. DR. EGERVÁRY JENŐ: On the curvature and the torsion of the space curves. — Acta Mathematica, M. Tud. Akadémia, Budapest, 1949.

7. M. LAGALLY: Vorlesungen über Vektorrechnung; 3. Aufl. — Akad. Verlag, Leipzig, 1945.

8. Н. Е. Кочин: Векторное исчисление и начала тензорново исчисления, изд седь. — Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1951.

9. J. SPIELREIN: Lehrbuch der Vektorrechnung; 2. Aufl. — Wittwer, Stuttgart, 1926.

10. F. OLLENDORF: Die Welt der Vektoren. — Springer, Wien, 1950.

11. DR. STACHÓ TIBOR: Felsőbb mennyiségtan; 2. kiadás. — Budapest, 1942.

12. B. BAULE: Differentialgeometrie; 3. Aufl. — Hirzel, Leipzig, 1950.

13. R. GANS: Vektoranalysis; 7. Aufl. — Teubner, Leipzig, 1950.

14. Я. С. Дубнов: Основы векторного исчисления; часть II. — ГІТТЛ, Москва, 1952.

15. W. BLASCHKE: Differentialgeometrie I—II—III. — Springer, Berlin, 1929.

16. W. SCHLEGELMILCH: Die Differentialoperationen der Vektoranalysis. — Verl. Technik, Berlin, 1954.

17. Г. Е. Шилов: Лекции по векторному анализу. — ГІТТЛ, Москва, 1954.

18. GJUNTER — KUZMIN: Felsőbb matematikai példatár, II. rész; fordítás oroszból. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

19. Н. А. Кильчевский: Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. — ГІТТЛ, Москва, 1954.

20. В. И. Смирнов: Курс высшей математики, том II; изд. 10. — ГІТТЛ, Москва, 1950.

21. F. SCHWANK: Randwertprobleme. — Teubner, Leipzig, 1951.

22. П. К. Рашевский: Риманова геометрия и тензорный анализ. — ГІТТЛ. Москва, 1953.

23. E. MADELUNG: Mathematische Hilfsmittel des Physikers; 5. Aufl. — Springer, Berlin, 1953.

24. D. E. RUTHERFORD: Vector methods (applied to differential geometry, mechanics, and potential theory). — Oliver and Boyd, London 1954.

25. ALEXITS—FENYŐ: Matematika vegyészek részére. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
26. DR. LOVASS-NAGY VIKTOR: Mátrixszámítás; Műsz. Mat. Gyak. C. IV. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.
27. A. DUSCHEK—W. MAYER: Lehrbuch der Differentialgeometrie, Bd. I. — Leipzig, Berlin, 1930.
28. E. KREYSZIG: Differentialgeometrie. — Akad. Verlag, Leipzig, 1957.
29. FAZEKAS FERENC: Lineáris algebra. — Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1961.

TECHNIKAI

1. BUDÓ ÁGOSTON: Mechanika; 2. bőv. kiadás. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.
2. G. JOOS: Lehrbuch der theoretischen Physik; 6. Aufl. — Akad. Verlag, Leipzig, 1945.
3. DR. REUSS ENDRE: Általános szilárdságtan c. előadásának jegyzete. — Vörösváry, Budapest.
4. CHOLNOKY TIBOR: Sztatika, Szilárdságtan és kinetika; jegyzetek. — Közokt. Jegyzetellátó Vállalat, 1953.
5. DR. GRUBER—BLAHÓ: Folyadékok mechanikája. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
6. L. G. LOJCJANSZKIJ: Folyadékok és gázok mechanikája; fordítás oroszból. — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
7. A. SOMMERFELD: Mechanik der deformierbaren Medien; 2. Aufl. — Akad. Verlag, Leipzig, 1949.
8. *Ландау—Лифшиц:* Механика сплошных сред; изд. втор. — ГИТТЛ, Москва, 1954.
9. SIMONYI KÁROLY: Elméleti villamosságtan. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
10. SIMONYI KÁROLY: Villamosságtan; Műszaki fizika I. kötet. — Akad. Kiadó. Budapest, 1954.
11. *Ландау—Лифшиц.* Теория поля; изд. трет. — ОГИЗ, Москва, 1960.
12. *А. Л Гольденвизер:* Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, Москва, 1953.
13. KŐNIG—WEISE: Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie; I. Band: Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen. — Berlin, 1951.
14. KÉZDI ÁRPÁD: Talajmechanika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
15. D. J. BLOHINCEV: A kvantummechanika alapjai; fordítás oroszból. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
16. DR. NOVOBÁTZKY KÁROLY: A relativitás elmélete. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.
17. ORTVAY RUDOLF: Bevezetés a quantummechanikába; jegyzet. — Budapest, 1940.
18. N. J. BEZUHOV: Bevezetés a rugalmasságtanba és a képlékenységtanba; fordítás oroszból. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
19. I. S. SOKOLNYIKOFF: Mathematical Theory of Elasticity; 2-nd edit. — New York, 1956.
20. J. N. SNEDDON—D. S. BERRY: The Classical Theory of Elasticity. — Springer, Berlin, 1958.
21. K. GIRKMANN: Flächentragwerke. — Springer, Wien.
22. E. A. DEUKER: Zur Stabilität der elastischen Schalen. — ZAMM (1943) 81, 169.
23. H. PARKUS: Die Grundgleichungen der Schalentheorie in allgemeinen Koordinaten.
24. W. ZERNA: Beitrag zur allgemeinen Schalenbiegetheorie. — Ingenieur-Archiv 17/1949/149.
25. J. KRETTNER: Beitrag zur Angewendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Schalen. — Ingenieur-Archiv 21/1953/339.
26. R. ST. JENKINS: Theory of New Forms of Shell. — Symposium on Concret Shell Roof Construction, 1952.

Tankönyvkiadó Vállalat — A kiadásért felelős: Vágvölgyi Tibor igazgató — Újranyomásra előkészítette: Ambrus Ferenc — Műszaki szerkesztő: Bánfi Ferenc — A kézirat nyomdába érkezett: 1966. december — Megjelent: 1967. október — Példányszám: 3000 — Terjedelem: 29,75 (A/5) ív — Készült: az 1965. évi harmadik kiadás matricájának felhasználásával, az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint: — Raktári szám: 44231/I—II—III. — 66.2175 Egyetemi Nyomda, Budapest